COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

ROMANIA
MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

CONCURSUL „ARGUMENT” CLASA a VIII-a

13 ianuarie 2024

La problemele 1 – 8 se scriu pe foaia de concurs doar literele corespunzătoare răspunsului considerat corect. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

(5p) **1.** Dacă $a=\sqrt{n+\sqrt{4n-4}}$ și $b=\sqrt{n-\sqrt{4n-4}}$, $n\geq 1$, atunci $a-b$ este :

a) 0 sau 1 b) -1 sau 2 c) 0 sau 2 d) $\sqrt{2}$

(5p) **2.** Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$; $a^2+4b^2+9c^2=2ab+3ac+6bc=108$, atunci $|a+b+c|$ este :

a) 8 b) 11 c) 2 d) 5

(5p) **3.** Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $[8+x]+2023\cdot\{x\}=2024$ este:

a) 2016 b) 2020 c) 1012 d) 2023

(5p) **4.** Dacă $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{2025}{2024}$, atunci $A=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}$ este:

a) 2023/2024 b) 2024/2023 c) 1 d) 2

(5p) **5.** Valoarea minimă a expresiei $E(x)=(x-2)^2+(7-x)^2-2x$ este:

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7

(5p) **6.** $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic în care suma ariilor a câte două fețe alăturate este: $32m^2;35m^2;27m^2$. Lungimea diagonalei paralelipipedului este

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{2}$ d) 2

(5p) **7.** Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu $VA=10cm$ și $m(\angle AVB)=30^\circ$. O furnică pornește din A, se deplasează pe toate fețele laterale ale piramidei şi ajunge în mijlocul muchiei $[VA]$. Drumul cel mai scurt are lungimea:

a) $2\sqrt{5}$ b) $9\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{5}$ d) 10

(5p) **8.** Fie $ABCD$ un tetraedru regulat. Dacă M este mijlocul muchiei (AC), atunci $\cos(\measuredangle(BM,CD))$ este:

a) $\sqrt{3}/3$ b) $\sqrt{3}/6$ c) $\sqrt{3}/8$ d) alt număr

La următoarele probleme se cer soluţiile complete.

9. Fie $a\geq 0$, $x,y\in\mathbb{R}$ cu $x+y+a=0$

(10p) **a)** Arătaţi că $xy\leq a^2/4$;

(10p) **b)** Arătaţi că $|x+1|+|2-y|\geq a+1$.

(30p) **10.** Fie $ABCD$ un tetraedru și M un punct variabil pe fața $[BCD]$. Perpendiculara în M pe planul (BCD) intersectează planele $(ABC),(ACD)$ și (ADB) în punctele M_1,M_2 și M_3. Arătați că suma $MM_1+MM_2+MM_3$ este constantă dacă și numai dacă înălțimea din A trece prin centrul de greutate al triunghiului BCD.

Notă: **Timpul de lucru: 2 ore.**
Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES !***

BAREM clasa a VIII-a

1. (c) $a=1+\sqrt{n-1}, b=\left|\sqrt{n-1}-1\right| \Rightarrow a-b\in\{0,2\}$

2. (b) $(a-2b)^2+(a-3c)^2+(2b-3c)^2=0;\quad a=\pm6; b=\pm3; c=\pm2 \Rightarrow |a+b+c|=11$

3. (d) $2023\cdot\{x\}=k\in\mathbb{Z}$ $< 2023 \Rightarrow 2023$ soluții

4. (a) $A=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}=2-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}=\frac{2023}{2024};$

5. (b) $E(x)=(x-2)^2+(7-x)^2-2x=2(x-5)^2+3\geq 3$

6. (c) $ac+bc=32; ab+ac=35; bc+ab=27 \Rightarrow ab=15; bc=12; ac=20 \Rightarrow d=\sqrt{5^2+4^2+3^2}=5\sqrt{2}$

7. (c) După desfășurarea tetraedrului, $m(\angle AVM)=90^\circ$ $M=\sqrt{100+25}=5\sqrt{5}$ cm, unde M este mijlocul muchiei $[VA]$.

8. (b) Fie $MN \parallel$ (AD) și $BE\perp MN, E\in MN \Rightarrow \cos(\measuredangle$ $\measuredangle$ $=\frac{\sqrt{3}}{6}$

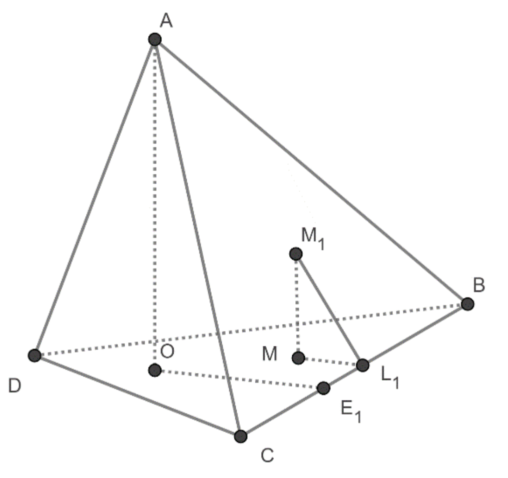
9. a) $xy=x\cdot(-x-a)=-x^2-a\cdot x$ ....(5p)

$-x^2-a\cdot x\leq\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow(2x+a)^2\geq 0$ ....(5p)

b) $|x+1|+|2-y|=|x+1|+|-a-x-2|\geq|(x+1)+(-a-x-2)|$ .... (5p)

Finalizare $|x+1|+|2-y|\geq a+1$ ....(5p)

10.a) Notăm cu $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ unghiurile făcute de fețele laterale cu planul bazei (BCD); O proiecția lui A pe bază; h înălțimea din A; y_1,y_2,y_3 distanțele de la O la laturile bazei; x_1,x_2,x_3 distanțele de la M la laturile bazei. ....(5p)



Avem $MM_i=x_i\cdot tg\alpha_i$, $i=\overline{1,3}$; $tg\alpha_i=h/y_i, i=\overline{1,3}$

$MM_1+MM_2+MM_3=k\ \ (1)\Leftrightarrow h\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}\right)=k$ ...(5p)

Pentru $M=D, x_2=x_3=0$ și $x_1=\frac{2\sigma(BCD)}{BC}=\frac{2\sigma}{BC}$ și

din (1) rezultă $k=h\cdot\frac{2\sigma}{BC\cdot y_1}\Leftrightarrow\frac{\sigma(OBC)}{\sigma(BCD)}=\frac{h}{k}$.

Analog pentru $M=B$ și $M=C$ ....(5p)

Obținem $\sigma(OCD)=\sigma(ODB)=\sigma(OBC)=\frac{h}{k}\cdot\sigma(BCD)\Rightarrow$

$O=G$ și $k=3h$. ....(5p)

Reciproc: Dacă $O=G$, atunci $y_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sigma}{BC}, y_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sigma}{CD}, y_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sigma}{DB}$ ....(5p)

și $MM_1+MM_2+MM_3\overset{(1)}{=}\frac{3h}{2\sigma}(x_1\cdot BC+x_2\cdot CD+x_3\cdot DB)=\frac{3h}{2\sigma}\cdot 2\sigma=3h=$ constant......................(5p)