Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT

Ediţia a 14-a, Ianuarie 2025

Soluţii - Clasa a 9-a

Problema 1. Determinaţi şirurile de numere naturale nenule $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ care verifică relaţiile:

(i) $a_1 = 1$ şi $4 \cdot (a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n) = a_n \cdot a_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
(ii) $b_1^3 + b_2^3 + \ldots + b_n^3 = 3(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2$, pentru orice $n \geq 1$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Avem $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ şi $a_3 = 9$. Arătăm prin inducţie că $a_n = n^2$. Presupunem că $a_k = k^2$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$ şi arătăm că $a_{n+1} = (n+1)^2$. Avem $4 \cdot (1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = n^2 \cdot a_{n+1}$, deci $a_{n+1} = 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2} = (n+1)^2$.

Avem $b_1 = 3$ şi $b_2 = 6$ şi arătăm prin inducţie că $b_n = 3n$. Presupunem că $b_k = 3k$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$ şi arătăm că $b_{n+1} = 3(n+1)$. Atunci avem $b_{n+1}^3 + 3^3(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = 3(3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + b_{n+1})^2$. Fie $x = b_{n+1}$. Atunci $x^3 + \frac{27n^2(n+1)^2}{4} = \frac{27n^2(n+1)^2}{4} + 3x^2 + 9n(n+1)x$ sau $x^2 - 3x - 9n(n+1) = 0$ sau $(x - 3(n+1))(x + 3n) = 0$, deci $x = 3(n+1)$.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule a pentru care numerele

$$x = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \ldots}}}} \text{ şi } y = \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \ldots}}}}$$

sunt naturale, unde apar o infinitate de radicali iar semnele $+$ şi $-$ alternează.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Observăm că $x = \sqrt{a-y}$ şi $y = \sqrt{a+x}$, deci $x^2 = a - y$ şi $y^2 = a + x$. Scădem aceste relaţii şi obţinem $y = x + 1$.

Atunci avem $x^2 + x + 1 - a = 0$, care are rădăcinile $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$, iar cum $x \in \mathbb{N}$, avem $4a - 3$ pătrat perfect impar, deci $4a - 3 = (2k+1)^2$, de unde deducem că $a = k^2 + k + 1$, $x = \frac{-1+2k+1}{2} = k$ şi $y = k + 1$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi numerele $a_i(j)$, unde $1 \leq i \leq n$ şi $1 \leq j \leq n$, cu proprietatea că $a_i(1), a_i(2), \ldots, a_i(n)$ reprezintă o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, n$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots n$. Notăm cu $b_k = \sum_{i=1}^{n} a_i(k)$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$. Dacă numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ formează o progresie aritmetică, care are cel mai mic termen a şi raţie r, spunem că perechea (a, r) este eligibilă.

a) Arătaţi că pentru orice pereche eligibilă (a, r) are loc inegalitatea $a \geq r$.
b) Pentru $n = 6$, determinaţi toate perechile eligibile (a, r).

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluţie. a) Întrucât $a_i(1), a_i(2), \ldots, a_i(n)$ este o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, n$, avem $\sum_{k=1}^{n} a_i(k) = \frac{n(n+1)}{2}$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots n$.
Atunci $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i(k) = \frac{n^2(n+1)}{2}$ (1). Dacă $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ este progresie aritmetică cu primul termen a şi raţie r, atunci $b_k = a + (k-1)r$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$, deci $\sum_{k=1}^{n} b_k = na + \frac{rn(n-1)}{2}$ (2).
Din (1) şi (2) avem $n(n+1) = 2a + r(n-1)$ sau $2(a-r) = (n+1)(n-r)$ (3).

Observăm că $b_1 \geq n$ şi $b_n \leq n^2$. Atunci $(n-1)r = b_n - b_1 \leq n^2 - n$, adică $r \leq n$. Atunci, din (3) deducem că $a \geq r$.

b) Dacă $n = 6$, avem $2(a-r) = 7(6-r)$ sau $2a + 5r = 42$. Din $a \geq 6$ deducem că $r \leq 6$, iar cum r este par, avem $r \in \{2, 4, 6\}$ pentru care obţinem perechile $(a, r) \in \{(6, 6), (11, 4), (16, 2)\}$.
Pentru $(a, r) = (6, 6)$ considerăm secvenţele $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.
Pentru $(a, r) = (11, 4)$ considerăm secvenţele $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(2, 1, 3, 4, 5, 6)$, $(2, 3, 1, 4, 5, 6)$, $(2, 3, 4, 1, 5, 6)$, $(2, 3, 4, 5, 1, 6)$, $(2, 3, 4, 5, 6, 1)$.
Pentru $(a, r) = (16, 2)$ considerăm secvenţele $(1, 3, 5, 2, 4, 6)$, $(2, 1, 3, 4, 6, 5)$, $(2, 3, 1, 6, 4, 5)$, $(2, 3, 6, 1, 4, 5)$, $(3, 6, 2, 5, 1, 4)$, $(6, 2, 3, 4, 5, 1)$.

Problema 4. Considerăm în plan vectorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_{12}}$ şi notăm cu $\vec{a} = \sum_{i=1}^{8} \vec{v_i}$ şi cu $\vec{b} = \sum_{i=5}^{12} \vec{v_i}$. Ştiind că $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, determinaţi valoarea minimă a expresiei

$$s = \sum_{i=1}^{12} |\vec{v_i}|^2.$$

Silviu Cristea, Cluj Napoca

Soluţie. Fie $x = \sum_{i=1}^{4} \vec{v_i}, y = \sum_{i=5}^{8} \vec{v_i}$ şi $z = \sum_{i=9}^{12} \vec{v_i}$. Atunci avem $\vec{a} = x + y$ şi $\vec{b} = y + z$. Observăm că $s = \sum_{i=1}^{4} |\vec{v_i}|^2 + \sum_{i=5}^{8} |\vec{v_i}|^2 + \sum_{i=9}^{12} |\vec{v_i}|^2 \geq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{4} |\vec{v_i}|\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=5}^{8} |\vec{v_i}|\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=9}^{12} |\vec{v_i}|\right)^2 \geq \frac{1}{4} \cdot (|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)$.

Dar $|x + y| = 1$, deci $|x| \geq 1 - |y|$, iar $|y + z| = 1$, deci $|z| \geq 1 - |y|$. Atunci, dacă notăm cu $\alpha = |y|$, avem $s \geq \frac{\alpha^2+2(1-\alpha)^2}{4} = \frac{3\alpha^2-4\alpha+2}{4}$. Minimul expresiei $\frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}$ este $\frac{1}{6}$, care se obţine pentru $\alpha = \frac{2}{3}$.
Egalitatea are loc când toţi vectorii au aceiaşi direcţie şi acelaşi sens, primii patru şi ultimii patru au modulele $\frac{1}{12}$ iar restul au modulul $\frac{1}{6}$.

Observaţie. Se poate arăta că $n \sum_{i=1}^{n} |\vec{v_i}|^2 \geq |\sum_{i=1}^{n} \vec{v_i}|^2$ şi astfel: $(\sum_{i=1}^{n} \vec{v_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \vec{v_i}^2 + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} \vec{v_i}\vec{v_j} = \sum_{i=1}^{n} |\vec{v_i}|^2 + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} \vec{v_i}\vec{v_j}$. Atunci inegalitatea este echivalentă cu $(n-1) \sum_{i=1}^{n} |\vec{v_i}|^2 - 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} \vec{v_i}\vec{v_j} \geq 0$, sau $\sum_{i<j}^{n} |\vec{v_i} - \vec{v_j}|^2 \geq 0$.