TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a VIII-a
BAREM

1. a. Calculați $\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

b Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{\{x\}^2+2}-\{x\}\right)=2$.

Soluție: **a.** $\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=x^2+2-x^2=2$. **1p**

Notăm $\{x\}=r$, cu $0\le r<1$. Ecuația se rescrie $\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{r^2+2}-r\right)=2$. (1)

Înmulțind (1) cu $\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)$, obținem $\sqrt{r^2+2}-r=\sqrt{x^2+2}+x$ (2) **1p**

și înmulțind (1) cu $\left(\sqrt{r^2+2}+r\right)$, rezultă $\sqrt{r^2+2}+r=\sqrt{x^2+2}-x$ (3). **1p**

Scăzând din (2) egalitatea (3), deducem că $x=-r$, așadar $2r=-[x]\in\mathbb{Z}$. **2p**

Deoarece $0\le 2r<2$, rezultă că $r=0$ sau $r=\frac{1}{2}$. **1p**

Obținem soluțiile $x=0$ și $x=-\frac{1}{2}$. **1p**

2. a. Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive x și y are loc inegalitatea $\frac{4}{x+y}-\frac{1}{xy}\le 1$.

b. Dacă numerele reale strict pozitive a, b și c sunt astfel încât $a+b+c=3$, arătați că

$$\frac{a+1}{b+c}+\frac{b+1}{c+a}+\frac{c+1}{a+b}\le\frac{3}{abc}.$$

Soluție: **a.** Inegalitatea se rescrie: $\frac{4}{x+y}\le\frac{xy+1}{xy}\Leftrightarrow\frac{x+y}{2}\ge\frac{2xy}{xy+1}$.

Dar $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ (1)

Demonstrăm că $\sqrt{xy}\ge\frac{2xy}{xy+1}$ (2) **1p**

Deoarece $xy>0$, $(2)\Leftrightarrow 1\ge\frac{2\sqrt{xy}}{xy+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy}-1\right)^2\ge 0$, deci inegalitatea (2) este adevărată.

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{x+y}{2}\ge\frac{2xy}{xy+1}$, așadar $\frac{4}{x+y}-\frac{1}{xy}\le 1$. **2p**

b. $\frac{a+1}{b+c}=\frac{3-b-c+1}{b+c}=\frac{4}{b+c}-1\overset{\text{a.}}{\le}\frac{1}{bc}$. Analog rezultă că $\frac{b+1}{c+a}\le\frac{1}{ca}$ și $\frac{c+1}{a+b}\le\frac{1}{ab}$. **2p**

Adunând membru cu membru ultimele trei inegalități, rezultă:

$$\frac{a+1}{b+c}+\frac{b+1}{c+a}+\frac{c+1}{a+b}\le\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{3}{abc}.$$

3. **a.** Fie *ABC* un triunghi echilateral și *P* un punct din interiorul său. Arătați că $PA+PB+PC<2AB$.

b. Fie *P* un punct în interiorul unui tetraedru regulat *ABCD* cu latura de 1 cm.
Arătați că $PA+PB+PC+PD<3$.

Soluție: **a.** Fie $B'\in AB$ și $C'\in AC$, astfel încât $P\in B'C'\,||\,BC$. Obținem că $AB'=AC'=B'C'\overset{\text{not.}}{=}x$. **1p**

Avem: $PA+PB+PC<PA+\left(PB'+BB'\right)+\left(PC'+CC'\right)=PA+B'C'+BB'+CC'=PA+x+2\left(AB-x\right)<2AB$,
deoarece $PA<\max\left(AB',AC'\right)=x$. **2p**

b. Fie $B'\in AB$, $C'\in AC$ și $D'\in AD$, astfel încât $P\in\left(B'C'D'\right)||\left(BCD\right)$. Deoarece tetraedrul *ABCD* este regulat, obținem $AB'=AC'=AD'=B'C'=C'D'=D'A'\overset{\text{not.}}{=}x$. Rezultă:

$PA+PB+PC+PD<PA+\left(PB'+BB'\right)+\left(PC'+CC'\right)+\left(PD'+DD'\right)=PA+\left(PB'+PC'+PD'\right)+3\left(1-x\right)$. (1)
.... **2p**

Aplicând punctul **a** în triunghiul echilateral $B'C'D'$, obținem $PB'+PC'+PD'<2x$ (2) **1p**

Din (1) și (2) obținem $PA+PB+PC+PD<PA+2x+3-3x=3+\left(PA-x\right)<3$,
deoarece $PA<\max\left(AB',AC',AD'\right)=x$. **1p**