CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „ARGUMENT”

Baia Mare, 13 ianuarie 2024

CLASA a VII-a

La problemele 1-8, scrieţi pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) 1.Dacă $a,b\in\mathbb{Q}$ verifică egalitatea $2a+b\sqrt{18}=\sqrt{32}+12$ atunci $a+b$ este :

a) $4\sqrt{2}$ b) 6 c) $\frac{22}{3}$ d) $\frac{5}{3}$.

(5p) **2.** Soluția ecuației $\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, unde a și b sunt numere naturale nenule, este:

a) $\left\{(a,b)\middle|a,b\in\mathbb{N}^*\right\}$ b) $\varnothing$ c) $\left\{(n,n)\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}$ d) $\left\{(1,1),(2,2),(4,4)\right\}$

(5p) **3.** Fie $x,y>0$ astfel încât $\left(2+\sqrt{x}\right)^{-1}+\left(2+\sqrt{y}\right)^{-1}=0,3$ atunci $\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^{-1}+\sqrt{y}\left(2+\sqrt{y}\right)^{-1}$ este egal cu:

a) 2 b) 0,5 c) 0,6 d) 1,4

(5p) **4.** Dacă $a\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}=a$ admite o singură soluție, atunci numărul a este:

a) 4 b) 1 c) 2 d) 3

(5p) **5.** Dacă în paralelogramul $ABCD$, $\sphericalangle ADB\equiv\sphericalangle BCA$, atunci măsura unghiului ABC este:

a) 60° b) 90° c) 45° d) 120°

(5p) **6.** În dreptunghiul $ABCD$ bisectoarele unghiurilor DAB, ABC și dreapta DC sunt concurente. Dacă aria dreptunghiului este $32cm^2$ atunci perimetrul dreptunghiului este :

a) $32cm$ b) $16cm$ c) $24cm$ d) $64cm$

(5p) **7.** În rombul $ABCD$, O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD respectiv CBD. Dacă $O_1O_2=BD$, atunci măsura unghiului ABC este:

a) 135° b) 60° c) 120° d) 45°

(5p) **8**. În trapezul $ABCD$ avem $\sphericalangle A=\sphericalangle D=90^\circ$, $AB>CD$, $BC=CD$, $\sphericalangle DCB+\sphericalangle DBA=150^\circ$ și $BC=4\sqrt{3}cm$. Aria trapezului este:

a) $60\sqrt{3}cm^2$ b) $40\sqrt{3}cm^2$ c) $30\sqrt{3}cm^2$ d) $20\sqrt{3}cm^2$

La problemele 9 şi 10 redactaţi rezolvările complete.

(10p) **9.** a) Fie $a,b\in\mathbb{N}$ cu $a\neq b$. Dacă $\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ demonstrați că a și b sunt pătrate perfecte.

(15p) b) Determinați numerele naturale x și y știind că $\sqrt{2^x+9}-\sqrt{5^y-4}=4$.

10. În patrulaterul $ABCD, AC\cap BD=\{O\}, AC\perp BD$ și O este și mijlocul lui $[AC]$. Fie M și N mijloacele laturilor BC și CD. Dacă O este centrul cercului înscris în triunghiul AMN atunci:

(10p) a) Verificați dacă patrulaterul $ABCD$ este romb.

(10p) b) Verificați dacă triunghiul AMN este echilateral.

(5p) c) Calculați raportul dintre aria triunghiului AMN și aria patrulaterului $ABCD$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.

SUCCES!

Barem de corectare

Clasa a VII-a

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
c	**c**	**d**	**a**	**b**	**c**	**a**	**c**

9. a. Notăm $\sqrt{a}-\sqrt{b}=q, q\in\mathbb{Q}$, atunci deoarece $a\neq b \Rightarrow q\neq 0$ **2p**

Egalitatea se scrie $\sqrt{a}=q+\sqrt{b}\,\Big|^2 \Rightarrow a=q^2+2q\sqrt{b}+b$ **4p**

