

Concursul interjudețean de matematică ARGUMENT

Ediția a 15-a, Ianuarie 2026

Subiecte - Clasa a 9-a

Problema 1. Arătați că pentru orice număr natural nenul N , există numărul natural n și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-2, 1\}$ astfel încât

$$N = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot n^2.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc $\mathcal{C}$ de centru O și rază 1. Prin punctul M interior triunghiului, ducem dreptele AM, BM și CM , care intersectează a doua oară $\mathcal{C}$ în A_1, B_1 , respectiv C_1 . Determinați locul geometric al lui M pentru care $\frac{AM}{A_1M} + \frac{BM}{B_1M} + \frac{CM}{C_1M} = k$, unde $k > 0$ este o constantă dată.

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$f^n(m) + f^m(n) = 3(m + n) \text{ pentru orice } m, n \in \mathbb{N},$$

unde am notat cu $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, unde f este compusă cu ea însăși de n ori, cu convenția că $f^0(m) = m$, pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Problema 4. Fie $n \geq 3$ un număr natural, ABC un triunghi cu centrul de greutate în G și $A_1, A_2, \dots, A_n \in (BC)$, $B_1, B_2, \dots, B_n \in (CA)$, $C_1, C_2, \dots, C_n \in (AB)$, puncte care împart fiecare din laturile pe care sunt în câte $n + 1$ segmente egale. Determinați în câte moduri putem colora punctele $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_n$ cu două culori, astfel încât, orice triunghi de tip $A_i B_j C_k$, unde $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, dacă are vârfurile la fel colorate, atunci are centrul de greutate în G .

Timp de lucru 4 ore

Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte

Concursul interjudețean de matematică ARGUMENT

Ediția a 15-a, Ianuarie 2026

Soluții - Clasa a 9-a

Problema 1. Arătați că pentru orice număr natural nenul N , există numărul natural n și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-2, 1\}$ astfel încât

$$N = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot n^2.$$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Pentru $N = 1$ alegem $n = 1$ și $a_1 = 1$. Pentru $N = 2$, alegem $n = 2$ și $a_1 = -2, a_2 = 1$. Presupunem mai departe că am găsit $n, a_1, a_2, \dots, a_n$ pentru care N admite scrierea din ipoteză.

Întrucât $(n+1)^2 - 2(n+2)^2 + (n+3)^2 = 2$, alegând $a_{n+1} = a_{n+3} = 1$ și $a_{n+2} = -2$, găsim o scriere eligibilă pentru $N + 2$. Așadar, prin metoda inducției matematice, putem spune că pentru orice $N \in \mathbb{N}^*$, există o scriere eligibilă.

Problema 2. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc $\mathcal{C}$ de centru O și rază 1. Prin punctul M interior triunghiului, ducem dreptele AM, BM și CM , care intersectează a doua oară $\mathcal{C}$ în A_1, B_1 , respectiv C_1 . Determinați locul geometric al lui M pentru care $\frac{AM}{A_1M} + \frac{BM}{B_1M} + \frac{CM}{C_1M} = k$, unde $k > 0$ este o constantă dată.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Din puterea punctului M față de $\mathcal{C}$ avem $AM \cdot A_1M = BM \cdot B_1M = CM \cdot C_1M = R^2 - OM^2$, deci $AM^2 + BM^2 + CM^2 = k(R^2 - OM^2) = \alpha$ (1).

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Notăm cu x vectorul de poziție al punctului X . Atunci relația (1) devine $(m-a)^2 + (m-b)^2 + (m-c)^2 = \alpha$, adică $3m^2 - 2m(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2 = \alpha$, sau $\left(m - \frac{3}{k+3} \cdot g\right)^2 = \frac{1}{(k+3)^2} (9 \cdot OG^2 + (k^2 - 9)R^2)$

(2). Din (2) deducem că avem $k \geq 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{OG}{R}\right)^2}$, altfel locul geometric căutat este vid. Apoi, din (2) deducem că M parcurge un cerc de centru P , unde $p = \frac{3}{k+3} \cdot g$, și rază $\frac{1}{k+3} \cdot \sqrt{9 \cdot OG^2 + (k^2 - 9)R^2}$.

