COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL „ARGUMENT” CLASA a VIII-a

2 noiembrie 2019

La problemele 1 – 8 se scriu pe foaia de concurs doar literele corespunzătoare răspunsului considerat corect. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

(5p) **1.** Dacă $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+x\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, atunci x este :

a) 1 b) -1 c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$

(5p) **2.** Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$; $a+b+c=5$; $a^2+b^2+c^2=11$; $a^3+b^3+c^3=35$, atunci abc este :

a) 8 b) 10 c) 2 d) 5

(5p) **3.** Soluţia ecuaţiei $|x-1|+|x-2|+\dots+|x-2018|=2019(x-2019)$ este:

a) $2019\cdot1010$ b) 2019 c) 1010 d) $2019\cdot2018$

(5p) **4.** Dacă $x,y\in\mathbb{R}^{\bullet}$, $a=x-\frac{1}{y}$, $b=y-\frac{1}{x}$ şi $ab\in[-4,0]$, atunci $|xy|$ este:

a) $|xy|\geq2$ b) $|xy|\leq0,5$ c) $|xy|=1$ d) $|xy|=4$

(5p) **5.** Valoarea minimă a expresiei $E=x^2+y^2-xy-x-y+2019$ este:

a) 2020 b) 1 c) 2019 d) 2018

(5p) **6.** Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt $x-3, 7-x$ şi $x-2$. Valoarea numărului real x pentru care diagonala paralelipipedului este minimă este:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 2/3

(5p) **7.** Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu $VA=6\,cm$ şi $m(\angle AVB)=30^\circ$. O furnică porneşte din A, se deplasează pe toate feţele laterale ale piramidei şi ajunge în mijlocul muchiei $[VA]$. Drumul cel mai scurt are lungimea:

a) $2\sqrt{5}$ b) $9\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{5}$ d) 10

(5p) **8.** Pe fiecare din cele 6 muchii ale unui tetraedru se consideră câte 3 puncte, diferite de vârfuri. Câte triunghiuri se pot forma având vârfurile printre aceste puncte?

a) 300 b) 610 c) 810 d) alt număr

La următoarele probleme se cer soluţiile complete.

9. Fie $a=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{79}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{81}+\sqrt{80}}$.

(10p) **a)** Calculaţi $a+b$;

(15p) **b)** Arătaţi că $a>4$ şi calculaţi $[a]$.

10. Se consideră tetraedrul $ABCD$ şi $M\in Int(\triangle ADB)$ astfel încât $MC\perp AB$ şi $DA^2+MB^2=DB^2+MA^2$. Arătaţi că:

(20p) **a)** $AB\perp CD$;

(5p) **b)** dacă $DA=DB$, atunci $CA=CB$.

Notă: **Timpul de lucru: 2 ore şi 30 minute.**
Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES !***

BAREM clasa a VIII-a

1. (b) $x=-1$

2. (d) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\Rightarrow 35-3abc=5(11-7)\Rightarrow abc=5$

3. (a) $x\geq 2019\Rightarrow 2018x-2019\cdot 1009=2019x-2019^2\Rightarrow x=2019\cdot 1010$

4. (c) $ab=xy+\dfrac{1}{xy}-2$; $-4\leq ab\leq 0\Rightarrow -2\leq xy+\dfrac{1}{xy}\leq 2\Rightarrow |xy|=1$

5. (d) $E=x^2+y^2-xy-x-y+2019=\dfrac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right]+2018\geq 2018$

6. (b) $d^2=3(x-4)^2+14\geq 14\Rightarrow x_{\min}=4$.

7. (c) După desfășurarea tetraedrului, $m(\angle AVM)=90^\circ\Rightarrow AM=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$ cm, unde M este mijlocul muchiei $[VA]$.

8. (c) 1) Triunghiuri cu vârfuri pe trei muchii diferite: $20\cdot 3\cdot 3\cdot 3=540$, deoarece avem 20 moduri de a alege 3muchii din 6 și fiecare vârf se alege în 3 moduri dintre cele 3;

2) Triunghiuri cu 2 vârfuri pe o muchie și al treilea vârf pe altă muchie: $6\cdot 5\cdot 3\cdot 3=270$**,** deoarece avem 6 moduri de a alege o muchie, 5 moduri de a alege altă muchie, 3 moduri de a alege 2 vârfuri din 3 și 3 moduri de a alege un vârf din 3.

Total **810** vârfuri.

9. a) $a+b=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})=9-1=8$ ....(10p)

b) Din $a+b=8, a>b\Rightarrow a>4$ ....(5p)

Arătăm că $a<5$. Avem:

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}<\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$$

....

$$\frac{1}{\sqrt{80}+79}<\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{78}}$$

Obținem: $a-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}<b-\dfrac{1}{\sqrt{81}+\sqrt{80}}\Rightarrow a-\sqrt{2}+1<b-\sqrt{81}+\sqrt{80}\Rightarrow 2a<a+b+\sqrt{2}-1-9+\sqrt{80}$

Din $4<a<5$ $\Rightarrow [a]=4$ ....(10p)

10.a) Fie $DP\perp AB, MN\perp AB, N\in AB, P\in AB$. Din $DA^2-DP^2=AP^2$ si $DB^2-DP^2=BP^2$ rezultă $DA^2-DB^2=AP^2-BP^2$ (1). Analog obţinem: ....(5p)

$MA^2-MB^2=AN^2-BN^2$ (2). ....(5p)

Din (1) și (2) pe baza ipotezei rezultă :

$PA^2-PB^2=AN^2-BN^2\Rightarrow(AP-BP)(AP+BP)=(AN-BN)(AN+BN)\Rightarrow AP-BP=AN-BN$.

Cum $AP+BP=AN+BN\Rightarrow AP=AN$ și cum $N,P\in(AB)\Rightarrow N=P$, deci $DM\perp AB$. ....(5p)

Din: $MC\perp AB$ și $DM\perp AB\Rightarrow AB\perp(DMC)$, deci $AB\perp CD$ .... (5p)

b) DM este înalţime și mediană în $\triangle DAB$, deci $\{N\}=DM\cap AB$ este mijlocul lui (AB).

Atunci CN este mediană și înalţime în triunghiul CAB $\Rightarrow$ CAB este triunghi isoscel cu $CA=CB$ ....(5p)