CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „ARGUMENT”

Baia Mare, 19 noiembrie 2022

CLASA a VI-a

La problemele 1-8, scrieţi pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Dacă $x=n^2-n+2$ este prim, atunci numărul valorilor naturale pe care le poate lua n este:

a) 0 b) 2 c) 8 d) 20

(5p) **2.** Dacă $a=64!$ și $b=2^{65}\cdot 5^{10}$, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este:

a) 2^{65} b) 5^{10} c) $2^{63}\cdot 5^{10}$ d) $2^{65}\cdot 5^{10}$

(5p) **3.** Fie a,b,c numere prime cu $a>b>c$ și $(a-c)(b-c)=65$. Valoarea maximă a sumei $S=a+b+c$ este:

a) 72 b) 75 c) 130 d) 15

(5p) **4.** Dacă numărul natural n are exact patru divizori naturali, iar produsul acestora este 3025, atunci suma cifrelor lui n este:

a) 10 b) 20 c) 40 d) 25

(5p) **5.** Fie $n=2^x\cdot 3^y$; $m=5^x\cdot 3^z$, $x,y,z\in\mathbb{N}^*$. Dacă n are 15 divizori, iar m are 12 divizori naturali, atunci numărul divizorilor naturali ai lui $m\cdot n$ este:

a) 27 b) 180 c) 96 d) 72

(5p) **6.** Dacă a este produsul primelor 2022 numere impare iar b este produsul primelor 2022 numere prime, atunci ultima cifră a numărului $2023^{a\cdot b}$ este:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 9

(5p) **7.** Fie $A_1, A_2, A_3.A_4, A_5$ puncte pe o dreaptă d, în această ordine, cu $A_1A_2=1,\ A_2A_3=2,\ A_3A_4=3,\ A_4A_5=4$. Dacă M este mijlocul segmentului (A_2A_3) iar N este mijlocul lui (A_4A_5), atunci lungimea segmentului (MN) este:

a) 5 b) 6 c) 10 d) 4

(5p) **8.** Se consideră punctele coliniare A,O,B, în această ordine. În acelasi semiplan determinat de dreapta AB, se duc semidreptele $[OC$ și $[OD$ cu $m(\sphericalangle COD)=80^\circ$. Dacă $[OC$ este în interiorul unghiului $\sphericalangle AOD$, atunci măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle DOB$ este:

a) 100° b) 130° c) 50° d) 120°

La problemele 9 şi 10 redactaţi rezolvările complete.

9. Fie a un număr natural par, nenul. Notăm cu $S_i(a)$ suma divizorilor impari ai lui a și cu $S_p(a)$ suma divizorilor săi pari.

(10p) a) Calculați $S_i(72)$ și $S_p(72)$;

(15p) b) Arătați că $S_i(a)$ divide $S_p(a)$.

10. Fie $n\in N, n\geq 5$, $[OA_1$ bisectoarea unghiului propriu $\sphericalangle AOB$, $[OA_2$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_1OB$, $[OA_3$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_2OB,\ldots,$ $[OA_n$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_{n-1}OB$.

Dacă $m(\sphericalangle A_3OA_5)=12^\circ$, aflați:

(15p) a) măsura unghiului $\sphericalangle AOB$;

(10p) b) valoarea maximă a lui n, astfel ca $m(\sphericalangle A_nOB)$ să fie număr natural nenul.

Notă: Timpul de lucru este 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Succes!

Barem

1. $x=n(n-1)+2=par\Rightarrow n\in\{0,1\}$... (b)
2. $a=2^{63}\cdot 5^{14}\cdot c;\ b=2^{65}\cdot 5^{10}\Rightarrow (a,b)=2^{63}\cdot 5^{10}$...$(c)$
3. $c=2;(a-2)(b-2)=1\cdot 5\cdot 13\Rightarrow \begin{cases}a=67\\ b=3\end{cases}\Rightarrow S=72;\begin{cases}a=15\\ b=7\end{cases}\Rightarrow S=24$ .... (a)
4. $n=p^3\ (F);\quad n=p\cdot q\Rightarrow 1\cdot p\cdot q\cdot (pq)=55^2\Rightarrow n=pq=55$................................ (a)
5. $\begin{cases}(x+1)(y+1)=15\\ (x+1)(z+1)=12\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=4\Rightarrow mn=2^2 3^7 5^2\Rightarrow 3\cdot 8\cdot 3=72\ divizori\\ z=3\end{cases}$.......................$(d)$
6. $a=2k+1;\quad b=2(2l+1)\Rightarrow a\cdot b=4t+2\Rightarrow u\left(3^{4t+2}\right)=9$..................................... (d)
7. $A_1M=\dfrac{A_1A_2+A_1A_3}{2}=2,\quad A_1N=8\Rightarrow MN=A_1N-A_1M=8-2=6$...................... (b)
8. $2x+80^\circ+2y=180\Rightarrow x+y=50\Rightarrow x+80^\circ.+y=130$.. (b)

1	2	3	4	5	6	7	8
b	c	a	a	d	d	b	b

9. a) $S_i(72)=1+3+9=13;\quad S_p(72)=2(1+3+9)+2^2(1+3+9)+2^3(1+3+9)=13\cdot 14=182$.

b) $a=2^m\cdot b,\quad b=$impar. Dacă d este un divizor impar al lui a atunci d/b. Fie

$S_i(a)=d_1+d_2+\cdots+d_k$. Atunci

$$\begin{aligned}S_p(a)=&\,2d_1+2d_2+\cdots+\ 2d_k+\\ &2^2d_1+2^2d_2+\cdots+2^2d_k+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &2^{2m}d_1+2^{2m}d_2+\cdots 2^n d_k.\end{aligned}$$

Obținem: $S_p(a)=\left(2+2^2+\cdots 2^m\right)S_i(a)$.

10. a) Fie $a=m(\angle AOB)$. Atunci $m(\angle A_1OB)=\dfrac{a}{2};m(\angle A_2OB)=\dfrac{a}{2^2};\cdots,m(\angle A_nOB)=\dfrac{a}{2^n}$.

$12^\circ=m(\angle A_3OA_5)=m(\angle A_3OB)-m(\angle A_5OB)=\dfrac{a}{2^3}-\dfrac{a}{2^5}=\dfrac{3a}{32};\Rightarrow a=128^\circ$.

b) $\dfrac{128}{2^n}=k\in N^\bullet\Rightarrow 2^n=\dfrac{128}{k}=$maxim; $\Rightarrow k=1, n=7$.