Concursul
„Gheorghe Şincai – pentru micii matematicieni”, 2015

I. 1) $a = 204 - 3\times(81-30) = 204 - 153 = 51$

$5\times(326-6\times b) = 1150 \Leftrightarrow 326 - 6\times b = 230 \Leftrightarrow 6\times b = 96 \Leftrightarrow b = 16$

$c = 987 - 101 = 886$

2) $886 : 16 = 55$ rest 6 și suma cifrelor lui a este $5+1=6$.

II. 1) Fie a și b numerele date. Atunci $a = b\times c + r,\ r < b$.

Din ipoteză avem $18\times c = a - r$ și $b = 3\times c$.

Deducem că $b\times c = 18\times c$. Rezultă $b = 18$ și apoi $c = 6$.

2) Din $b = 18$, avem $r < 18$ și $r > 15$ rezultă $r = 16$ sau $r = 17$.

Pentru $r = 16$ avem $a = 124,\ b = 18$,

iar pentru $r = 17$ avem $a = 125,\ b = 18$.

III. 1) $0+5+10+...+95 = 5\times(1+2+...19) = 950$.

2) Numerele $40,\ 35,\ 45,\ 55,\ \underbrace{111...1}_{de\ 2015\ ori}0$ se găsesc în primul șir si au suma corespunzătoare a cifrelor egală cu $4,\ 8,\ 9,\ 10$ și 2015. Așadar numerele $4,\ 8,\ 9,\ 10$ și 2015 se gasesc în al doilea șir.

3) Numerele din primul șir au ultima cifră 0 sau 5. În aceste condiții, pentru ca suma cifrelor să fie 27, numărul trebuie să aibă cel puțin 4 cifre. Pentru ca numărul sa fie cel mai mic el trebuie să aibă cât mai puține cifre.

Dacă ultima cifră este 0, atunci convine 9990.

Dacă ultima cifră este 5, atunci convine 4995.

Numărul căutat este 4995.

Concursul
„Gheorghe Şincai – pentru micii matematicieni”, 2016

I. 1) $a = 3 + 87\times 70 - 87\times 69 = 3 + 87\times 1 = 90$

$\left[215 - \left(32\times 5 + 682 - b\right):9 - 135:9\right]:5 = 23 \Leftrightarrow 215 - \left(160 + 682 - b\right):9 - 15 = 115 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 200 - \left(842 - b\right):9 = 115 \Leftrightarrow \left(842 - b\right):9 = 85 \Leftrightarrow 842 - b = 765 \Leftrightarrow b = 77$

Deoarece $405 = 5\times 9\times 9$, rezultă că $c = 599$.

2) $c + 1 = 599 + 1 = 600$

$40\times\left(a - b + 2\right) = 40\times\left(13 + 2\right) = 600$.

II. 1) Notăm cu a, d, c numărul cireșelor culese de Ana, de Dan și de Călin.
Avem: $a = 3\times d + 2$ și $d - 3 = 4\times c$.
Deoarece $d = 4\times c + 3$, Dan a cules un număr impar de cireșe.
Obținem că $3\times d$ este un număr impar, deci $a = 3\times d + 2$ este un număr impar.

2) Avem $a = d + 88$, deci $3\times d + 2 = d + 88$, adică $d = 43$.
Obținem $a = 131$ și $c = 10$.

III. 1) $S = (1+2+3+4+6+7+8+9) + (11+12+13+14+16+17+18+19) + 21 + 23 + 27 + 29$

$S = 1 + 2 + \ldots + 19 - (5 + 10 + 15) + 100 = 260$.

2) Împărțim șirul în grupe de câte 8 termeni:
grupa 1: (1, 3, 7, 9, 8, 6, 4, 2), grupa 2: (11, 13, 17, 19, 18, 16, 14, 12), ...
grupa 202: (2011, 2013, 2017, 2019, 2018, 2016, 2014, 2012)
În primele 201 grupe sunt $201\times 8 = 1608$ termeni, iar 2016 este pe locul 6 în grupa 202.
Așadar 2016 este al 1614-lea termen al șirului.

3) Numărul A este maxim dacă are cât mai mulți de 9 pe primele locuri. $55 = 6\times 9 + 1$, dar numărul 9999990001 este impar.
Folosim faptul că $55 = 5\times 9 + 8 + 2$.
A nu poate avea ultima cifră 0, deoarece multiplii de 10 nu fac parte din șir.

Numărul căutat este $A = 9999980002$.

Concursul
„Gheorghe Şincai – pentru micii matematicieni”, 2017

I. 1) $a=5\times(20-3)-51\times(10-2\times3):3=5\times17-51\times4:3=85-68=17$

$96-3\times b=9\times[4-2\times(64-4\times4\times4)]:6\Leftrightarrow96-3\times b=9\times[4-2\times(64-64)]:6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow96-3\times b=9\times4:6\Leftrightarrow96-3\times b=6\Leftrightarrow3\times b=90\Leftrightarrow b=30$

$n=(0+2+4+6+8):2=10$

$c=25\times8-5\times(2\times10-5):3=200-5\times15:3=200-25=175.$

2) $8\times a=4\times b+16\Leftrightarrow8\times17=4\times30+16\Leftrightarrow136=136$ (A).

3) $3\times a+4=c-4\times b\Leftrightarrow3\times17+4=175-4\times30\Leftrightarrow55=55$ (A).

II. 1) Notăm cu $\mapsto$ numărul premianților la concursul „Lumea cuvântului” și cu $\leftrightarrow$ pe cel al premianților la concursul „Micii matematicieni”.

Știm că: $\left.\begin{array}{l}\mapsto\\ \leftrightarrow\end{array}\right\}$ 88 *elevi* și că $\left.\begin{array}{l}\mapsto\mapsto\mapsto\mapsto\\ \leftrightarrow\leftrightarrow\end{array}\right\}$ 248 *elevi*.

Din primul desen deducem că: $\left.\begin{array}{l}\mapsto\mapsto\\ \leftrightarrow\leftrightarrow\end{array}\right\}$ $2\times88=176$ *elevi*.

Rămâne că: $\mapsto\mapsto=248-176=72$ *elevi* și de aici $\mapsto=72:2=36$ *elevi*.

La concursul „Lumea cuvântului” au participat $36\times4=144$ elevi, iar la concursul „Micii matematicieni” $248-144=104$ elevi.

2) La concursul „Micii matematicieni” au obținut premii $104:2=52$ elevi. Numai la concursul „Micii matematicieni” au obținut premii $52-20=32$ elevi.

3) La concursul „Lumea cuvântului” au obținut premii $144:4=36$ elevi. Numai la concursul „Lumea cuvântului” au obținut premii $36-20=16$ elevi. Premii au obținut așadar $32+16+20=68$ elevi. Numărul elevilor fără premiu este $248-68=180$ elevi.

III. 1) Numerele $\overline{ab}$ care sunt „șincaiste” îndeplinesc condiția $a+b=2\times2$. Aceste numere sunt: 13, 31, 40. Suma lor este 84.

2) Numerele „șincaiste” de 4 cifre trebuie să aibă suma cifrelor egală cu 8. Cele cuprinse între 1300 și 1600 sunt:
1304, 1340,
1403, 1430,
1502, 1520.

3) Deoarece cifrele trebuie să fie distincte, un număr „șincaist” are cel mult 10 cifre. Dacă ar avea 6 cifre, cea mai mică sumă posibilă a cifrelor ar fi $0+1+2+3+4+5=15$ care depășește pe $2\times6=12$. Analog numărul nu poate avea 7, 8, 9 sau 10 cifre. Așadar un număr „Șincaist” are cel mult 5 cifre, suma cifrelor trebuind să fie 10. Cel mai mare este 43210.

Concursul
„Gheorghe Şincai – pentru micii matematicieni”, 2018

I.

1) $a=(30-4\cdot6)\cdot(5\cdot4+5)-32:8\cdot(29+2\cdot3)=(30-24)\cdot(20+5)-32:8\cdot(29+6)=$
$=6\cdot25-32:8\cdot35=150-4\cdot35-150-140=10$.

$23\cdot7-7\cdot\mathrm{b}=(8-2:2)\cdot\left[161-(16\cdot16-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)\right]:5$
$161-7\cdot\mathrm{b}=7\cdot\left[161-(256-120)\right]:5$
$161-7\cdot\mathrm{b}=7\cdot25:5$
$161-7\cdot\mathrm{b}=35$
$7\cdot\mathrm{b}=161-35$
$7\cdot\mathrm{b}=126$
$\mathrm{b}=18$

$n=1948$
$c=50\cdot4-(1948:4-432):5=200-(487-432):5=200-55:5=200-11=189$.

2) $10\cdot b-40=10\cdot18-40=140$.
$a\cdot a+40=10\cdot10+40=140$.

3) $10\cdot b+a=10\cdot18+10=190$.
$c+1=189+1=190$.

II.

1) Cele 2 kilograme de pere costă 6+8=14 lei. Așadar 1 kilogram de pere costă 7 lei. 3 kilograme de pere și 4 kilograme de caise vor costa
$3\cdot7+4\cdot8=21+32=53$ (lei).
2) 8 kilograme de mere, 4 kilograme de pere și 6 kilograme de caise costă $8\cdot4+4\cdot7+6\cdot8=32+28+48=108$ (lei). Deoarece ar mai avea nevoie de 8 lei, rezultă că prietenii au suma de 100 lei.
6 kilograme de mere, 7 kilograme de pere și 3 kilograme de caise costă $6\cdot4+7\cdot7+3\cdot8=24+49+24=97$ (lei) și deci prietenii pot cumpăra aceste cantități de fructe.
3) 1 kilogram de mere, 1 kilogram de pere și 1 kilogram de caise costă 19 lei. Le rămân de folosit 81 lei. Cum prețurile pentru mere și caise se împart exact la 4, iar 81 nu se împarte exact la 4, rezultă că trebuie cumpărate pere. Perele fiind relativ scumpe trebuie cumpărată o cantitate cât mai mică. Cantitatea cea mai mică posibil este de încă 3 kilograme de pere. Aceasta pentru, ca după cumpărarea perelor, să le rămână 60 lei, sumă care se împarte exact la 4. Cum merele sunt cele mai ieftine vor fi cumpărate încă 60 : 4 = 15 kg mere.
Cantitatea maximă de fructe va fi
16 kg (mere) + 4 kg (pere) + 1 kg (piersici) = 21kg.

