TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022

Clasa a XI-a
<u>BAREM</u>

1. a. Să se arate că ecuația $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{R})$.

b. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ și $AB-BA=A$, arătați că $A^2=O_2$.

Soluție. a. Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, atunci

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}a+b & -a-b\\ c+d & -c-d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ a-c & b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+c & d-a-2b\\ 2c+d-a & -b-c\end{pmatrix}$$

Deci avem $\begin{cases}b+c=1\\ d-a-2b=-1\\ 2c+d-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1-b\\ d=a+2b-1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & b\\ 1-b & a+2b-1\end{pmatrix},a,b\in\mathbb{R}$. **3p**

b. Din $AB-BA=A\Rightarrow tr(A)=tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=0$. **1p**

Dar $\left.\begin{array}{l}A^2=A^2B-ABA\\ A^2=ABA-BA^2\end{array}\right|\Rightarrow 2A^2=A^2B-BA^2\Rightarrow tr\left(2A^2\right)=tr\left(A^2B-BA^2\right)$

$\Rightarrow 2tr\left(A^2\right)=tr\left(A^2B\right)-tr\left(BA^2\right)\Rightarrow tr\left(A^2\right)=0$.

Deoarece $tr(A)=0\Rightarrow A^2+\det(A)I_2=O_2\Rightarrow A^2=-\det(A)I_2\Rightarrow tr\left(A^2\right)=-2\det(A)$

$\Rightarrow\det(A)=0\Rightarrow A^2=O_2$. **3p**

2. Fie șirul $(u_n)_{n\geq1}$ definit prin $u_1=\sqrt{7}$, $u_2=\sqrt{7-\sqrt{7}}$ și $u_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+u_n}},\forall n\geq1$

- **a.** Arătați că $u_n\leq\sqrt{7},\forall n\geq1$.
- **b.** Arătați că șirul nu este monoton.
- **c.** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

Soluție. **a.** $u_1=\sqrt{7}\leq\sqrt{7},u_2=\sqrt{7-\sqrt{7}}\leq\sqrt{7}$ iar pentru $n\geq1$, avem că

$u_{n+2}=\sqrt{7-\underbrace{\sqrt{7+u_n}}_{\geq0}}\leq\sqrt{7}$.. **1p**

b. Avem că $u_1>u_2$, $u_3=\sqrt{7-\sqrt{7+u_1}}=\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}\Rightarrow u_2>u_3$.

$u_4=\sqrt{7-\sqrt{7+u_2}}=\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}>\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}=u_3$, deci

$u_1>u_2>u_3<u_4$, deci șirul nu este monoton.. **2p**

c. Pentru orice $n\geq 1$, avem $|u_{n+2}-2|=\left|\sqrt{7-\sqrt{7+u_n}}-2\right|=\dfrac{\left|3-\sqrt{7+u_n}\right|}{\sqrt{7-\sqrt{7+u_n}}+2}$

$=\dfrac{|2-u_n|}{\left(\sqrt{7-\sqrt{7+u_n}}+2\right)\left(3+\sqrt{7+u_n}\right)}\leq\dfrac{|u_n-2|}{6}$ **2p**

Atunci pentru $n=2k, k\in\mathbb{N}^*$, avem că $|u_{2k+2}-2|\leq\dfrac{|u_2-2|}{6^k}\xrightarrow{k\to\infty}0\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+2}=2$,

iar pentru $n=2k+1, k\in\mathbb{N}\Rightarrow|u_{2k+1}-2|<\dfrac{|u_1-2|}{6^k}\xrightarrow{k\to\infty}0\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=2$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$. **2p**

3. Fie $n\geq 2$ un număr natural. Pentru un n-uplu $(a_1,a_2,...,a_n)$ de numere reale strict pozitive, distincte două câte două, numim *bloc* orice segment $[A_kB_k]$ determinat de punctele $A_k(k,0)$ și $B_k(k,a_k)$, unde $k\in\{1,2,3,...,n\}$. Spunem că un bloc $[A_pB_p]$ este vizibil de pe un bloc $[A_kB_k]$ dacă $a_k>a_p$ și dacă $[B_kB_p]$ este disjunct de toate blocurile $[A_iB_i]$, unde $i\in\{1,2,...,n\}\setminus\{k,p\}$. Notăm cu b_k numărul de blocuri vizibile de pe blocul $[A_kB_k]$, pentru orice $k\in\{1,2,...,n\}$. Determinați în funcție de n cea mai mare valoare pe care o poate lua suma $s_n=b_1+b_2+...+b_n$.

Cristian Săvescu

Soluție:

Pentru orice $k,p\in\{1,2,...,n\}$ cu $k\neq p$, dacă blocul $[A_kB_k]$ este vizibil de pe $[A_pB_p]$, atunci $[A_pB_p]$ nu este vizibil de pe $[A_kB_k]$. Atunci s_n nu poate fi mai mare decât numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,...,n\}$, adică $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$. **4p**

Pentru $a_k=2^k$ avem că condițiile din problemă sunt îndeplinite și

$s_n=(n-1)+(n-2)+...+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$, deci maximul lui s_n este $\dfrac{n(n-1)}{2}$ **3p**