

Concursul interjudețean de matematică ARGUMENT

Ediția a 15-a, Ianuarie 2026

Subiecte - Clasa a 12-a

Problema 1. a) Arătați că există o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care admite primitive și pentru care $f(f(x)) = f(x) + 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $g(g(x)) = g(x) - 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu admite primitive.

Problema 2. Fie G un grup în care $(xy)^2 = y^2x^2$, pentru orice $x, y \in G$.

a) Arătați că $x^3y = yx^3$, pentru orice $x, y \in G$.

b) Dacă G nu are elemente de ordin 3, arătați că este comutativ.

Problema 3. Fie grupul $(S, \circ)$, unde $S = \{f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \mid f \text{ bijectivă}\}$ și $\circ$ reprezintă operația de compunere a funcțiilor. Fie funcțiile $f, g \in S$ definite prin $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $g(z) = \frac{z-3}{z+1}$, pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Determinați ordinele subgrupurilor $\langle f \rangle$, $\langle g \rangle$ și $\langle f, g \rangle$, unde $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ reprezintă grupul generat de elementele $f_1, f_2, \dots$.

Problema 4. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții care admit primitivele $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care există funcția continuă $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $f = h \circ F$ și $g = h \circ G$, unde $\circ$ reprezintă operația de compunere a funcțiilor.

a) Dacă F și G se anulează în origine, arătați că $f = g$.

b) Dați exemplu de două funcții diferite f și g care respectă condițiile date.

Timp de lucru 4 ore

Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte

Concursul interjudețean de matematică ARGUMENT

Ediția a 15-a, Ianuarie 2026

Soluții - Clasa a 12-a

Problema 1. a) Arătați că există o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care admite primitive și pentru care $f(f(x)) = f(x) + 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $g(g(x)) = g(x) - 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu admite primitive.

Vasile Pop, Cluj Napoca

a) Putem lua $f(x) = 2x$.

b) Observăm că g este injectivă, deci dacă admite primite, are proprietatea valorilor intermediare, deci este strict monotonă. Atunci $g \circ g$ este strict crescătoare, iar cum $g(x) = g(g(x)) + 2x$, g este strict crescătoare. Atunci $g(g(g(x))) = g(g(x)) - 2g(x) = g(x) - 2x - 2g(x) = -(2x + g(x))$, care este o funcție strict descrescătoare, contradicție.

Problema 2. Fie G un grup în care $(xy)^2 = y^2x^2$, pentru orice $x, y \in G$.

a) Arătați că $x^3y = yx^3$, pentru orice $x, y \in G$.

b) Dacă G nu are elemente de ordin 3, arătați că este comutativ.

Mihai Opincariu, Brad

Soluție. a) Avem $(xy)^4 = (y^2x^2)^2 = x^4y^4$, de unde $(yx)^3 = x^3y^3$ (1). Atunci $yx^3y^{-1} = (yxy^{-1})^3 = (xy^{-1})^3 \cdot y^3 = (xy^{-1})^2 \cdot xy^2 = y^{-2}x^3y$, deci $y^3x^3 = x^3y^3$. Deducem din (1) că $(xy)^3 = (yx)^3$. Atunci $x^3 = (xy^{-1}y)^3 = (yxy^{-1})^3 = yx^3y^{-1}$, de unde avem $x^3y = yx^3$.

b) Avem $e = (xy)^3(xy)^{-3} = (xy)^3(yx)^{-3} = (xy)^3(x^{-1}y^{-1})^3 = (xyx^{-1}y^{-1})^3$. Cum G nu are elemente de ordin 3, avem $xyx^{-1}y^{-1} = e$, de unde deducem concluzia.

Problema 3. Fie grupul $(S, \circ)$, unde $S = \{f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \mid f \text{ bijectivă}\}$ și $\circ$ reprezintă operația de compunere a funcțiilor. Fie funcțiile $f, g \in S$ definite prin $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $g(z) = \frac{z-3}{z+1}$, pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Determinați ordinele subgrupurilor $\langle f \rangle$, $\langle g \rangle$ și $\langle f, g \rangle$, unde $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ reprezintă grupul generat de elementele $f_1, f_2, \dots$.

Soluție. Prin calcul, se observă că $f^4 = Id$ și $f, f^2, f^3 \neq Id$, deci $\text{ord}(\langle f \rangle) = 4$.

Prin calcul se observă că $g^3 = Id$ și $g, g^2 \neq Id$, deci $\text{ord}(\langle g \rangle) = 3$.

Prin calcul, se observă că $h = f \circ g \circ f$ este $h(x) = x + 1$. Atunci ordinul lui h este infinit, de unde rezultă că $\text{ord}(\langle f, g \rangle) = \infty$.

Problema 4. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții care admit primitivele $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care există funcția continuă $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $f = h \circ F$ și $g = h \circ G$, unde $\circ$ reprezintă operația de compunere a funcțiilor.

a) Dacă F și G se anulează în origine, arătați că $f = g$.

b) Dați exemplu de două funcții diferite f și g care respectă condițiile date.

Soluție. a) Cum $h > 0$, putem considera $v = \frac{1}{h}$, care este o funcție continuă, deci admite o primitivă V . Atunci $(V \circ F)' = 1$, de unde $V(F(x)) = x + a$. Analog, $V(G(x)) = x + b$. Din $F(0) = G(0) = 0$, obținem $a = b = 0$, deci $V(F(x)) = V(G(x))$. Cum $v = V' > 0$, V este o funcție strict crescătoare, deci injectivă. Atunci $F = G$, de unde $f = g$.

b) Luăm $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, $F(x) = \sinh x$ și $G(x) = \sinh(x+1)$.