TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a IX-a

1. a. Demonstrați că $\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}} \geq \dfrac{2x}{2x+y+z}$, $x,y,z>0$.

b. Să se determine partea întreagă a numărului

$$E=\frac{x}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)\cdot(y+x)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)\cdot(z+y)}},\quad x,y,z>0.$$

Soluție:

a. Utilizând $\dfrac{1}{\sqrt{a\cdot b}} \geq \dfrac{2}{a+b}, \forall a,b>0$ obţinem

$\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}} \geq \dfrac{2x}{2x+y+z}$ **2p**

b. Din **a.** rezultă $\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}} \geq \dfrac{2x}{2x+y+z} > \dfrac{2x}{2x+2y+2z}$

Scriind relaţiile analoage şi însumându-le se obţine E > 1……...............……..………..…**2p**

$$E=\sqrt{\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x}{x+z}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}\cdot\frac{y}{y+x}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}\cdot\frac{z}{z+y}} \leq$$

$\leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x}{x+z}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{y}{y+x}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{z+x}+\dfrac{z}{z+y}\right)=\dfrac{3}{2}$ **2p**

Deci $1<E\leq\dfrac{3}{2} \Rightarrow [E]=1$ **1p**

2. Fie $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât ecuația $x^2-\left(a^2+b^2+c^2+d^2+1\right)x+ab+bc+cd+da=0$ are o soluție număr întreg.

a. Arătați că și cealaltă soluție a ecuației este număr întreg.

b. Demonstrați că cele două soluții ale ecuației sunt pătrate perfecte.

Soluție:

a. $x_1+x_2=a^2+b^2+c^2+d^2+1 \in \mathbb{N}, x_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_2 \in \mathbb{Z}$ **2p**

$x_1,x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Delta=\left(a^2+b^2+c^2+d^2+1\right)^2-4(ab+bc+cd+da)=k^2, k\in\mathbb{N}$

$\Delta<\left(a^2+b^2+c^2+d^2+1\right)^2$

$\Delta \geq \left(a^2+b^2+c^2+d^2-1\right)^2 \Leftrightarrow$

$\left(a^2+b^2+c^2+d^2+1\right)^2-\left(a^2+b^2+c^2+d^2-1\right)^2 \geq 4\left(ab+bc+cd+da\right) \Leftrightarrow$

$4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \geq 4\left(ab+bc+cd+da\right) \Leftrightarrow$

$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-d\right)^2+\left(d-a\right)^2 \geq 0$, adevărat **(*)**

Deci $\left(a^2+b^2+c^2+d^2-1\right)^2 \leq \Delta < \left(a^2+b^2+c^2+d^2+1\right)^2$ **3p**

Δ și $a^2+b^2+c^2+d^2+1$ au aceeași paritate $\Rightarrow \Delta = \left(a^2+b^2+c^2+d^2-1\right)^2$ **1p**

Avem egalitate în (*) deci $a=b=c=d \Rightarrow \Delta = (4a^2-1)^2 \Rightarrow x_1 = 4a^2, x_2 = 1$, care sunt pătrate perfecte..**1p**

3.

a. Fie $MNPQ$ un paralelogram și punctele $A, B \in MN, C, D \in NP$ în ordinea A, M, N, B și respectiv C, N, P, D, astfel încât $[MA] \equiv [MB]$ și $[CP] \equiv [PD]$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND} = 2 \cdot \overrightarrow{NQ}.$$

b. Fie P un punct în interiorul triunghiului echilateral $A_1A_2A_3$ de centru O. Notăm cu P_1, P_2, P_3 proiecțiile punctului P pe laturile triunghiului $A_1A_2A_3$. Arătați că: $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PO}$.

Soluţie:

a. Fie $X \in (MNPQ)$. Cum M și P sunt mijloacele lui AB și CD $\Rightarrow$

$\overrightarrow{XP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}\right), \overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})$..**1p**

Luăm $X \equiv N$ $\Rightarrow \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right), \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right) \Rightarrow 2\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{NM}\right) = \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND} = 2\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}\right) = 2\overrightarrow{NQ}$ **1p**

b. Ducem prin P paralele la laturile triunghiului şi notăm intersecţiile paralelelor cu laturile A_2A_3 A_1A_3, respectiv A_1A_2 cu M, Q, N, T, respectiv S, R. Avem că PP_1 mediană în triunghiul echilateral $PMQ \Rightarrow \overrightarrow{PP_1} = \frac{\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PQ}}{2}$. Analog $\overrightarrow{PP_2} = \frac{\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PT}}{2}$, $\overrightarrow{PP_3} = \frac{\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}}{2}$. **3p**

$2\left(\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}\right) = \left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PT}\right)+\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PR}\right)+\left(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PM}\right) = \overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_2} = 3\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{0}$ $\Rightarrow$ concluzia......................................**2p**