Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT 2022

Ediţia a 12-a, Noiembrie 2022

Soluţii - Clasa a 10-a

Problema 1

Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(f(x)+y)+y) = 4f(x)+6y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Pentru $x = 0$,

$$f(f(f(0) + y) + y) = 4f(0) + 6y, \ \forall\ y \in \mathbb{R}. \qquad (1)..\mathbf{1p}$$

Din (1) deoarece funcţia $g(y) = 4f(0) + 6y$ este surjectivă rezultă că f este surjectivă (f ia toate valorile reale, căci $\forall\ z \in \mathbb{R}$, $z = 4f(0) + 6y$)..............**2p**
Pentru $y = -f(x)$, avem

$$f(f(0) - f(x)) = 4f(x) - 6f(x) = -2f(x), \ \forall\ x$$

$$\Rightarrow f(f(0) + t) = 2t,$$

cu $t = -f(x)$ parcurge tot $\mathbb{R}$. Astfel că

$$f(u) = 2u - 2f(0), \ \forall\ u \in \mathbb{R}. \qquad (2)...\mathbf{2p}$$

Pentru $u = 0$ în (2) obţinem $f(0) = -2f(0)$, deci $f(0) = 0$ şi atunci $f(u) = 2u$, $u \in \mathbb{R}$.

Se verifică că singura funcţie este

$$f(x) = 2x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}..............\mathbf{2p}$$

Problema 2

Să se determine numerele naturale n pentru care ecuaţia

$$z^{n+1} + z^n + 1 = 0,\ \ z \in \mathbb{C}$$

are cel puţin o rădăcină de modul 1.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Scriem ecuaţia sub forma $z^n(z+1) = -1$ şi trecând la module obţinem $|z|^n|z+1| = 1$ şi pentru rădăcina ε de modul 1 avem

$$|\varepsilon + 1| = 1 \Leftrightarrow |\varepsilon + 1|^2 = 1 \Leftrightarrow (\varepsilon + 1)(\overline{\varepsilon} + 1) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} + \varepsilon + \overline{\varepsilon} + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \varepsilon + \overline{\varepsilon} + 1 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon + \overline{\varepsilon} + 1 = 0 \text{ şi } \varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} = 1$$

deci ε şi $\overline{\varepsilon}$ sunt rădăcinile ecuaţiei $z^2 + z + 1 = 0$, adică

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\text{..............}\mathbf{3p}$$

Înmulţind cu $z - 1$ în ultima ecuaţie obţinem

$$z^3 = 1,\ z \neq 1, \quad \text{sau} \quad \varepsilon_{1,2}^3 = 1 \text{ şi } \varepsilon_{1,2}^{3k} = 1,\ k \in \mathbb{N}^*\text{..............}\mathbf{1p}$$

Revenind în ecuaţia (1) analizăm trei cazuri:

$$\begin{array}{llll} n = 3k: & \varepsilon^{3k+1} + \varepsilon^{3k} + 1 = 0 & \Leftrightarrow \varepsilon + 2 = 0 & \text{fals.............}\mathbf{1p} \\ n = 3k+1: & \varepsilon^{3k+2} + \varepsilon^{3k+1} + 1 = 0 & \Leftrightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 & \text{adevărat.............}\mathbf{1p} \\ n = 3k+2: & \varepsilon^{3k+3} + \varepsilon^{3k+2} + 1 = 0 & \Leftrightarrow \varepsilon^2 + 2 = 0 & \text{fals} \end{array}$$

Rămâne că valorile n pentru care ecuaţia (1) are şi rădăcina de modul 1 sunt $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$..............**1p**

Problema 3

Numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $n \geq 3$ sunt în această ordine vârfurile unui poligon regulat reprezentat în planul complex. Notăm cu S_n mulţimea tuturor funcţiilor bijective $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ şi cu

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} |z_{\sigma(i+1)} - z_{\sigma(i)}|, \quad \text{cu} \quad \sigma \in S_n.$$

