TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a XI-a

1. a. Să se arate că ecuația $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{R})$.

b. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ și $AB - BA = A$, arătați că $A^2 = O_2$.

2. Fie șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ definit prin $u_1 = \sqrt{7}$, $u_2 = \sqrt{7-\sqrt{7}}$ și $u_{n+2} = \sqrt{7-\sqrt{7+u_n}}, \forall n \geq 1$

- **a.** Arătați că $u_n \leq \sqrt{7}, \forall n \geq 1$.
- **b.** Arătați că șirul nu este monoton.
- **c.** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Pentru un n-uplu $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de numere reale strict pozitive, distincte două câte două, numim *bloc* orice segment $[A_k B_k]$ determinat de punctele $A_k(k, 0)$ și $B_k(k, a_k)$, unde $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Spunem că un bloc $[A_p B_p]$ este vizibil de pe un bloc $[A_k B_k]$ dacă $a_k > a_p$ și dacă $[B_k B_p]$ este disjunct de toate blocurile $[A_i B_i]$, unde $i \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{k, p\}$. Notăm cu b_k numărul de blocuri vizibile de pe blocul $[A_k B_k]$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Determinați în funcție de n cea mai mare valoare pe care o poate lua suma $s_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$.

***Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la** 7.*
Timp de lucru: 2 ore