Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT

Ediţia a 13-a, Ianuarie 2024

Soluţii şi bareme - Clasa a 9-a

Problema 1

a) Fie $k \geq 3$ un număr natural şi x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - (2k+1)x + k = 0$. Arătaţi că $s_n = x_1^n + x_2^n - 1$ este divizibil cu k, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Arătaţi că pentru orice număr natural $N \geq 2$ există un număr iraţional $a > 1$ pentru care $[a^n]$ se divide cu N, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

a) Din relaţiile

$$x_1^2 - (2k+1)x_1 + k = 0,\ x_2^2 - (2k+1)x_2 + k = 0$$

obţinem

$$x_1^{n+2} = (2k+1)x_1^{n+1} - kx_1^n,\ x_2^{n+2} = (2k+1)x_2^{n+1} - kx_2^n,$$

deci

$$S_{n+2} = (2k+1)S_{n+1} - kS_n = S_{n+1} + k(2S_{n+1} - S_n).$$

Rezultă $S_{n+2} = S_{n+1} \pmod k$, adică $S_n = S_1 = 2k+1 \pmod k$ deci

$$S_n = 1 \pmod k.$$

b) Considerăm ecuaţia $x^2 - (2N+1)x + N = 0$ cu rădăcinile

$$x_1 = \frac{2N+1+\sqrt{4N^2+1}}{2} > 1 \quad \text{şi} \quad x_2 = \frac{2N+1-\sqrt{4N^2+1}}{2} \in (0,1).$$

Ca la a) avem că $S_n = x_1^n + x_2^n - 1$ este un număr natural care se divide cu N. Pe de altă parte $x_2^n \in (0,1)$ şi $S_n < x_1^n = S_n + 1 - x_2^n < S_n + 1$, deci $S_n = [x_1^n]$ şi putem lua

$$a = x_1 = \frac{2N+1+\sqrt{4N^2+1}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Problema 2

Fie triunghiul ABC şi punctul M în interiorul acestuia. Dreptele AM, BM şi CM intersectează laturile BC, CA, respectiv AB în punctele A', B', respectiv C'. Determinaţi punctele M pentru care triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Din faptul că ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate rezultă că $\sum \overrightarrow{AA'} = 0$. Construim paralelogramul $AA'CX$ şi atunci $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{A'A}$. Atunci, avem $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CX}$, ceea ce implică faptul că $BB'XC'$ este paralelogram, deci $XB' = BC'$ şi $XB' \parallel AB$. Observăm că $\Delta AXB'$ şi ΔCBA sunt asemenea ($\angle XAB' = \angle ACB$ şi $\angle AXB = \angle ABC$), deci avem $\frac{AX}{BC} = \frac{AB'}{AC} = \frac{XB'}{BA}$, adică $\frac{BC'}{AB} = \frac{A'C}{BC} = \frac{AB'}{CA}$.
De aici deducem că $\frac{BC'}{C'A} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{CA'}{A'B} = x$, iar din teorema lui Ceva deducem că $x^3 = 1$, deci $x = 1$. Deducem că M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problema 3

Fie şirurile de numere naturale $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ care verifică relaţiile $x_{n+1} = 2x_n + y_n$ şi $y_{n+1} = 3x_n + 2y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $x_0 = y_0 = 1$.
a) Arătaţi că există $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ pentru care $ax_n^2 + by_n^2 + c = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
b) Arătaţi că $y_n = \left[x_n\sqrt{3}\right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
c) Arătaţi că $\left\{x_n\sqrt{3}\right\} = \frac{(\sqrt{3}-1)^{2n+1}}{2^n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

