Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT 2022

Ediţia a 12-a, Noiembrie 2022

Soluţii - Clasa a 11-a

Problema 1

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^4 = 0$. Să se rezolve ecuaţia matriceală:

$$X + A^2 \cdot X + X \cdot A^3 = A,\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \tag{1}$$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

$A^4 = 0 \Leftrightarrow (I_n - A^2)(I_n + A^2) = I_n$ **1p**.

Înmulţim la stânga în (1) cu $I_n - A^2$ şi obţinem:

$$X + (I_n - A^2) \cdot X \cdot A^3 = (I_n - A^2) \cdot A \text{..................}\mathbf{1p} \tag{2}$$

Înmulţim în (2) la dreapta cu A^3 şi ţinem cont că $A^4 = 0$, rezultă:

$$X \cdot A^3 = 0 \text{........................}\mathbf{1p} \tag{3}$$

şi revenind în (2) obţinem:

$$X = (I_n - A^2) \cdot A = A - A^3 \text{............................}\mathbf{2p}$$

Înlocuind în (1):

$$A - A^3 + A^3 - A^5 + A^4 - A^6 = A,$$

care este adevărată, deci singura soluţie este

$$X = A - A^3 \text{...}\mathbf{1p}$$

Problema 2

Să se determine numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ cu proprietatea

$$A \cdot B + B \cdot A = n \cdot I_n.$$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

În relaţia dată folosim urma:

$$Tr(A \cdot B + B \cdot A) = Tr\, n \cdot I_n \Leftrightarrow 2Tr(A \cdot B) = n^2 \text{..........}\mathbf{2p}$$

şi cum $Tr(A \cdot B) \in \mathbb{Z}$ obţinem condiţia necesară ca n să fie număr par.....**1p**

Pentru $n = 2$ un exemplu îl oferă matricele

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

şi

$$A_2 \cdot B_2 + B_2 \cdot A_2 = n \cdot I_2 \text{..................}\mathbf{2p}$$

Pentru $n = 2k$ matricele cu blocuri

$$A_{2k} = \begin{pmatrix} A_2 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_2 \end{pmatrix}, \quad B_{2k} = \begin{pmatrix} B_2 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_2 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$A_{2k} \cdot B_{2k} + B_{2k} \cdot A_{2k} = I_{2k}$$

astfel că condiţia $n = 2k$ (par) este necesară şi suficientă.............**2p**

Problema 3

Spunem că un şir de numere reale $(x_n)_n$ are proprietatea P dacă există

$$\lim_{n\to\infty}(3x_n + x_{2n}) = 4.$$

a) Să se arate că dacă şirul $(x_n)_n$ este mărginit şi are proprietatea P, atunci el este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
b) Daţi exemplu de şir nemărginit care are proprietatea P.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

a) Fie A mulţimea punctelor de acumulare ale şirului. Fiind mărginit, A este nevidă...**1p**
Dacă $a \in A$, există şirul $(k_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$. Din ipoteză avem $\lim\limits_{n\to\infty}(3x_{k_n} + x_{2k_n}) = 4$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k_n} = 4 - 3a$, adică $4 - 3a \in A$................**1p**

Atunci, pentru orice $a \in A$, avem $4 - 3a \in A$. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ prin $a_0 = a$ şi $a_{n+1} = 4 - 3a_n$. Deducem atunci că toţi termenii acestui şir sunt în A. Cum însă avem $a_{n+1} - 1 = 3(1 - a_n))$, deducem că $a_{n+1} - 1 = (-3)^n(a_0 - 1)$...........**2p**
Cum $a_n \in A$ şi A este mărginită, deducem că $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, deci $a = a_0 = 1$. Atunci $A = \{1\}$, deci şirul dat este convergent la 1............**1p**

b) Dacă $n = 2^k \cdot m$, $k \geq 1$, m impar, definim $x_n = 1 + (-3)^k$. Observăm că acest şir este nemărginit iar $3x_n + x_{2n} = 3(1 + (-3)^k) + 1 + (-3)^{k+1} = 4,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$............**2p**

Problema 4

Se consideră şirul $(a_n)_n$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{e + e^{-1}}{2},\ a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + \sqrt{a_n^2 - 1} \cdot \sqrt{a_{n-1}^2 - 1},\ n \geq 1.$$

Să se determine $b > 0$ astfel ca să existe $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b^n}$ şi să fie finită.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Prin inducţie $a_n > 1$, pentru orice n, deci există unic $\alpha_n > 0$ astfel ca

$$a_n = \frac{e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n}}{2}$$

Ecuaţia $a_n = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ este echivalentă cu $e^{2x} - 2a_n \cdot e^x + 1 = 0$ are soluţia unică mai mare ca 1, $e^x = a_n + \sqrt{a_n^2 - 1}$ sau $\alpha_n = \ln\left(a_n + \sqrt{a_n^2 - 1}\right)$.............**1p**

Din relaţia de recurenţă obţinem

$$\frac{e^{\alpha_{n+1}} + e^{-\alpha_{n+1}}}{2} = \frac{e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha_{n-1}} + e^{-\alpha_{n-1}}}{2} + \frac{e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha_{n-1}} - e^{-\alpha_{n-1}}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha_{n+1}} + e^{-\alpha_{n+1}} = e^{\alpha_n + \alpha_{n-1}} + e^{-(\alpha_n + \alpha_{n-1})}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha_{n-1}) = f(\alpha_n + \alpha_{n-1}), \text{.............}\mathbf{1p}$$

unde $f(x) = e^x + e^{-x}$ care este injectivă pe $[0, \infty)$ deci

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1},\ n \geq 1, \text{.............}\mathbf{1p} \tag{1}$$

adică aceeaşi recurenţă ca la şirul lui Fibonacci. În plus,

$$a_0 = 1 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2},\ \text{deci } \alpha_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{e + e^{-1}}{2},\ \text{deci } \alpha_1 = 1.$$

În concluzie din (1) rezultă

$$\alpha_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

şi

$$a_n = \frac{1}{2}(e^{F_n} + e^{-F_n}),\ n \in \mathbb{N}\text{.............}\mathbf{1p}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = \infty$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ şi în mod necesar $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$, deci $b < 1$.........**1p**

$$\lim_{n\to\infty} \left({a_n}^{b^n}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{\ln {a_n}^{b^n}} = \lim_{n\to\infty} e^{b^n \ln a_n}$$

Dar

$$b^n \ln a_n = b^n \ln \frac{e^{F_n} + e^{-F_n}}{2} = b^n \ln e^{F_n} + b^n \ln \frac{1 + e^{2\ln F_n}}{2}, \forall \in \mathbb{N}$$

. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} b^n \ln \frac{1+e^{-2F_n}}{2} = 0$ şi

$$\lim_{n\to\infty} b^n \ln e^{F_n} = \lim_{n\to\infty} b^n F_n = \lim_{n\to\infty} b^n \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} \left[\left(b \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - b^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} \left(b \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

, care e finită $\Leftrightarrow b\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 1 \Rightarrow b \in \left(0, \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right]$................**2p**