CONCURSUL „ARGUMENT”

CLASA a VII-a Baia Mare, 2 noiembrie 2019

La problemele 1-8, scrieți pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Soluția ecuației $\frac{3x+1}{3}+\frac{3x+2}{4}+\frac{3x+3}{5}+...+\frac{3x+2019}{2021}=2019$ este:

a) 1,5 b) 0 c) 1 d) 0,(6)

(5p) **2.** Dacă $x=\sqrt{7}+\sqrt{7^2}+\sqrt{7^3}+...+\sqrt{7^{101}}$ atunci valoarea expresiei $\frac{6x}{\sqrt{7}+1}+\sqrt{7}$ este:

a) 7^{51} b) 7^{50} c) $\sqrt{7}^{51}$ d) 7

(5p) **3.** Pentru orice $x>0$, expresia $\frac{1}{x\sqrt{x+2}+(x+2)\sqrt{x}}$ este egală cu:

a) $\frac{1}{x\sqrt{x+2}}+\frac{1}{(x+2)\sqrt{x}}$ b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$ c) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ d) $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

(5p) **4.** Valoarea sumei $S=\frac{1}{1\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{3}}+\frac{1}{5\cdot\sqrt{7}+7\cdot\sqrt{5}}+...+\frac{1}{959\cdot\sqrt{961}+961\cdot\sqrt{959}}$ este:

a) $\frac{16}{31}$ b) $\frac{30}{31}$ c) $\frac{15}{31}$ d) 0,5

(5p) **5.** Cardinalul mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \frac{3\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}+2\cdot\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{30-12\sqrt{6}}}{2x-2019}\in\mathbb{Z}\right\}$ este:

a) 4 b) 8 c) 6 d) 3

(5p) **6.** Dacă $\alpha=\frac{1+10+10^2+10^3+...+10^{2018}}{37}$, atunci:

a) $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ b) $\sqrt{\alpha}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ c) $\sqrt{\alpha}\in\mathbb{Z}$ d) $\sqrt{\alpha}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

(5p) **7.** Fie $\triangle ABC$ cu $AB=AC$. Construim $AD\perp BC$, $D\in BC$ și bisectoarea $(BE$ a $\sphericalangle ABC$, $E\in(AC)$, $BE\cap AD=\{F\}$. Dacă $AF=AE$ și $m(\sphericalangle BAD)=a^\circ$, atunci:

a) $a=30$ b) $a=90$ c) $a=60$ d) $a=45$

(5p) **8.** Se consideră pătratele congruente ABCD și BEFG cu interioarele disjuncte și $\sphericalangle ABE$ ascuțit. Raportul dintre $m(\sphericalangle CBG)$ și $m(\sphericalangle GFD)$ este:

a) 2 b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

La problemele 9 și 10 redactați rezolvările complete.

(10+10+5p) **9.** Pe latura AB a pătratului $ABCD$, în interior, se construiește triunghiul echilateral ABE. Bisectoarele unghiurilor DAE și CBE se intersectează în punctul F. Demonstrați că:
a) $\triangle AFD\equiv\triangle BFC$; **b)** $\triangle FCD$ este echilateral; **c)** dreptele DE, AC și BF sunt concurente.

(25p) **10.** Fie $a,b,c\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\frac{4a+5b+6c}{7a+8b}=\frac{4b+5c+6a}{7b+8c}=\frac{4c+5a+6b}{7c+8a}$. Aflați partea întreagă a numărului $A=\sqrt{\frac{1000a+1001b+18c}{9a+b}+\frac{1000b+1001c+18a}{9b+c}+\frac{1000c+1001a+18b}{9c+a}}$.