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$f^n(m) + f^m(n) = 3(m + n) \text{ pentru orice } m, n \in \mathbb{N},$$

unde am notat cu $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, unde f este compusă cu ea însăși de n ori, cu convenția că $f^0(m) = m$, pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Pentru $m = 0$ avem $f^n(0) + n = 3n$, deci $f^n(0) = 2n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătăm prin inducție după $k \geq 0$ că $f(2k) = 2k + 2$. Pentru $k = 0$, din $f^n(0) = 2n$ cu $n = 1$, obținem $f(0) = 2$. Presupunem că $f(2k) = 2k + 2$, pentru orice $k = 0, 1, \dots, n$. Atunci $f(2n + 2) = f(f(2n)) = f^3(2n - 2) = \dots = f^{n+2}(0) = 2(n + 2) = 2n + 4$.

Acum, pentru $m = 2$, avem $f^n(2) + f(f(n)) = 3(n + 2)$. Dar $f^n(2) = f^{n-1}(4) = \dots = f(2n) = 2n + 2$. Atunci $f(f(n)) = n + 4$ (1). Dacă $m = n = 1$, avem $f(1) = 3$. Atunci, din (1), deducem prin inducție că $f(2k + 1) = 2k + 3$, pentru orice $k \geq 0$. Așadar, avem $f(n) = n + 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4. Fie $n \geq 3$ un număr natural, ABC un triunghi cu centrul de greutate în G și $A_1, A_2, \dots, A_n \in (BC)$, $B_1, B_2, \dots, B_n \in (CA)$, $C_1, C_2, \dots, C_n \in (AB)$, puncte care împart fiecare din laturile pe care sunt în câte $n + 1$ segmente egale. Determinați în câte moduri putem colora punctele $A_1, A_2, \dots, A_n$, $B_1, B_2, \dots, B_n$, $C_1, C_2, \dots, C_n$ cu două culori, astfel încât, orice triunghi de tip $A_i B_j C_k$, unde $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, dacă are vârfurile la fel colorate, atunci are centrul de greutate în G .

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluție. Notăm cu x vectorul de poziție al punctului X . În primul rând, dorim să identificăm triunghiurile $A_i B_j C_k$ care au centrul de greutate în G , condiție care se scrie $a_i + b_j + c_k = a + b + c$ (1). Dar $a_i = \frac{ib + (n-i)c}{n}$, $b_j = \frac{jc + (n-j)a}{n}$ și $c_k = \frac{ka + (n-k)b}{n}$, deci (1) devine $n(a + b + c) = i(b - c) + nc + j(c - a) + na + k(a - b) + nb$. De aici deducem că $i(b - c) + j(c - a) + k(a - b) = 0$, adică $(i - k) \cdot \overrightarrow{CB} + (j - k) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Cum vectorii $\overrightarrow{CB}$ și $\overrightarrow{AC}$ nu sunt colinari, avem $i = j = k$. Așadar triunghiurile cu centrul de greutate în G sunt cele de forma $A_i B_i C_i$, unde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (1).

Observăm că dacă una dintre culori, să zicem roșu, apare pe toate laturile, atunci conform (1) există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât A_i, B_i, C_i sunt roșii. Dacă ar mai exista $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq i$, pentru care, de exemplu A_j este roșu, atunci din (1) aplicat pentru $A_j B_i C_i$, am avea $j = i$, contradicție. Atunci toate celelalte puncte au cealaltă culoare, să zicem albastre. Cum $n \geq 3$, acestea ar fi cel puțin câte 2 pe fiecare latură, lucru care din nou contrazice (1). Deducem că există o latură care nu

are niciun punct roșu, deci le are pe toate albastre, și o latura care nu are niciun punct albastru, deci le are pe toate roșii. Atunci, niciun triunghi de tipul $A_iB_jC_k$ nu are cum să aibă toate vârfurile la fel colorate, deci condiția este îndeplinită.

Pentru a număra, putem alege latura cu toate punctele albastre în 3 moduri, pe cea cu toate punctele roșii în 2 moduri, iar punctele laturii rămase pot fi colorate la liber, adică în 2^n moduri, așadar avem un total de $3 \cdot 2^{n+1}$. Dar, colorările în care toate punctele fiecărei laturi sunt la fel colorate, de exemplu ARR , sunt numărate de câte 2 ori, deci pentru fiecare astfel de configurație trebuie scăzută o unitate la numărare. Cum acestea sunt 6, avem numărul total egal cu $6(2^n - 1)$.