

Colegiul Național Gheorghe Șincai, Baia Mare

Concursul interjudețean de matematică ARGUMENT

Ediția a 15-a, Ianuarie 2026

Subiecte - Clasa a 10-a

Problema 1. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x + f(y)) + f(-f(x) + y) + 2x = 0, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. Fie d o dreaptă din plan. Determinați funcțiile $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pentru care

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \in d,$$

pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $z_1 \neq z_2$.

Problema 3. Determinați $a, b \in \mathbb{R}^*$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \{ax\} + [bx]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este bijectivă și determinați inversa ei.

Problema 4. Fie A o mulțime de 8 puncte din plan, care reprezintă vârfurile unui poligon convex și $\mathcal{P}$ mulțimea tuturor poligoanelor cu vârfurile în A . Determinați numărul de perechi $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu proprietatea că $P \cap Q = \emptyset$.

Timp de lucru 4 ore

Fiecare problemă va fi notată cu maxim 7 puncte

Concursul interjudețean de matematică ARGUMENT

Ediția a 15-a, Ianuarie 2026

Soluții - Clasa a 10-a

Problema 1. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x + f(y)) + f(-f(x) + y) + 2x = 0, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Dacă $y = f(x)$, avem $f(x + f(f(x))) = -f(0) - 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deducem că f este surjectivă. Atunci, fie x_0 pentru care $f(x_0) = 0$. Avem $f(x_0 + f(y)) + f(y) - 2x_0 = 0$. Cum f este surjectivă, deducem că $f(x_0 + x) + x - 2x_0 = 0$. Facem $x \rightarrow x - x_0$ și avem $f(x) = -x + 3x_0$, deci $f(x) = -x + a$, unde a este constantă. Din verificare, avem $a = 0$, deci $f(x) = -x$.

Problema 2. Fie d o dreaptă din plan. Determinați funcțiile $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pentru care

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \in d,$$

pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $z_1 \neq z_2$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție.

Observăm că dacă f verifică, atunci $f - a$ verifică, deci presupunem că $f(0) = 0$. Avem $D = \{a + t \cdot b \mid t \in \mathbb{R}\}$, unde $a, b \in \mathbb{C}$. Pentru $z_2 = 0$, condiția din ipoteză implică existența funcției $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(z) = z(a + t(z) \cdot b) = za + zb \cdot t(z)$. Atunci, condiția din ipoteză implică $a + b \cdot \frac{z_1 t(z_1) - z_2 t(z_2)}{z_1 - z_2} \in D$, adică $\frac{z_1 t(z_1) - z_2 t(z_2)}{z_1 - z_2} = q \in \mathbb{R}$, de unde obținem $z_1(t(z_1) - q) = z_2(t(z_2) - q)$ (1).

Fie $a \in \mathbb{C}$ cu $|a| = 1$ și $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid z = k \cdot a, k \in \mathbb{R}^*\}$. Dacă $z_1 \in D_a$ și $z_2 \in D_b$ și $a \neq b$, conform (1) avem $t(z_1) - q = t(z_2) - q = 0$, deci $t(z_1) = t(z_2)$ (2). Dacă $z_1, z_2 \in D_a$, alegem $z_3 \in D_b$, unde $a \neq b$ și conform (2) avem $t(z_1) = t(z_3)$ și $t(z_2) = t(z_3)$, deci $t(z_1) = t(z_2)$. Deducem că t este constantă pe $\mathbb{C}^*$, deci $f(z) = qz$, unde $q \in \mathbb{C}$. Revenind în relația dată, avem restricția $q \in d$. Atunci, funcțiile căutate sunt cele de forma $f(z) = dz + c$, unde $d \in D$ și $c \in \mathbb{C}$.

