

TABĂRA JUDEȚEANĂ _CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a X-a

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ și $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $\varepsilon^3 = 1$. Arătați că dacă $|a + b\varepsilon + c\varepsilon^2| \leq |a|$, atunci ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are cel puțin o soluție de modul cel mult egal cu 2.

2. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} 2^{x^2} + \log_2 x = 2^y \\ 2^{y^2} + \log_2 y = 2^z \\ 2^{z^2} + \log_2 z = 2^x \end{cases}$$

3. Să se decidă dacă există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ f)(x) = \begin{cases} \pi; & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 1; & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și dacă există funcții $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $(g \circ g)(x) = \begin{cases} 1; & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ \pi; & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

*Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore*