CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „ARGUMENT”
Baia Mare, 19 noiembrie 2022

CLASA a VIII-a

La problemele 1-8, scrieți pe foaia cu răspunsuri doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Dacă $a=\sqrt{3+\sqrt{7}}+\sqrt{3-\sqrt{7}}$ atunci $a^2\left(12-a^2\right)$ este egal cu:

a) $9+2\sqrt{7}$ b) $9-2\sqrt{7}$ c) 28 d) 0

(5p) **2.** Suma soluțiilor întregi ale inecuației $|1-2x|\leq 20$ este:

a) 55 b) 0 c) 10 d) Nu se poate calcula

(5p) **3.** Minimul expresiei $E(x)=(x+1)^2+(x+3)^2$ este:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

(5p) **4.** Ultima cifră a produsului tuturor numerelor impare nedivizibile cu 5 mai mici decât 2022 este:

a) 1 b) 3 c) 7 d) 9

(5p) **5.** Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu $AB=6cm$, atunci distanța dintre centrele a două fețe laterale este:

a) $3\sqrt{3}cm$ b) $6\sqrt{2}cm$ c) $3cm$ d) $2cm$

(5p) **6.** Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu suma lungimilor tuturor muchiilor $44cm$ și aria bazei $16cm^2$. Aria laterală a prismei este:

a) $48cm^2$ b) $32\sqrt{2}cm^2$ c) $18cm^2$ d) $96cm^2$

(5p) **7.** Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată unde $VA=3\sqrt{3}\,cm$ iar aria bazei este $27cm^2$. Măsura unghiului BVD este:

a) 90° b) 45° c) 60° d) 30°

(5p) **8.** Se consideră patru puncte necoplanare A, B, C și D cu proprietatea că distanțele dintre oricare două sunt exprimate în centimetri prin numere naturale. Dacă $AB=5cm$, $AC=3cm$ și $AD=1cm$, atunci maximul perimetrului triunghiului BCD este:

a) $12cm$ b) $13cm$ c) $14cm$ d) $15cm$

La problemele 9 şi 10 redactaţi rezolvările complete.

(10p) **9.** a) Fie $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$. Demonstrați că pentru orice alegere a semnelor expresia

$$\pm1\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm\ldots\pm\frac{1}{n} \text{ este nenulă.}$$

(20p) b) Să se determine numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbb{R}, n\geq 2$ care verifică relația

$$|x_1-1|=2|x_2-x_1|=3|x_3-x_2|=\ldots=n|x_n-x_{n-1}|=(n+1)|1-x_n|$$

(20p) **10.** În tetraedrul $VABC$ notăm cu I, J și K centrele cercurilor înscrise în triunghiurile VAB, VAC respectiv VBC.

a) Demonstrați că intersecția planelor $(VAK), (VBJ)$ și (VCI) este o dreaptă d.

b) Dacă dreapta d trece prin centrul de greutate al ΔABC arătați că tetraedrul are muchiile laterale congruente.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.
SUCCES

Barem de corectare
Clasa a VIII-a

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
c	c	c	a	d	a	a	d

8. a. Vom folosi următorul rezultat: Dacă $n \geq 2$, atunci între n și $2n$ există cel puțin un număr prim. (Postulatul lui Bertrand)

Fie p cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu n. Atunci $2p > n$ deoarece în caz contrar, adică $2p \leq n$, între p și $2p$ va exista cel puțin un număr prim mai mic sau egal cu n, care contrazice maximalitatea lui p.

Atunci expresia o scriem $A = \left(\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm .... \pm \frac{1}{p-1} \pm \frac{1}{p+1} \pm ... \pm \frac{1}{n}\right) \pm \frac{1}{p}$. Deoarece numitorii fracțiilor din paranteză nu sunt divizibili cu p atunci $\exists a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, (a,b)=1, (b,p)=1$ astfel încât $\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm .... \pm \frac{1}{p-1} \pm \frac{1}{p+1} \pm ... \pm \frac{1}{n} = \frac{a}{b}$ **5p**

Atunci $A = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{p} = \frac{ap \pm b}{bp}$.

Presupunem că $A = 0 \Leftrightarrow ap = \pm b \Leftrightarrow p \mid b$, care este fals deoarece $(b,p)=1$ **5p**

b. Fie $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|x_1 - 1| = 2|x_2 - x_1| = 3|x_3 - x_2| = ... = n|x_n - x_{n-1}| = (n+1)|1 - x_n| = k$$

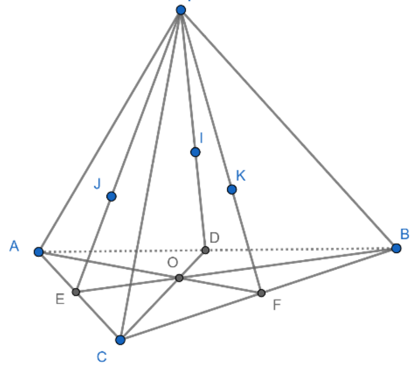
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x_1 - 1| = k \\ |x_2 - x_1| = \frac{1}{2}k \\ .... \\ |x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{n}k \\ |1 - x_n| = \frac{1}{n+1}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = \pm k \\ x_2 - x_1 = \pm \frac{1}{2}k \\ .... \\ x_n - x_{n-1} = \pm \frac{1}{n}k \\ 1 - x_n = \pm \frac{1}{n+1}k \end{cases}$$ **10p**

Adunând membru cu membru aceste egalități se obține

$0 = k\underbrace{\left(\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm .... \pm \frac{1}{n+1}\right)}_{\neq 0} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$ **10p**

10. a. Fie $VI \cap AB = \{D\}, VJ \cap AC = \{E\}, VK \cap BC = \{F\}$, atunci $[VD, [VE, [VF$ sunt bisectoare deci $\frac{AD}{DB} = \frac{VA}{VB}, \frac{CE}{EA} = \frac{VC}{VA}$ și $\frac{BF}{FC} = \frac{VB}{VC}$

...**5p**



$$\Rightarrow \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{VA}{VB}\cdot\frac{VB}{VC}\cdot\frac{VC}{VA}=1 \overset{T,T,Ceva}{\Rightarrow}$$ dreptele AF, BE, CD sunt concurente în O, deci

$(VAK)\cap(VBJ)\cap(VCI)=VO \Leftrightarrow d=VO$ **5p**

b. Deoarece O este centrul de greutate al $\Delta ABC \Rightarrow D, E, F$ sunt mijloacele $[AB],[AC]$ respectiv $[BC]$..**5p**

deci VI, VJ, VK sunt mediane și bisectoare deci triunghiurile VAB, VAC, VBC sunt isoscele cu vârful în $V \Rightarrow VA=VB=VC$ **5p**