Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT 2022

Ediţia a 12-a, Noiembrie 2022

Soluţii - Clasa a 9-a

Problema 1

Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x \cdot \{y\}) = \{f(x)\} \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

$y = 0 \Rightarrow f(0) = \{f(x)\} \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0)\ (\{f(x)\} - 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.................**1p**
Pentru $y = \varepsilon + k$, $\varepsilon \in [0, 1)$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ din (1) rezultă:

$$f(x \cdot \varepsilon) = \{f(x)\} \cdot f(\varepsilon + k),\ x \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in [0, 1),\ k \in \mathbb{Z}\text{.................}\mathbf{2p} \tag{2}$$

Dacă există $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $\{f(x_0)\} \neq 0$ ($\Leftrightarrow f(x_0) \notin \mathbb{Z}$) din (2) obţinem:

$$f(\varepsilon + k) = \frac{f(x_0 \cdot \varepsilon)}{f(x_0)},\ \forall\ \varepsilon \in [0, 1),\ \forall\ k \in \mathbb{Z}\text{................}\mathbf{1p}$$

deci

$$f(\varepsilon + k) = f(\varepsilon) \Leftrightarrow f(x) = f(\{x\}),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\text{................}\mathbf{1p} \tag{3}$$

Din (3) pentru $x \in \mathbb{Z}$ rezultă

$$f(x) = f(0) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}\text{.................}\mathbf{1p} \tag{4}$$

Luăm în (1) $x = 1$ şi obţinem $f(\{y\}) = 0 = f(y),\ \forall\ y \in \mathbb{R}$.................**1p**

În concluzie singura soluţie este $f = 0$.

Problema 2

Fie $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ numere reale pozitive şi notăm

$$M = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid \frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} + \frac{c_1}{z} = 1 \right\}.$$

Să se determine $m = \min\{a_2 x + b_2 y + c_2 z | (x, y, z) \in M\}$ şi valorile x_0, y_0, z_0 în care se atinge acest minim.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Din inegalitatea C-B-S avem:

$$\left(\frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} + \frac{c_1}{z}\right)(a_2 x + b_2 y + c_2 z)$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{a_1}{x}} \cdot \sqrt{a_2 x} + \sqrt{\frac{b_1}{y}} \cdot \sqrt{h_2 y} + \sqrt{\frac{c_1}{z}} \cdot \sqrt{c_1 z}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{c_1 c_2}\right)^2, \text{...............}\mathbf{3p}$$

deci

$$m \geq \left(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{c_1 c_2}\right)^2.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă

$$\frac{\sqrt{\frac{a_1}{x}}}{\sqrt{a_2 x}} = \frac{\sqrt{\frac{b_1}{y}}}{\sqrt{b_2 y}} = \frac{\sqrt{\frac{c_1}{z}}}{\sqrt{c_2 z}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}}{x} = \frac{\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}{y} = \frac{\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}}{z}, \text{...............}\mathbf{2p}$$

adăugând restricţia $\frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{y} + \frac{c_1}{z} = 1$ obţinem:

$$x = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \cdot S, \quad y = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \cdot S, \quad z = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot S,$$

unde $S = \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{c_1 c_2}$...............**2p**.

Problema 3

Fie M o mulţime finită de puncte în plan. Pentru orice submulţime nevidă $A \subset M$, $A \neq M$, notăm G_A centrul de greutate al mulţimii A şi cu $A' = M \setminus A$.
a) Să se arate că toate dreptele $G_A G_{A'}$ sunt concurente.
b) Să se arate că dacă M are mai multe axe de simetrie atunci ele sunt concurente.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

a) Fie $M = \{A_i \mid i = \overline{i, n}\}$ cu n elemente şi

$$A = \{A_i \mid i \in I\}, \quad \text{unde} \quad I \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

cu $|I| = k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ şi $J = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I$, cu $|J| = n - k$, deci $A' = \{A_j \mid j \in J\}$. Centrele de greutate ale mulţimilor A şi A' vor avea vectorii de poziţie:

$$\overline{r}_{G_A} = \frac{1}{k} \sum_{i \in I} \overline{r}_{A_i}, \quad \overline{r}_{G_{A'}} = \frac{1}{n-k} \sum_{j \in J} \overline{r}_{A_j} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{1p}$$

