TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022

Clasa a VII-a
<u>BAREM</u>

1. Se consideră numerele naturale $a = 3n + 7, b = 2n + 5, c = n + 2, n \in \mathbb{N}$. Stabiliți dacă numărul $\sqrt{[a,b] + [a,c]}$ este număr rațional sau irațional, notația $[x,y]$ reprezentând cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y.

Soluție:
Demonstrarea că a, b respectiv a, c sunt prime între ele **3p**
$\Rightarrow [a,b] = a \cdot b$ și $[a,c] = a \cdot c$ **2p**
$\sqrt{[a,b] + [a,c]}=\sqrt{a \cdot b + a \cdot c} = \sqrt{a(b+c)} =$
$\sqrt{(3n+7)(2n+5+n+2)} = \sqrt{(3n+7)^2} = 3n+7$ rațional **2p**

2. Numerele întregi se colorează în n culori astfel încât dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ și $|x - y| \in \{2, 3, 5\}$, atunci x și y au culori diferite. Să se arate că $n \geq 4$.

Soluție:
Presupunem că $n \leq 3$. Dacă considerăm numerele 0,2,3,5 atunci cum $|0-2|$, $|0-3|$, $|0-5| \in \{2,3,5\}$ rezultă că 0,2 și 5 au culori distincte două câte două, deci n = 3 și numerele 2 și 3 au aceeași culoare. **3p**
În această situație dacă considerăm numerele 1, 3, 4, 6 atunci 3 și 4 au aceeași culoare și 2 și 4 au aceeași culoare. Dar $|2-4| = 2 \in \{2,3,5\}$ contradicție. **4p**

3. Fie ABCD paralelogram, $M \in (AC)$, astfel încât $AC = 3 \cdot AM$.
a. Arătați că M este centrul de greutate al triunghiului ABD.
b. Dacă $AC \cap BD = \{O\}, DM \cap BC = \{N\}$ și $AB \cap NO = \{P\}$, aflați valoarea raportului $\frac{OP}{PN}$.

Soluție:
a. O centrul paralelogramului$\Rightarrow$ AO mediana **1p**
Cum $AO = \frac{AC}{2}$ și $AC = 3AM$ $\Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow M$ este centru de greutate al ΔABD **2p**
b. Fie $\{Q\} = DM \cap AB \Rightarrow Q$ mijlocul lui $AB, \Delta AQD \equiv \Delta BQN (U.L.U.) \Rightarrow AD$ =BN, de unde BN=BC **2p**
În $\Delta ACN, AB$ și NO sunt mediane și ele sunt concurente în punctul P,
deci P este centrul de greutate al ΔACN și $\frac{OP}{PN} = \frac{1}{2}$ **2p**