Concursul Interjudețean de Matematică “Argument”

Colegiul Național “Gheorghe Șincai” Baia-Mare

Ediția a XI-a, 2019

Clasa a XII-a

Soluții

Problema 1.

a). Să se determine funcțiile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu proprietatea că $\dfrac{1}{f}$ este o primitivă a funcției f.

b). Există funcții bijective $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu proprietatea că inversa f^{-1} este o primitivă a funcției f?

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. a). Funcția $F=\dfrac{1}{f}:(0,\infty)\to(0,\infty)$ verifică $F'=f$, deci $F'=\dfrac{1}{F}$, de unde $FF'=1$, adică $(F^2)'=2$. Integrând, rezultă că $F^2(x)=2x+a$ pentru orice $x>0$, unde $a\in\mathbb{R}$ constantă. În plus, deoarece $2x+a>0$ pentru orice $x>0$, se obține că $a\geq 0$.

Concluzionând, $f(x)=\dfrac{1}{F(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+a}}$ pentru orice $x>0$, unde $a\geq 0$ constantă.

b). Căutăm funcții de forma $f(x)=ax^b$, cu $a,b>0$. Vom avea $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$ pentru orice $x>0$, de unde

$$ax^b=f(x)=\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{a^{\frac{1}{b}}b}\cdot x^{\frac{1}{b}-1}\quad\text{pentru orice } x>0,$$

astfel că a și b trebuie să verifice:

$$a=\frac{1}{a^{\frac{1}{b}}b},\qquad b=\frac{1}{b}-1.$$

Se obține

$$b=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\qquad a=b^{-\frac{b}{b+1}}.$$

Deci răspunsul este afirmativ. ■

Problema 2. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis. Spunem despre o funcție $f : I \to \mathbb{R}$ că are proprietatea (P) dacă admite o primitivă $F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât funcția e^F să fie o primitivă pentru funcția e^f.

a). Dacă $I = \mathbb{R}$, să se arate că nu există funcții cu proprietatea (P).

b). Dacă $I = (0, \infty)$, să se arate că există atât funcții mărginite, cât și funcții nemărginite cu proprietatea (P).

Vasile Pop, Mircea Rus, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea (P) și fie F primitiva asociată. Atunci pe intervalul I avem $\mathrm{e}^f = \left(\mathrm{e}^F\right)' = F'\mathrm{e}^F = f \cdot \mathrm{e}^F$, astfel că $f = \mathrm{e}^{f-F} > 0$ pe I. Prin logaritmare, se obține

$$F(x) = f(x) - \ln f(x) \quad \text{pentru orice } x \in I. \tag{1}$$

Considerăm funcția

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = t - \ln t \quad (t > 0),$$

cu $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{t}$, astfel că tabelul de variație al funcției g este:

t	0		1		∞
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

Relația (1) se poate atunci rescrie sub forma

$$F(x) = g(f(x)), \quad \text{pentru orice } x \in I. \tag{2}$$

Întrucât $g(t) \geq 1$ pentru orice $t > 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $t = 1$, rezultă din (2) că $F(x) \geq 1$ pentru orice $x \in I$, cu egalitate dacă și numai dacă $f(x) = 1$. Deoarece F este strict crescătoare pe I ($F' = f > 0$) iar I este interval deschis, rezultă că $F(x) > 1$ pentru orice $x \in I$ (în caz contrar, ar exista $x_0 \in I$ pentru care $F(x_0) = 1$, iar $F(x) < F(x_0) = 1$ pentru orice $x \in I \cap (-\infty, x_0) \neq \emptyset$ – contradicție). De aici rezultă și că $f(x) \neq 1$ pentru orice $x \in I$. Mai departe, deoarece $f = F'$ admite proprietatea lui Darboux, rezultă că $J := f(I)$ este un interval, iar $1 \notin J$, astfel că $J \subseteq (0, 1)$ sau $J \subseteq (1, \infty)$.