Punctele dreptei $G_A G_{A'}$ au vectorii de poziţie de forma

$$\overline{r}_t = (1-t)\overline{r}_{G_A} + t \cdot \overline{r}_{G_{A'}} \quad \text{cu} \quad t \in \mathbb{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2p}$$

Pentru $t_0 = 1 - \dfrac{k}{n}$ obţinem

$$\overline{r}_{t_0} = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i \in I} \overline{r}_{A_i} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{1}{n-k} \sum_{j \in J} \overline{r}_{A_j} = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} \overline{r}_{A_i} + \frac{1}{n} \sum_{j \in J} \overline{r}_{A_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_{A_j} = \overline{r}_G, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2p}$$

unde G este centrul de greutate al mulţimii M. Astfel că toate dreptele $G_A G_{A'}$ trec prin G.

b) Dacă D este o axă de simetrie şi notăm cu $S(M)$ mulţimea simetricelor punctelor din M faţă de D, atunci $M = S(M)$ şi $G_M = G_{S(M)}$, deci G_M este punct fix al simetricei, în concluzie $G_M \in D$. Toate axele de simetrie trec prin G, centrul de greutate al mulţimii M……………… **2p**

Problema 4

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin:

$$a_n = \sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{7+\ldots}}}},\quad b_n = \sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{3+\ldots}}}}$$

(în fiecare expresie apar n radicali).
a) Să se determine $[a_n]$ şi $[b_n]$, pentru $n \geq 1$.
b) Să se arate că $\{a_n\} > \{b_n\}$, pentru $n \geq 3$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

a_1) $a_1 = \sqrt{3}$, $[a_1] = 1$, $a_2 = \sqrt{3+\sqrt{7}} \in \left(\sqrt{3+2}, \sqrt{3+3}\right)$, $[a_2] = 2$ şi cum $a_{n+1} > a_n$, $\forall\ n$, rezultă $a_n > 2$, $\forall\ n \geq 2$, $[a_n] \geq 2$, $\forall\ n \geq 2$.................**1p**
Arătăm prin inducţie că $a_n < 3$, $n \in \mathbb{N}^*$ ($a_1 < 3$, $a_2 < 3$). Din definiţie avem

$$a_n = \sqrt{3+\sqrt{7+a_{n-2}}}\text{................}\mathbf{1p}$$

şi în ipoteza de inducţie $a_{n-2} < 3$, rezultă

$$a_n < \sqrt{3+\sqrt{10}} < \sqrt{3+4} = \sqrt{7} < 3.$$

În concluzie $[a_n] = 2$, pentru orice $n \geq 2$.................**1p**

a_2) $b_1 = \sqrt{7}$, $[b_1] = 2$, $b_2 = \sqrt{7+\sqrt{3}} < \sqrt{7+2} = 3$, deci $[b_2] = 2$,

$b_3 = \sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{7}}} > \sqrt{7+2} = 3$ şi $b_3 < \sqrt{7+9} = 4$, deci $[b_3] = 3$.

Deoarece $b_{n+1} > b_n$, $\forall\ n$, rezultă $b_n > 3$, $\forall\ n \geq 3$ şi vom arăta prin inducţie că $b_n < 4$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Din definiţia lui b_n avem relaţia de recurenţă

$$b_{n+1} = \sqrt{7+\sqrt{3+b_{n-1}}}$$

şi în ipoteza $b_{n-1} < 4$ rezultă

$$b_{n+1} < \sqrt{7+\sqrt{7}} < \sqrt{7+9} = 4.$$

În concluzie $[b_n] = 3$, pentru orice $n \geq 3$.................**2p**

b) Avem $\{a_n\} > \{b_n\} \Leftrightarrow a_n - [a_n] > b_n - [b_n] \Leftrightarrow a_n - 2 > b_n - 3$, $n \geq 3 \Leftrightarrow b_n < a_n + 1$ $\Leftrightarrow \sqrt{7 + a_{n-1}} < a_n + 1$. Dar $\sqrt{7 + a_{n-1}} < \sqrt{7 + a_n}$ şi vom arăta că

$$\sqrt{7 + a_n} < a_{n+1} \Leftrightarrow 7 + a_n < a_n^2 + 2a_n + 1$$

$$\Leftrightarrow a_n^2 + a_n - 6 > 0 \Leftrightarrow (a_n - 2)(a_n + 3) > 0,$$

inegalitate adevărată căci pentru $n \geq 3$ avem $a_n > 2$.................**2p**