TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a VI-a
<u>BAREM</u>

1. a. Aflați cel mai mic număr scris în baza 10 de forma $\overline{4321xy}$ divizibil cu 45.
b. Aflați în câte zerouri se termină produsul primelor 1000 de numere naturale nenule.

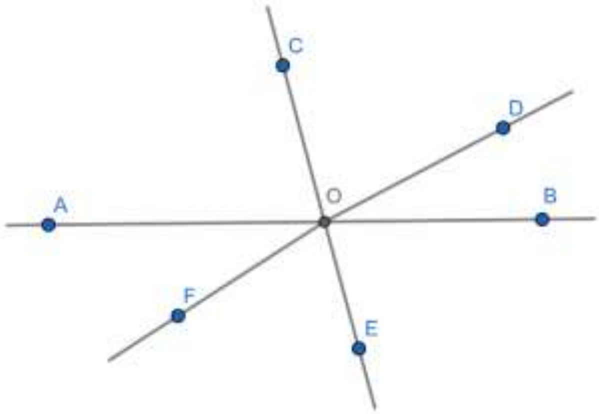
Soluție :
a. $\overline{4321xy} \vdots 45,\ 45 = 5 \cdot 9, (5,9) = 1 \Rightarrow \overline{4321xy} \vdots 5$ *și* $\overline{4321xy} \vdots 9$ **2p**
$\overline{4321xy} \vdots 5 \Rightarrow y = 0\ sau\ y = 5$ **1p**
Pentru $y = 0$ *și* $\overline{4321x0} \vdots 9 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow 432180$
Pentru $y = 5$ *și* $\overline{4321x5} \vdots 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 432135$ care este cel mai mic...................................**1p**
b. Numărul de zerouri de la sfârșitul unui produs este dat de "de câte ori e 10 multiplicat"
10 = 5 x 2. Deci, trebuie să știm numărul de perechi de 5 si 2. Vor fi mai multe numere care îl conțin pe 2 decât pe 5, așa că numărăm numerele care îl conțin pe 5……………………..……**1p**
Numerele care sunt multiplii de 5: $5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \ldots, 5 \cdot 200 \Rightarrow 200$ de factori
Dar în toate numerele care sunt multiplii de 25 mai există un factor de 5. Acestea sunt :
$25 \cdot 1, 25 \cdot 2, 25 \cdot 3, \ldots, 25 \cdot 40 \Rightarrow 40$ de factori ……………………………………………**1p**
În toate numerele care sunt multiplii de 125 mai există un factor de 5. Acestea sunt :
$125 \cdot 1, 125 \cdot 2, 125 \cdot 3, \ldots, 125 \cdot 8 \Rightarrow 8$ factori
La fel, în 625 mai există un factor de 5.
În total avem $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ de factori de 5, deci 249 de zerouri. …………………**1p**

2. Aflați $x \in \mathbb{Q}$ din proporția $\frac{a}{x} = \frac{4^{993}}{0,25}$, unde $a = 2^{2000} - 2^{1999} - 2^{1998}$.

Soluție : $a = 2^{2000} - 2^{1999} - 2^{1998} = 2^{1998}(2^2 - 2 - 1) = 2^{1998}$ **3p**
$x = 2^{1998} \cdot \frac{1}{4} : 4^{993} = 2^{1996} : 2^{1986} \Rightarrow x = 2^{10} = 1024$ **4p**

3. Se consideră punctele A, O, B astfel încât $O \in (AB)$ și două semidrepte $(OC$ și $(OD$ de aceeași parte a dreptei *AB*, $(OC \subset Int(\sphericalangle AOD)$. De cealaltă parte a dreptei *AB* se construiesc semidreptele $(OE$ și $(OF$ astfel încât $\sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COD$ și
$\sphericalangle EOF \equiv \sphericalangle AOC$ și $E \in Int(\sphericalangle BOF)$.
a. Demonstrați că $(OD$ și $(OF$ sunt semidrepte opuse.
b. Demonstrați că semidreptele $(OC$ și $(OE$ sunt opuse dacă și numai dacă $(OC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$.

Soluție :



a. Fie $\sphericalangle BOE = \sphericalangle COD = a^{\circ}$ și $\sphericalangle EOF = \sphericalangle AOC = x^{\circ}$

Atunci $m(\sphericalangle BOD) = 180^{\circ} - x^{\circ} - a^{\circ}$ $și$ $m(\sphericalangle AOF) = 180^{\circ} - x^{\circ} - a^{\circ}$ **2p**

Cum *A*-*O*-*B* coliniare, rezultă *F*-*O*-*D* coliniare. **1p**

b. ” ⇒ ” Dacă $x = a$ și *F*-*O*-*D* coliniare , din a) rezultă *C*-*O*-*E* coliniare **2p**

” ⇐ ” Din *F*-*O*-*D* coliniare și *C*-*O*-*E* coliniare rezultă $x = a$, deci $(OC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$. ……………...…………………………………………………………………………...**2p**