

Concursul interjudețean de matematică ARGUMENT

Ediția a 15-a, Ianuarie 2026

Subiecte - Clasa a 11-a

Problema 1. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(s_n)_{n \geq 1}$ definite prin

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} \text{ și } s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Studiați convergența celor două șiruri și limitele acestora.

Problema 2. Pentru fiecare $n \geq 1$ considerăm ecuația

$$E_n : x^n + \ln x = 0.$$

- a) Arătați că pentru orice $n \geq 1$, ecuația E_n are o unică soluție reală pozitivă x_n .
b) Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n}(1 - x_n)$.

Problema 3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că

$$(AB)^2 = -AB^2A \text{ dacă și numai dacă } (BA)^2 = -BA^2B.$$

Problema 4. Pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ și polinomul $P \in \mathbb{C}[X]$, notăm $A_P = (P(a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$. Fie $n \geq 2$. Aflați polinoamele $P \in \mathbb{C}[X]$ pentru care

$$\text{rang}(A_P) \leq \text{rang}(A), \text{ pentru orice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

(Numim polinom o funcție $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pentru care există $n \in \mathbb{N}$ și $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$)

Timp de lucru 4 ore

Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte

Concursul interjudețean de matematică ARGUMENT

Ediția a 15-a, Ianuarie 2026

Soluții - Clasa a 11-a

Problema 1. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(s_n)_{n \geq 1}$ definite prin

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} \text{ și } s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Studiați convergența celor două șiruri și limitele acestora.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Inductiv, observăm că $a_n \neq 0$, pentru orice $n \geq 1$. Fie $b_n = \frac{1}{a_n}$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci $b_1 = 2$ și $b_{n+1} = b_n^2 - b_n + 1$ (1). Atunci $b_{n+1} \geq b_n$ este echivalent cu $(b_n - 1)^2 \geq 0$, care este adevărat. Atunci $(b_n)_{n \geq 1}$ este un șir crescător cu $b_1 = 2$ (2), deci are limită $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $l \in \mathbb{R}$, din (1) obținem $l = 1$, ceea ce contrazice (2). Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ și atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Relația (1) se poate scrie $1 - b_{n+1} = b_n(1 - b_n)$, deci $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{b_{n+1}-1}$, pentru orice $n \geq 1$. Dacă adunăm aceste relații pentru $k = 1, 2, \dots, n$, obținem $\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = 1 - \frac{1}{b_{n+1}-1}$, ceea ce implică faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$.

Problema 2. Pentru fiecare $n \geq 1$ considerăm ecuația

$$E_n : x^n + \ln x = 0.$$

- a) Arătați că pentru orice $n \geq 1$, ecuația E_n are o unică soluție reală pozitivă x_n .
b) Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n}(1 - x_n)$.

Dorian Popa, Cluj Napoca

Soluție. a) Funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^n + \ln x$ este strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ și $f(1) = 1$, există $x_n \in (0, 1)$ pentru care $f(x_n) = 0$. Unicitatea acestuia rezultă din stricta monotonie a lui f , care implică injectivitatea acesteia.

b) Observăm că $f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n} < 0$, deci $x_n \in \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}, 1\right)$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Dacă notăm cu $y_n = -\ln x_n > 0$, atunci avem $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ și avem $ny_n e^{ny_n} = n$. Funcția $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definită prin $g(x) = xe^x$ este bijectivă (strict crescătoare, deci injectivă, iar $g(x) = y$ este echivalent cu $\ln x + x = \ln y$, care are soluții întrucât $h(x) = \ln x + x$ este strict crescătoare iar $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$), deci $ny_n = g^{-1}(n)$. Atunci $1 - x_n = \frac{1 - e^{-y_n}}{y_n} \cdot y_n = \frac{1 - e^{-y_n}}{y_n} \cdot \frac{1}{n} g^{-1}(n)$, deci $\frac{n}{\ln n} (1 - x_n) = \frac{1 - e^{-y_n}}{y_n} \cdot \frac{g^{-1}(n)}{\ln n}$. Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-y_n}}{y_n} = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g^{-1}(n)}{\ln n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g^{-1}(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \ln x} = 1$. Concluzionăm că limita căutată este 1.

