TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a IX-a

1. a. Demonstrați că $\frac{x}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}} \geq \frac{2x}{2x+y+z}$, $x,y,z>0$.

b. Să se determine partea întreagă a numărului

$$E=\frac{x}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)\cdot(y+x)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)\cdot(z+y)}},\quad x,y,z>0.$$

2. Fie $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât ecuația $x^2-\left(a^2+b^2+c^2+d^2+1\right)x+ab+bc+cd+da=0$ are o soluție număr întreg.
a. Arătați că și cealaltă soluție a ecuației este număr întreg.
b. Demonstrați că cele două soluții ale ecuației sunt pătrate perfecte.

3. a. Fie $MNPQ$ un paralelogram și punctele $A,B \in MN, C,D \in NP$ în ordinea A,M,N,B și respectiv C,N,P,D, astfel încât $[MA] \equiv [MB]$ și $[CP] \equiv [PD]$. Arătați că

$$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=2\cdot\overrightarrow{NQ}.$$

b. Fie P un punct în interiorul triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$ de centru O. Notăm cu P_1,P_2,P_3 proiecțiile punctului P pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$. Arătați că: $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}=\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{PO}$.

***Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la** 7.*
Timp de lucru: 2 ore