CONCURSUL „ARGUMENT”, Baia Mare, 19 noiembrie 2022
CLASA a VII-a

La problemele 1-8, scrieți pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) 1.Numărul natural n care satisfice egalitatea $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 7}+\frac{2^2}{7\cdot 15}+...+\frac{2^{n-1}}{(2^n-1)\cdot(2^{n+1}-1)}=\frac{2^{2022}-1}{2^{2023}-1}$ este :

a) 2023 b) 2021 c) 2022 d) 2024.

(5p) **2.** Numărul natural n care verifică egalitatea : $\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^{n+2}}=364\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)$ este:

a) 10 b) 9 c) 11 d) 8

(5p) **3.** În triunghiul ABC, $m(\hat{C})=2\cdot m(\hat{A})$ şi $AC=2\cdot BC$. Dacă $m(\hat{B})=\alpha\cdot m(\hat{A})$ atunci α este egal cu:

a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{5}{3}$

(5p) 4. Dacă numerele reale a,b,c verifică egalitatea $\sqrt{a^2-2a+5}+\sqrt{b^2-4b+5}+\sqrt{4c^2-4c+10}=6$ atunci produsul $a\cdot b\cdot c$ este :

a) 8 b) 1 c) 2 d) 3

(5p) **5.** Numărul real $a=\sqrt{2025-\frac{1+2+3+...+2023}{\sqrt{1+3+5+...+2023}}}$ aparține mulțimii:

a) $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ d) $\mathbb{N}$

(5p) **6.** Dacă $\sqrt{x,(y)+x,(z)}\in\mathbf{N}$ unde x,y,z sunt cifre nenule distincte, atunci suma acestora este :

a) 13 b) 14 c)15 d) 11

(5p) **7.** Fie $ABCD$ un paralelogram şi M mijlocul laturii AB. Dacă $DM\perp MC$ atunci valoarea raportului $\frac{AD}{AB}$ este egală cu:

a) 2 b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $\frac{1}{2}$

(5p) **8**. Cardinalul mulţimii $A=\left\{x\in\mathbf{Z},x\neq-1 \;\middle|\; \sqrt{\frac{3x-5}{x+1}}\in\mathbf{Z}\right\}$ este:

a) 5 b) 3 c) 2 d) 4

La problemele 9 şi 10 redactaţi rezolvările complete.

9. În exteriorul rombului $ABCD$ având centrul O, se construiesc pătratele $BCMN$ și $ADEF$ având centrele O_1, respectiv O_2.

(5p) a) Demonstrați că $NCEA$ este paralelogram.

(10p) b) Arătați că punctele O_1,O,O_2 sunt coliniare.

(10p) c) Determinați măsurile unghiurilor rombului știind că triunghiul OO_1C este isoscel cu $OC=OO_1$.

(25p) **10.** Demonstraţi că $\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022^k}\right)>\frac{1}{2}$ pentru orice $k\in\mathbf{N},k\geq 2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.

SUCCES!

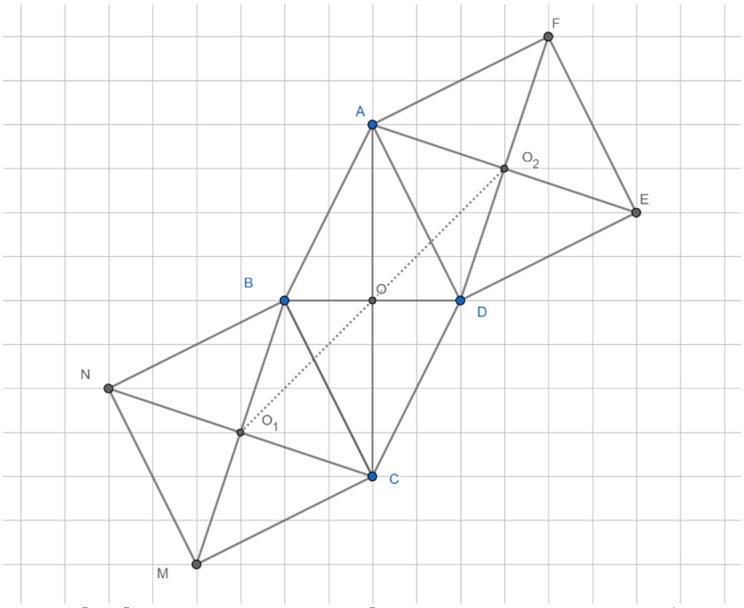
CONCURSUL „ARGUMENT”

19 noiembrie 2022

CLASA a VII-a

Soluţii

1	2	3	4	5	6	7	8
c	a	c	b	c	a	d	c



9. a) NC=AE (1) ; $\measuredangle NCA = 45° + \measuredangle BCA$, $\measuredangle EAC = 45° + \measuredangle DAC$ și $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ implică $\measuredangle NCA = \measuredangle EAC$ și deci NC∥AE (2).Din (1) și (2) rezultă NCEA este paralelogram.

b) OO_1 linie mijlocie în ΔACN rezultă $OO_1 \parallel AN$(3). OO_2 linie mijlocie în ΔACE rezultă

$OO_2 \parallel CE$ (4) .Din (3) ,(4) și $AN \parallel CE$ rezultă că O_1, O, O_2 sunt coliniare.

c) Triunghiul OO_1C este isoscel, cum $OO_1 \parallel AN$ rezultă căΔANC este isoscel și deci $\measuredangle ACN = \measuredangle ANC$. $\Delta ANB \equiv \Delta ACB \Rightarrow \measuredangle NAB = \measuredangle CAB$,notăm $m(\measuredangle CAB) = x \Rightarrow \measuredangle ACN = \measuredangle ANC = 45° + x$ și $\measuredangle NAC = 2x$. În triunghiul NAC avem $90° + 4x = 180° \Rightarrow x = 22°30'$. Deci unghiurile rombului sunt de $45°$, respectiv $135°$

10. Pentru orice $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$ avem $1-\frac{1}{2^k} \geq 1-\frac{1}{2^2} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$,

$$1-\frac{1}{3^k} \geq 1-\frac{1}{3^2} = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right), \ldots,$$

$$1-\frac{1}{2022^k} \geq 1-\frac{1}{2022^2} = \left(1-\frac{1}{2022}\right)\left(1+\frac{1}{2022}\right).$$

Prin înmulţirea acestor inegalităţi obţinem :

$$\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022^k}\right) \geq$$

$$\geq \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2022}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2022}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2022}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2023}{2022} =$$

$$= \frac{2023}{2\cdot 2022} > \frac{1}{2}$$