a) Pentru $n = 0$ avem $a + b + c = 0$, Pentru $n = 1$, avem $x_1 = 3$ şi $y_1 = 5$, deci $9a + 25b + c = 0$. De aici avem $8a + 24b = 0$, deci $a = -3b$. Considerând şi cazul $n = 2$, avem $x_3 = 11$ şi $y_3 = 19$, deci $121a + 361b + c = 0$. Rezvolvând sistemul, obţinem $a = 3, b = -1, c = -2$.
Apoi, se arată prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$, că $3x_n^2 - y_n^2 = 2$.
b) $y_n = \left[x_n\sqrt{3}\right]$ este echivalent cu $x_n\sqrt{3} - 1 < y_n < x_n\sqrt{3}$, adică $3x_n^2 < (y_n + 1)^2$ şi $3x_n^2 > y_n^2$, ambele verificabile imediat folosind relaţia de la a).
c) Conform b), avem de arătat că $x_n\sqrt{3} - y_n = \frac{(\sqrt{3}-1)^{2n+1}}{2^n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Demonstrarea relaţiei de mai sus se face prin inducţie.

Problema 4

Pe un cerc de rază 1 se consideră două puncte distincte A şi B, iar pe arcul mic AB se iau punctele distincte $M_1, M_2, \ldots, M_n$, unde $n \geq 12$. Pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$ notăm cu H_i ortocentrul triunghiului M_iAB. Arătaţi că

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} H_iH_j < \frac{3}{4} \cdot n^2.$$

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluţie

Fie O centrul cercului dat. Din formula lui Sylvester aplicată triunghiului M_iAB obţinem $\overrightarrow{OH_i} = \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, pentru orice i. Atunci, vom avea $\overrightarrow{H_iH_j} = \overrightarrow{M_iM_j}$ pentru orice i, j, iar în particular, $H_iH_j = M_iM_j$, pentru orice i, j.

Atunci, avem de arătat că $s = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} H_iH_j = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} M_iM_j < \frac{3}{4} \cdot (n+1)^2$.

Presupunem fără a restrâge generalitatea că ordinea punctelor pe arcul de cerc AB este $A, M_1, M_2, \ldots, M_n, B$.

Fixăm un număr $k \in \{1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\}$. Punctele $M_1, M_{k+1}, M_{2k+1}, \ldots$ determină o linie frântă, care are lungimea mai mică decât cea a arcului AB, deci mai mică decât semiperimetrul cercului care este π. Atunci $M_1M_{k+1} + M_{k+1}M_{2k+1} + \ldots < \pi$. Analog, avem $M_tM_{t+k} + M_{t+k}M_{t+2k} + \ldots < \pi$, pentru orice $t = 1, 2, \ldots, k$. Adunăm aceste relaţii pentru toţi $t = 1, 2, \ldots, k$ şi obţinem $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n, j-i=k} M_iM_j < k\pi$.

Apoi, adunăm aceste relaţii pentru $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ şi avem

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n, j-i \leq n/2} M_iM_j < \pi(1 + 2 + \ldots + \left[\frac{n}{2}\right]) \tag{1}$$

Pentru a obţine s, sumei din urmă îi lipsesc termenii M_iM_j cu $j - i > n/2$, care sunt în număr de $1 + 2 + \ldots + (n - \left[\frac{n}{2}\right] - 1) \leq 1 + 2 + \ldots + \left[\frac{n}{2}\right]$, iar pentru fiecare dintre aceştia avem $M_iM_j < AB \leq 2$. Atunci avem $s < \frac{[\frac{n}{2}]([\frac{n}{2}]+1)}{2}(\pi + 2) < \frac{3}{4} \cdot n^2$, care este echivalent cu $[\frac{n}{2}]([\frac{n}{2}] + 1) < \frac{3}{2(\pi+2)} \cdot n^2$. Dar $\frac{3}{2(\pi+2)} \cdot n^2 \geq \frac{6}{\pi+2} \cdot [\frac{n}{2}]^2$, deci avem de arătat că $[\frac{n}{2}] + 1 < \frac{6}{\pi+2} \cdot [\frac{n}{2}]$, sau $[\frac{n}{2}] \cdot \frac{4-\pi}{\pi+2} > 1$, ceea ce este adevărat pentru $[\frac{n}{2}] \geq 6$.