III. 1) 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44 = 260

2)

1	2	3	4	5	6	7	8	...	100
3	5	7	9	11	13	15		...	
8	12	16	20	24	28			...	
20	28	36	44	52				...	
48	64	80	96					...	
112	144	176						...	
256	320							...	
576								...	

....

Rândul al optulea începe cu 576. Observăm că este suficient să completăm tabelul la început cu numerele 1, 2, 3, ..., 8 pentru a putea calcula primul număr de pe rândul al optulea.

Se poate stabili și o formulă pentru primul număr de pe rândul $n \geq 3$ și anume $(n+1) \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n-2 \ ori}$, dar este destul de complicat de observat.

3) Pe primele două rânduri nu apare 2018 fiind prea mare. Rândul al treilea conține doar numere care se împart exact la 4 (multipli ai lui 4). Cum suma a doi multipli ai lui 4 este multiplu al lui 4, deducem că toate numerele, începând cu rândul al treilea sunt multipli ai lui 4.

2018 nefiind multiplu al lui 4, el nu se află așadar în tabel.

4) Începând cu rândul al cincilea toate numerele sunt multipli ai lui 8.

100 nefiind multiplu de 8, el se poate afla doar pe primele 4 rânduri.

Pe primul rând se află o dată, pe ultima poziție.

Pe rândul al doilea nu se află deoarece sunt doar numere impare.

Pe rândul al treilea sunt multipli ai lui 4, începând cu 8 și terminând cu 396. Cum 100 este multiplu de 4, el se va afla o dată pe rândul al treilea (se va obține ca sumă a numerelor 49 și 51).

Pe rândul al patrulea numerele cresc din 8 în 8 începând cu 20. Cum $100 = 20 + 8 \cdot 10$, deducem că 100 se va afla pe rândul al patrulea (el se va obține ca sumă a numerelor 48 și 52).

Așadar numărul 100 apare în tabel de 3 ori.

Concursul
„Gheorghe Şincai – pentru micii matematicieni”, 2019

I.

1) $a = 10 \times 17 \times [(7 + 6 \times 7) + 1] = 170 \times 50 = 8500$

$2019 - (2019 - 2019 : b) = 1 \Rightarrow (2019 - 2019 : b) = 2018 \Rightarrow 2019 : b = 1 \Rightarrow b = 2019$

$c = (a + 1300) : 10 + (b - 19) : 100 = (8500 + 1300) : 10 + (2019 - 19) : 100 = 1000$

2) $a - 4 \times b + 576 = 8500 - 4 \times 2019 + 576 = 8500 - 8076 + 576 = 1000 = c$

3) $2125 = 500 \times 4 + 125$, deci câtul este 4 iar restul 125

II.

1) Notam cu c, p, s prețul unui caiet, prețul unui pix, respectiv prețul unui stilou.

Avem: $2 \times c ...... 1 \times p .... 3 \times s ...... 89$ *lei* (1)

$4 \times c ...... 7 \times p .... 1 \times s ...... 153$ *lei* (2)

Înmulțind relația (1) cu 3 și adunând apoi cu relația (2), obținem:

$10 \times c ...... 10 \times p .... 10 \times s ...... 420$ *lei* (3)

Rezultă: $c + p + s = 42$ lei

2) Din $s = p + c + 2$ și $c + p + s = 42$, rezultă $s = 22$ lei și $p + c = 20$ lei.

Din (1) obținem $2 \times c ...... 1 \times p ...... 89 - 66 = 23$ *lei* și imediat $c = 3$ lei, $p = 17$ lei.

III.

1) 20 se afla pe coloana B;

2019=$4 \times 504 + 3$, se afla pe coloana C.

2) Suma elementelor de pe coloana A este :

$$S_A = 1 + 5 + 9 + \cdots + 2017 = (4 \times 0 + 1) + (4 \times 1 + 1) + (4 \times 2 + 1) + \cdots (4 \times 504 + 1) =$$

$$= 4 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 504) + \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{505\, termeni} = 4 \times 504 \times 505 : 2 + 505 = 509545$$

3) Cum $2020 - 3 = 2017$ și $2017 = 2 \times 1008 + 1$, ultima linie a tabelului va conține doar elementul 2020.

Analizând coloana B, deducem ca tabelul are 1010 linii. Se constată că numai linia 1, și linia 1010 au suma elementelor un număr par, suma elementelor pe oricare din liniile de la 2 la 1009 fiind un număr impar.

Perechile de linii cerute sunt:

(L_1, L_2); (L_1, L_3); (L_1, L_4); $\cdots$ (L_1, L_{1009});

(L_{1010}, L_2); (L_{1010}, L_3); (L_{1010}, L_4); $\cdots$ (L_{1010}, L_{1009}).