TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a XII-a

BAREM

1. Într-un grup $(G,*)$, pentru $x \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$ vom nota $x^n = \underbrace{x * x * ... * x}_{de\ n\ ori}$.

Arătați că dacă $a, b, c \in G$ astfel încât $a^3 * b^3 = c^3$, $a^4 * b^4 = c^4$ și $a^5 * b^5 = c^5$, atunci $a * b = b * a = c$.

Soluție:

$a^4 * b^4 = c^4 \Rightarrow a^4 * b^4 = c^3 * c \Rightarrow \cancel{a^3} * a * b^4 = \cancel{a^3} * b^3 * c \Rightarrow a * b^4 = b^3 * c$.(1)

$a^5 * b^5 = c^5 \Rightarrow a^5 * b^5 = c^4 * c \Rightarrow \cancel{a^4} * a * b^5 = \cancel{a^4} * b^4 * c \Rightarrow a * b^5 = b^4 * c$. (2)...........**2p**

Relația (2) se mai poate scrie $a * b^5 = b * b^3 * c$ și ținând seama de relația (1), obținem $a * b^5 = b * a * b^4$. Simplificând, la stânga, cu b^4, rezultă $a * b = b * a$ **2p**

Deoarece *a* și *b* comută, din $a^3 * b^3 = c^3$, deducem $(a * b)^3 = c^3$ și din $a^4 * b^4 = c^4$, deducem $(a * b)^4 = c^4$ **2p**

Atunci $(a * b)^4 = c^4 \Rightarrow (a * b)^4 = c^3 * c \Rightarrow (a * b)^4 = (a * b)^3 * c \Rightarrow a * b = c$. **1p**

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă. Demonstrați că pentru orice primitivă F a lui f, există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(c) - F^2(c) < 1$.

Soluție:

Presupunem contrariul $\Rightarrow f(x) - F^2(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq F^2(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

$\Rightarrow \dfrac{F'(x)}{F^2(x)+1} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (arctgF(x))' \geq x', \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

$\Rightarrow h(x) = arctgF(x) - x$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ **2p**

$h(x) \geq h(0), \forall x \geq 0 \Rightarrow arctgF(x) - x \geq arctgF(0), \forall x \geq 0$

$x \leq arctgF(x) - arctgF(0), \forall x \geq 0 \Rightarrow x \leq \pi, \forall x \geq 0$, contradicție...............................**2p**

3. **a.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Arătați că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, atunci $\left(x^n \cdot F(x)\right)' = x^{n-2} \cdot \left(n \cdot x \cdot F(x) + x^2 \cdot f(x)\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. Determinați funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ care admit o primitivă $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ și pentru care $4x\cdot F(x)+x^2\cdot f(x)=3f\left(x^3\right),\ \forall x>0$.

Soluție:
a. Evident...**2p**
b. Înmulțind egalitatea cu x^2, obținem $x^2\cdot\left(4x\cdot F(x)+x^2\cdot f(x)\right)=3x^2\cdot f\left(x^3\right),\ \forall x>0$ și ținând seama de punctul **a.**, $\left(x^4\cdot F(x)\right)'=\left(F\left(x^3\right)\right)'$. **1p**

Rezultă că există $c\in\mathbb{R}$, astfel încât $x^4\cdot F(x)=F\left(x^3\right)+c,\ \forall x\in(0,\infty)$.

Luând $x=1$, obținem $c=0$. Așadar, $x^4\cdot F(x)=F\left(x^3\right),\ \forall x>0$. **1p**

Are loc $\dfrac{F(x)}{x^2}=\dfrac{F\left(x^3\right)}{x^6}$.

Considerăm funcția $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\dfrac{F(x)}{x^2}$, egalitatea anterioară se scrie $\varphi(x)=\varphi\left(x^3\right)$. Atribuindu-i lui *x* valoarea $\sqrt[3]{x}$, obținem $\varphi\left(\sqrt[3]{x}\right)=\varphi(x),\ \forall x>0$. Iterativ, rezultă $\varphi(x)=\varphi\left(\sqrt[3]{x}\right)=\varphi\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}\right)=\ldots$, adică $\varphi(x)=\varphi\left(\sqrt[3^n]{x}\right),\ \forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Funcția φ fiind evident continuă, prin trecere la limită după $n\to\infty$, obținem:

pentru $x>0$, $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi\left(\sqrt[3^n]{x}\right)=\varphi\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3^n]{x}\right)=\varphi\left(\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{3^n}}\right)=\varphi\left(x^0\right)=\varphi(1)\overset{not}{=}\alpha$ **2p**

Obținem că $F(x)=\alpha\cdot x^2, x>0$. Se arată ușor că *F* este derivabilă și $f(x)=F'(x)=2\alpha x,\ \text{pentru}\ x>0$ **1p**