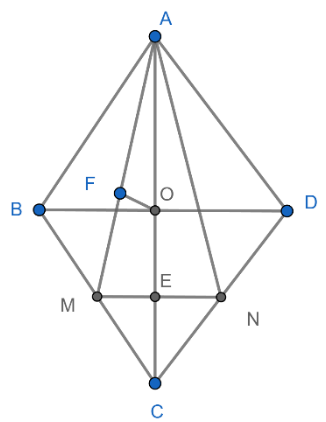
$\Rightarrow \sqrt{b}=\dfrac{a-q^2-b}{2q}\in\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{N} \Rightarrow a$ și b sunt pătrate perfecte....................**4p**

b. Din a. rezultă că $\exists k,p\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^x+9=k^2$ și $5^y-4=p^2$ **4p**

$2^x=k^2-9 \Leftrightarrow 2^x=(k-3)(k+3)$, deci există $m,n\in\mathbb{N}$ cu $m>n$ astfel încât $\begin{cases} k+3=2^m \\ k-3=2^n \end{cases}$ **5p**

$\Rightarrow 6=2^m-2^n \Rightarrow 2^n \underbrace{(2^{m-n}-1)}_{\text{impar } (m>n)}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2^n=2 \\ 2^{m-n}-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow 2^x=2^m\cdot 2^n \Rightarrow x=4$ **3p**

Ecuația devine $5-\sqrt{5^y-4}=4 \Rightarrow \sqrt{5^y-4}=1 \Rightarrow 5^y=5 \Rightarrow y=1$, deci $S=\{(4,1)\}$. **3p**



10. a. Notăm cu $\{E\}=AC\cap$.

$\left.\begin{array}{l} BM=MC \\ DN=NC \end{array}\right| \Rightarrow MN$ e linie mijlocie în $\Delta CBD \Rightarrow MN \parallel$, dar

$AC\perp BD \Rightarrow MN\perp AC$. Atunci AE este înălțime în ΔAMN. Dar O este centrul cercului înscris în triunghi deci AE este și bisectoare deci ΔAMN este isoscel. Prin urmare $ME=EN$.

Dar ME și NE sunt linii mijlocii în ΔCOB respectiv ΔCOD deci $BO=OD$ și cum $AO=OC \Rightarrow ABCD$ este paralelogram cu diagonalele perpendiculare, deci este romb....................................**10p**

b. Ducem $OF\perp AM, F\in AM$, atunci $OE=OF$ ca raze în cercul înscris în triunghi.

Din MN linie mijlocie în $\Delta CBD \Rightarrow E$ este mijlocul lui OC, dar $OC=AC \Rightarrow OE=\frac{1}{2}AO$ rezultă că

$OF=\dfrac{AO}{2} \Rightarrow \sphericalangle$ $30^\circ \Rightarrow \sphericalangle$ 60° AMN este echilateral....................**10p**

Obs. Din $AO=2OE$ și AE este mediană în $\Delta AMN \Rightarrow O$ este centrul de greutate al $\Delta AMN \Rightarrow$ centrul de greutate coincide cu centrul cercului circumscris deci ΔAMN este echilateral.

c. M1. Deoarece MN este linie mijlocie în $\Delta CBD \Rightarrow MN=\frac{1}{2}BD, CE=\frac{1}{2}CO$, deci

$$A_{CMN}=\frac{CE\cdot MN}{2}=\frac{\frac{1}{2}BD\cdot\frac{1}{2}CO}{2}=\frac{1}{4}A_{CBD}=\frac{1}{8}A_{ABCD}.$$

AM este mediană în $\Delta ABC \Rightarrow A_{ABM}=\frac{1}{2}A_{ABC}=\frac{1}{4}A_{ABCD}$, analog $A_{ADN}=\frac{1}{4}A_{ABCD}$

Deci $A_{AMN}=A_{ABCD}-A_{ABM}-A_{ADN}-A_{CMN}=A_{ABCD}-\frac{5}{8}A_{ABCD}=\frac{3}{8}A_{ABCD}$ **5p**

M2. $A_{AMN}=\dfrac{AE\cdot MN}{2}=\dfrac{\frac{3}{4}AC\cdot\frac{1}{2}BD}{2}=\dfrac{3}{8}A_{ABCD}$.