Problema 3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că

$$(AB)^2 = -AB^2A \text{ dacă și numai dacă } (BA)^2 = -BA^2B.$$

Mihai Opincariu, Brad

Soluție. Datorită simetriei, o implicație este suficientă. Avem $AB(AB + BA) = O_2$, deci $\det(AB + BA) = 0$, altfel am avea $AB = O_2$, deci $\det(AB + BA) = \det(BA) = 0$, contradicție.

Aplicăm urma pe relația dată și avem $\text{Tr}((AB)^2) = -\text{Tr}(A^2B^2)$. Atunci $\text{Tr}((AB + BA)^2) = \text{Tr}((AB)^2 + (BA)^2 + AB^2A + BA^2B) = 0$.

Relația lui Camilton-Hayley aplicată matricei $AB + BA$ este $(AB + BA)^2 - \text{Tr}(AB + BA)(AB + BA) + \det(AB + BA)I_2 = O_2$. Aplicând urma pe această relație și ținând cont de cele demonstrate, avem $\text{Tr}(AB + BA) = 0$. Atunci $(AB + BA)^2 = O_2$, de unde deducem concluzia.

Problema 4. Pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ și polinomul $P \in \mathbb{C}[X]$, notăm $A_P = (P(a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$. Fie $n \geq 2$. Aflați polinoamele $P \in \mathbb{C}[X]$ pentru care

$$\text{rang}(A_P) \leq \text{rang}(A), \text{ pentru orice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluție. Evident polinomul $P = 0$ verifică. Alte polinoame constante nu verifică din cauza cazului $A = O_n$. Căutăm mai departe polinoame neconstante de forma $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k \cdot X^k$, unde $m \geq 1$ și $a_m \neq 0$.

Fie A o matrice cu blocul 2×2 din stânga sus egal cu $\begin{pmatrix} xz & x \\ yz & y \end{pmatrix}$ și restul elementelor nule, unde $x, y, xz, yz \in \mathbb{R}^*$ nu sunt rădăcini ale lui P (adică aparțin lui $\mathbb{R}^*$ fără un număr finit de valori). Pentru orice astfel de matrice avem $\text{rang}(A) = 1$. Asta implică $P(xz)P(y) = P(x)P(yz)$. Atunci avem $\frac{P(x)}{P(y)} = \frac{P(xz)}{P(yz)}$. Pentru $z \rightarrow \infty$ obținem $\frac{P(x)}{P(y)} = \frac{x^m}{y^m}$, de unde deducem că $\frac{P(x)}{x^m}$ este constant.

Pentru $x \rightarrow \infty$, obținem că această constantă este a_m , așadar $P(X) = a_m \cdot X^m$. În chestiuni de rang, putem ignora parametrul nenul a_m .

Dacă $n = 2$, observăm că orice polinom de forma $P = X^m$ verifică:

1. dacă $\text{rang}(A) = 2$, nu avem ce demonstra;
2. dacă $\text{rang}(A) = 1$, atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde $ad = bc$ și a, b, c, d nu sunt toate nule. Atunci $a^m d^m = b^m c^m$ și a^m, b^m, c^m, d^m nu sunt toate nule, deci $\text{rang}(A_P) = 1$;
3. dacă $\text{rang}(A) = 0$, avem $A = O_2$ și atunci $A_P = O_2$.

Pentru $n \geq 3$, considerăm matricea $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ și observăm că $\text{rang}(T) = 2$.

Mai departe, avem $T_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3^m \\ 1 & 2^m & 4^m \\ 2^m & 3^m & 5^m \end{pmatrix}$, deci $\det T_P = 9^m + 8^m - 12^m - 5^m$. Conform ipotezei aplicată matricei T_P , avem $\text{rang}(T_P) \leq 2$, deci $\det T_P = 0$. Atunci $8^m + 9^m = 5^m + 12^m$. Observăm că $m = 1$ este soluție. Pentru $m \geq 2$, funcția $f(x) = x^m$ este strict convexă, deci $f(x+3) - f(x)$ este strict crescătoare. Atunci $f(9) > f(5)$, deci egalitatea nu poate avea loc. Atunci, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deducem că singurul polinom care verifică în acest caz este $P = X$.

În concluzie, dacă $n = 2$, polinoamele de forma $P = c \cdot X^m$, cu $c \in \mathbb{C}^*$ și $m \in \mathbb{N}^*$ sunt cele care verifică, iar pentru $n \geq 3$, polinoamele de forma $P = c \cdot X$, cu $c \in \mathbb{C}^*$ sunt cele care verifică.