Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT 2022

Ediţia a 12-a, Noiembrie 2022

Soluţii - Clasa a 12-a

Problema 1

Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $2n+1$ elemente $n \in \mathbb{N}$, astfel încât există $f : G \to G$ o funcţie cu proprietatea că

$$f(xf(xy)) = yf(x^2),\ \forall\ x, y \in G.$$

Să se demonstreze că G este comutativ.

Mihai Opincariu, Brad

Soluţie

Punând în relaţia din enunţ $x = e$ obţinem

$$f(f(y)) = yf(e),\ \forall\ y \in G, \text{................}\mathbf{1p}$$

de unde rezultă că f este injectivă. Punând în relaţia iniţială................**2p**
$y = e$ obţinem

$$f(xf(x)) = f(x^2),\ \forall\ x \in G\text{................}\mathbf{1p}$$

şi folosind injectivitatea rezultă

$$xf(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = x,\ \forall\ x \in G\text{.................}\mathbf{1p}$$

Acum relaţia din ipoteză devine

$$x^2y = yx^2\text{.................}\mathbf{1p} \tag{1}$$

Dar G are $2n+1$ elemente, deci $x^{2n+1} = e,\ \forall\ x \in G$. Vom putea scrie

$$xy = x^{2n+2}y = (x^{n+1})^2y \overset{(1)}{=} y(x^{n+1})^2 = yx^{2n+2} = yx$$

de unde cerinţa problemei.................**1p**

Problema 2

Se consideră ecuaţiile funcţionale:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(f(x)) = f(x) - 2x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(g(x)) = g(x) + 2x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

a) Să se arate că există funcţie g care verifică (2) şi care admite primitivă.
b) Să se arate că orice funcţie f care verifică (1) nu are primitivă.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

a) Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei (2) şi care are primitive $G(x) = x^2 + c$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.................**2p**
b) Din (1) dacă $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $x_1 = x_2$, adică orice soluţie a ecuaţiei (1) este funcţie injectivă.................**1p**
Dacă prin absurd f ar avea şi primitivă, ar avea proprietatea lui Darboux, deci f ar fi strict monotonă.................**2p**

Cazul a_1). Dacă f ar fi strict crescătoare atunci înlocuind în (1) pe x cu $f(x)$ obţinem relaţia

$$f^3(x) = f^2(x) - 2f(x) = f(x) - 2x - 2f(x) = -f(x) - 2x,$$

în stânga avem o funcţie crescătoare iar în dreapta o funcţie strict descrescătoare (contradicţie).................**1p**

Cazul a_2). Dacă f ar fi strict descrescătoare, fie $x_1 < x_2$. Avem

$$f(x_1) > f(x_2),\ \ f^2(x_1) < f^2(x_2)$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) - 2x_1 < f(x_2) - 2x_2 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 2(x_1 - x_2) < 0,$$

din nou contradicţie.................**1p**

Problema 3

Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie derivabilă pentru care funcţia

$$F : (0, \infty) \to (0, \infty),\ F(x) = (f(x))^2 + f(x),\ x \in (0, \infty)$$

este o primitivă.
a) Să se arate că f este crescătoare şi convexă.
b) Să se arate că există $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ şi să se calculeze.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

a) Derivăm relaţia dată şi obţinem

$$f(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{2f(x)+1} > 0(*),$$

deci f este strict crescătoare................**2p**
Avem

$$f''(x) = \frac{f'(x)(2f(x)+1) - 2f'(x)f(x)}{(2f(x)+1)^2} = \frac{f'(x)}{(2f(x)+1)^2} > 0$$

deci f este convexă................**1p**

b) Din convexitate rezultă că pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ avem

$$f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0),\ \forall\ x \geq x_0, \text{................}\mathbf{1p}$$

din care rezultă că există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ **1p**
şi din relaţia $(*)$ rezultă că există

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{1}{2}\text{................}\mathbf{1p}$$

Acum aplicând L'Hospital avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1} = \frac{1}{2}\text{................}\mathbf{1p}$$

Problema 4

Fie $M \neq \emptyset$ o mulţime finită şi $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(M)$ o submulţime cu proprietăţile:

$$\emptyset \in \mathcal{P},\ \ A \cup B \in \mathcal{P},\ \ \forall\ A, B \in \mathcal{P},\ \ M \setminus A \in \mathcal{P}, \forall\ A \in \mathcal{P}.$$

Să se arate că numărul elementelor mulţimii $\mathcal{P}$ este de forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

* * *

Soluţie

În condiţiile date $(\mathcal{P}, \Delta)$ formează subgrup în $(\mathcal{P}(M), \Delta)$. (Elementul neutru pentru operaţia $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ este $\emptyset \in \mathcal{P}$, $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{(\overline{A} \cup B)} \in \mathcal{P}$, simetricul lui A este A)................**3p**

Dar dacă M are n elemente atunci $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ este un grup cu 2^n elemente,................**2p** iar $(\mathcal{P}, \Delta)$, fiind subgrup, are $|\mathcal{P}| = 2^k$ elemente, unde $k \leq n$, căci $|\mathcal{P}|$ divide $|\mathcal{P}(M)|$................**2p**