Problema 3. Determinați $a, b \in \mathbb{R}^*$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \{ax\} + [bx]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este bijectivă și determinați inversa ei.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluție. Din ipoteză, avem $f(x/b) = \{ax/b\} + [x]$ (1). Cum $g(x) = x/b$ este o funcție bijectivă cu inversa $g^{-1}(x) = \frac{1}{b}x$ și (1) se scrie $h = f \circ g = \{cx\} + [x]$, unde $c = a/b$, atunci f este bijectivă dacă și numai dacă h este bijectivă.

Deducem că $[h(x)] = [x]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru ca h să fie bijectivă, trebuie ca $h([k, k+1)) = [k, k+1)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ (2).

Observăm că mulțimea $I_k = \{\{cy\} | y \in [k, k+1)\}$ este un interval, iar din definiția lui h , deducem că lungimea acestuia, care este $|c|$, este egală cu lungimea intervalului $h([k, k+1))$. Atunci, din (2), obținem $|c| = 1$, deci $c \in \{-1, 1\}$.

Pentru $c = 1$, avem $h(x) = x$, deci $f = h \circ g^{-1} = bx$, cu inversa $f^{-1}(x) = \frac{1}{b} \cdot x$. Atunci orice pereche $(b, b) \in \mathbb{R}^*$ verifică.

Pentru $c = -1$, avem $h(x) = [x] + \{-x\}$ și $f = h \circ g^{-1} = [bx] + \{-bx\}$, cu inversa $f^{-1} = [\frac{1}{b}x] - \{-\frac{1}{b}x\}$. Atunci orice pereche $(b, -b) \in \mathbb{R}^*$ verifică.

Problema 4. Fie A o mulțime de 8 puncte din plan, care reprezintă vârfurile unui poligon convex și $\mathcal{P}$ mulțimea tuturor poligoanelor cu vârfurile în A . Determinați numărul de perechi $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu proprietatea că $P \cap Q = \emptyset$.

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluție. În toată soluția poligoanele sunt notate în sensul acelor de ceasornic. Fie $A_1A_2 \dots A_8$ poligonul convex determinat de punctele din A . Observăm că dacă poligoanele $P, Q \in \mathcal{P}$ sunt disjuncte, atunci le putem nota $P = P_1P_2 \dots P_s$ și $Q = Q_1Q_2 \dots Q_t$, unde $s, t \geq 3$, astfel încât poligonul $R = P_1P_2 \dots P_sQ_1Q_2 \dots Q_t$ să fie un poligon convex, iar această notație este unică. Atunci putem defini o funcție $f : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ care asociază fiecărei perechi $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ acest poligon care le "înfășoară". Numărul cerut este atunci $s = \sum_{R \in \mathcal{P}} |f^{-1}(R)|$.

Pentru $R \in \mathcal{P}$, observăm că $|f^{-1}(R)| \neq 0$ doar dacă R are cel puțin 6 vârfuri. Fie $R \in \mathcal{P}$ un poligon cu $k \geq 6$ vârfuri. Pentru a determina câte perechi (P, Q) satisfac $f((P, Q)) = R$, trebuie să alegem punctul P_1 din care pornim notația lui P , care poate fi ales în k moduri și punctul P_s în care ne oprim cu notația lui P , care poate

fi ales în $k - 5$ moduri ($3 \leq s \leq k - 3$). Restul de puncte rămase determină în mod unic pe Q . Atunci, avem $|f^{-1}(R)| = k(k - 5)$.

Notăm cu v_R numărul vârfurilor lui R . Cum orice $k \geq 6$ puncte din A determină un poligon convex, avem $\sum_{R \in \mathcal{P}} |f^{-1}(R)| = \sum_{R \in \mathcal{P}} v_R(v_R - 5) = \sum_{k=6}^8 k(k - 5) \cdot |T_k|$, unde $T_k = \{R \in \mathcal{P} | v_R = k\}$. Dar $|T_6| = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$, $|T_7| = 8$ și $|T_8| = 1$. Atunci $\sum_{k=6}^8 k(k - 5) \cdot |T_k| = 6 \cdot 28 + 14 \cdot 8 + 24 = 304$.