Să se determine valoarea maximă a sumei $S(\sigma)$, $\sigma \in S_n$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Interpretată geometric, problema cere să determinăm o renumerotare a vârfurilor poligonului regulat $A_1, A_2, \ldots, A_n$, fie ea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ astfel ca lungimea liniei poligonale $B_1 B_2 \ldots B_{n-1} B_n$ să fie maximă.............**2p**

Diferenţiem cazurile $n = 2k + 1$ (impar) şi $n = 2k$ (par).............**1p**

1. Pentru $n = 2k + 1$ cel mai lung segment între două vârfuri este $[A_i A_{i+k}]$ şi $[A_i A_{i+k+1}]$, $i = \overline{1, k}$. Linia poligonală:

$$A_1, A_{k+1}, A_{2k+1}, A_k, A_{2k}, A_{k-1}, A_{2k-1}, \ldots, A_2, A_{k+2}$$

(pe poziţiile pare apar vârfurile $A_{k+1}, A_k, A_{k-1}, \ldots, A_2$ în această ordine, iar pe poziţiile impare apar: $A_1, A_{2k+1}, A_{2k}, A_{2k-1}, \ldots, A_{k+2}$ în această ordine).

Lungimea acestei linii poligonale este $L_n = 2k \cdot L$, unde

$$L = A_1 A_{k+1} = 2R \cos \frac{\pi}{2k+1},$$

unde R este raza cercului circumscris poligonului. Deci

$$L_n = 4kR \cos \frac{\pi}{2k+1} \text{.............}\mathbf{2p}$$

2. Pentru $n = 2k$, $k \geq 2$, segmentele de lungime maximă sunt diametrele (de lungime $2R$) iar următoarele sunt de forma $[A_i A_{i+k-1}]$ şi $[A_i A_{i+k+1}]$, $i = \overline{1, k-1}$. Linia poligonală de lungime maximă va conţine k diametre şi $k - 1$ segmente de legătură între diametre de lungimea a doua. O astfel de linie este:

$$A_1, A_{k+1}, A_2, A_{k+2}, A_3, A_{k+3}, \ldots, A_k, A_{2k}$$

(pe poziţiile impare apar: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ în această ordine, iar pe poziţiile pare apar $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_{2k}$ în această ordine). Lungimea liniei va fi

$$2Rk + (k-1)2R \cos \frac{\pi}{k} = 2R \left(k + (k-1) \cos \frac{\pi}{k} \right).$$

Problema 4

a) Să se arate că există funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţiile:

$$h(x+1) + h(x-1) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$h(x+2) + h(x-2) = g(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

dacă şi numai dacă

$$f(x+2) + f(x-2) = g(x+1) + g(x-1),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \qquad (3).$$

b) Să se determine $h(x)$ în funcţie de f şi g.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Din (1) şi (2) obţinem:

$$f(x+2) + f(x-2) = h(x+3) + h(x+1) + h(x-1) + h(x-3),\ \forall\ x$$

$$g(x+1) + g(x-1) = h(x+3) + h(x-1) + h(x+1) + h(x-3),\ \forall\ x,$$

deci (1) şi (2) implică (3).

Din (1):

$$f(x+1) = h(x+2) + h(x),\ \forall\ x$$
$$f(x-1) = h(x) + h(x-2),\ \forall\ x,$$

şi din (2):

$$f(x+1) + f(x-1) = 2h(x) + h(x+2) + h(x-2) = 2h(x) + g(x),\ \forall\ x.$$

Astfel că

$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) + f(x-1) - g(x)),\ \forall\ x. \tag{4}$$

Pentru reciproca de la a) este suficient să verificăm relaţiile (1) şi (2) folosind (4).

Avem:

$$h(x+1)+h(x-1) = \frac{1}{2}(f(x+2)+f(x)-g(x+1)+f(x)+f(x-2)-g(x-1)) = f(x)+\frac{1}{2}((f(x+2)+f(x-$$

$$h(x+2)+h(x-2) = \frac{1}{2}(f(x+3)+f(x+1)-g(x+2)+f(x-1)+f(x-3)-g(x-2)) = \frac{1}{2}((f(x+3)+f(x-$$

Am obţinut:

$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) + f(x-1) - g(x)),\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$