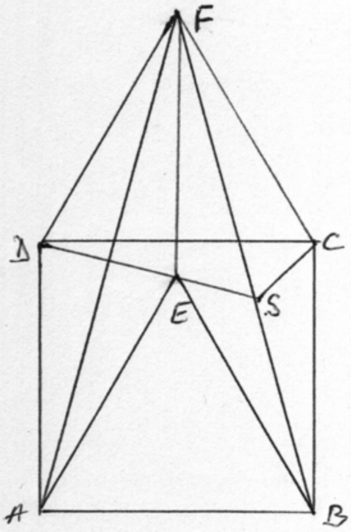
Subiectele au fost selectate și propuse de: prof. Cristian Heuberger, Colegiul Național „Gheorghe Șincai”
prof. Adrian Pop, Colegiul Național „Gheorghe Șincai”.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore și 30 de minute.

SUCCES!

CONCURSUL „ARGUMENT”
2 noiembrie 2019
CLASA a VII-a
Soluţii

1	2	3	4	5	6	7	8
d)	a)	b)	c)	b)	d)	d)	a)



9. a) Se demonstrează că ΔFAB este isoscel şi deci $FA \equiv FB$. *5p*

Apoi $\Delta AFD \equiv \Delta BFC$ din cazul L.U.L. *5p*

b) ΔAED este isoscel, iar AF este bisectoare şi deci şi mediatoare a segmentului *(DE)*. *2p*

F se află pe mediatoarea segmentului *(DE)* $\Rightarrow \Delta FDE$ este isoscel. *2p*

$m(\sphericalangle AEF) = 150^\circ$ şi $m(\sphericalangle FAE) = 15^\circ \Rightarrow \Delta AEF$ este isoscel. *2p*

Rezultă $AEFD$ romb $\Rightarrow FD \equiv DA\ (\equiv DC) \Rightarrow \Delta FCD$ este echilateral. *4p*

c) Fie $DE \cap BF = \{S\}$.

$m(\sphericalangle CDS) = m(\sphericalangle CBS) = 15^\circ$ *1p*

În triunghiul isoscel ΔCBD, DS şi BS sunt egal înclinate faţă de laturile congruente, rezultând că CS este bisectoare a $\sphericalangle BCD$ şi de aici $S \in AC$. *4p*

10. Aplicând proprietatea şirului de rapoarte egale, din ipoteză obţinem

$$\frac{4a+5b+6c}{7a+8b} = \frac{4b+5c+6a}{7b+8c} = \frac{4c+5a+6b}{7c+8a} = \frac{15a+15b+15c}{15a+15b+15c} = 1$$ *5p*

$$\frac{4a+5b+6c}{7a+8b} = 1 \Leftrightarrow 4a+5b+6c = 7a+8b \Leftrightarrow 6c = 3a+3b \Leftrightarrow 2c = a+b, (1)$$

$$\frac{4b+5c+6a}{7b+8c} = 1 \Leftrightarrow 4b+5c+6a = 7b+8c \Leftrightarrow 6a = 3b+3c \Leftrightarrow 2a = b+c \Leftrightarrow c = 2a-b, (2)$$

$$\frac{4c+5a+6b}{7c+8a} = 1 \Leftrightarrow 4c+5a+6b = 7c+8a \Leftrightarrow 6b = 3a+3c \Leftrightarrow 2b = a+c \Leftrightarrow c = 2b-a, (3)$$

Din relaţiile (2) şi (3) obţinem $2a-b = 2b-a \Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow a = b$

Din $\left.\begin{matrix} 2c = a+b \\ a = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2c = 2a \Rightarrow c = a$

Prin urmare $a = b = c$ *10p*

$$A = \sqrt{\frac{1000a+1001b+18c}{9a+b} + \frac{1000b+1001c+18a}{9b+c} + \frac{1000c+1001a+18b}{9c+a}} \overset{a=b=c}{=}$$

$$= \sqrt{\frac{2019}{10} + \frac{2019}{10} + \frac{2019}{10}} = \sqrt{\frac{6057}{10}} = \frac{\sqrt{60570}}{10}$$ *5p*

$$246 < \sqrt{60570} < 247 \Rightarrow 24 < 24{,}6 < \frac{\sqrt{60570}}{10} < 24{,}7 < 25 \Rightarrow [A] = 24$$ *5p*