TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a X-a

<u>BAREM</u>

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ și $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $\varepsilon^3 = 1$. Arătați că dacă $|a + b\varepsilon + c\varepsilon^2| \leq |a|$, atunci ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are cel puțin o soluție de modul cel mult egal cu 2.
Soluție:

$\left\|1 + \frac{b}{a}\varepsilon + \frac{c}{a}\varepsilon^2\right\| \leq 1$	**1 punct**
$\|1 - (z_1 + z_2)\varepsilon + z_1 z_2 \varepsilon^2\| \leq 1$	**1 punct**
$\|(1 - z_1\varepsilon) - \varepsilon z_2(1 - z_1\varepsilon)\| \leq 1$	**0,5 puncte**
$\|1 - z_1\varepsilon\| \cdot \|1 - z_2\varepsilon\| \leq 1$	**0,5 puncte**
fie $\|1 - z_1\varepsilon\| \leq 1$	**1 punct**
$\|\varepsilon^3 - z_1\varepsilon\| \leq 1$	**0,5 puncte**
$\|\varepsilon\| \cdot \|\varepsilon^2 - z_1\| \leq 1$	**0,5 puncte**
$\|\varepsilon^2 - z_1\| \leq 1$	**1 punct**
$\|z_1\| = \|z_1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2\| \leq \|z_1 - \varepsilon^2\| + \|\varepsilon^2\| \leq 1 + 1 = 2$	**1 punct**

2. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} 2^{x^2} + \log_2 x = 2^y \\ 2^{y^2} + \log_2 y = 2^z \\ 2^{z^2} + \log_2 z = 2^x \end{cases}$$

Soluție:

$x > 0, y > 0, z > 0$	**1 punct**
Pentru $0 < x \leq y$, $=2^{x^2} + \log_2 x \leq 2^{y^2} + \log_2 y \Longrightarrow 2^y \leq 2^z \Longrightarrow y \leq z$	**1 punct**
$x = y = z$	**0,5 puncte**
$2^{x^2} + \log_2 x = 2^x$	**0,5 puncte**
$2^{x^2} + \log_2 x^2 = 2^x + \log_2 x$	**1 punct**
Fie funcția strict crescătoare $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = 2^x + \log_2 x$	**1 punct**
$f(x^2) = f(x) \Longrightarrow x^2 = x \Longrightarrow x = 1$	**1 punct**
$(x, y, z) = (1,1,1)$	**1 punct**

3. Să se decidă dacă există funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ f)(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \pi\, ; dacă\ x \in \mathbb{Q} \\ 1\, ; dacă\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și dacă există funcții $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $(g \circ g)(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1\, ; dacă\ x \in \mathbb{Q} \\ \pi\, ; dacă\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

(*conf.univ. dr. Pop Vasile, Universitatea Tehnică Cluj Napoca*)

Soluție:
Vom arăta că nu există funcții *f* , dar există funcții *g*.

a) Dacă ar exista funcții *f*, analizăm două cazuri.

a₁) $f(\pi) \in \mathbb{Q}$ ***a₂)*** $f(\pi) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

a₁) $f(\pi) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ f^3(\pi) = f\left(f^2(\pi)\right) = f(1)$

Dar $f^3(\pi) = f^2\left(f(\pi)\right) = \pi \Rightarrow f(1) = \pi \Rightarrow f(\pi) = f\left(f(1)\right) = \pi \notin \mathbb{Q}$, contradicție. **2 puncte**

a₂) $f(\pi) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad \Rightarrow f^3(\pi) = f\left(f^2(\pi)\right) = f(1)$

Dar $f^3(\pi) = f^2\left(f(\pi)\right) = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f^2(1) = f(1) = 1$ și $f^2(1) = \pi \Rightarrow \pi = 1$, contradicție. **2 puncte**

b) Dăm un exemplu: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \pi \,;\, dacă\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 \,;\, dacă\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow g\left(g(x)\right) = g(\pi) = 1$

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow g\left(g(x)\right) = g(1) = \pi \Rightarrow (g \circ g)(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 \,;\, dacă\ x \in \mathbb{Q} \\ \pi \,;\, dacă\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. **3 puncte**