Restricțiile funcției g la intervalele $(0, 1)$, respectiv $(1, \infty)$ sunt inversabile și notăm cu h_1 și h_2 inversele lor:

$$h_1 : (1, \infty) \to (0, 1), \qquad h_2 : (1, \infty) \to (1, \infty).$$

De asemenea, h_1, h_2 sunt derivabile, pentru că $g' \neq 0$ pe $(0, 1)$ și pe $(1, \infty)$. Folosind relația (2), rezultă că avem una din următoarele situații:

$$f = f_1 : I \to (0, 1), \quad f_1(x) = h_1(F(x)) \qquad \text{sau} \qquad f = f_2 : I \to (1, \infty), \quad f_2(x) = h_2(F(x)).$$

Rezultă că f este derivabilă și derivând relația (2) ajungem la $f = \left(1 - \dfrac{1}{f}\right) \cdot f'$, astfel că $\left(\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{f^2}\right) \cdot f' = 1$ pe I. Integrând, rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\ln f(x) + \frac{1}{f(x)} = x + c \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

adică

$$g\left(\frac{1}{f(x)}\right) = x + c \quad \text{pentru orice } x \in I. \tag{3}$$

Deoarece $g(t) > 1$ pentru orice $t \neq 1$, pe baza relației (3) rezultă că $x + c > 1$ pentru orice $x \in I$, astfel că $I \subseteq (1 - c, \infty)$, ceea ce justifică punctul (a).

Dacă $I = (0, \infty)$, fixăm $c = 1$. Prin aplicarea inverselor h_1, h_2 în (3), obținem funcțiile

$$
\begin{aligned}
&f_1 : (0, \infty) \to (0, 1), \qquad f_1(x) = \frac{1}{h_2(x+1)} \quad (x > 0) \\
&f_2 : (0, \infty) \to (1, \infty), \qquad f_2(x) = \frac{1}{h_1(x+1)} \quad (x > 0).
\end{aligned}
$$

Se verifică (direct prin calcule, ori indirect prin raționament invers) că $F_1 = g \circ f_1$ și $F_2 = g \circ f_2$ sunt primitive pentru f_1, respectiv f_2; spre exemplu, un calcul direct dă

$$
\begin{aligned}
F_1'(x) &= g'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = \left(1 - \frac{1}{f_1(x)}\right) \cdot f_1'(x) = (1 - h_2(x+1)) \cdot \left(-\frac{h_2'(x+1)}{(h_2(x+1))^2}\right) \\
&= \frac{1}{h_2(x+1)} \left(1 - \frac{1}{h_2(x+1)}\right) h_2'(x+1) = f_1(x) \cdot g'\left(h_2(x+1)\right) \cdot h_2'(x+1) \\
&= f_1(x) \cdot (g \circ h_2)'\,(x+1) = f_1(x) \cdot (x+1)' \\
&= f_1(x).
\end{aligned}
$$

De asemenea, e^{F_1} și e^{F_2} sunt primitive pentru e^{f_1}, respectiv e^{f_2}, condițiile reducându-se direct la (2).

În final, deoarece $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \infty$, avem că $\lim\limits_{x \to \infty} h_1(x) = +0$, deci

$$
\lim_{x \to \infty} f_2(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to \infty} h_1(x+1)} = \frac{1}{+0} = \infty,
$$

ceea ce arată că f_2 este nemărginită și încheie demonstrația. ■

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și σ o permutare a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. O submulțime nevidă $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ se numește σ-fixă dacă $\sigma(A) = A$.

Să se arate că numărul submulțimilor σ-fixe este de forma $2^k - 1$, cu $1 \leq k \leq n$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Permutarea σ se descompune în cicluri disjuncte

$$\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

(scrierea este unică, abstracție făcând de ordinea ciclurilor) care partiționează mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ în k submulțimi σ-fixe:

$$\{1, 2, \ldots, n\} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \quad \text{(reuniune disjunctă)},$$

unde nicio submulțime A_i nu poate fi partiționată mai departe în mai multe submulțimi σ-fixe (scrierea este unică, abstracție făcând de ordinea submulțimilor).

Descompunerea în cicluri și partiționarea mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ se poate justifica în felul următor.

Submulțimile A_i se obțin recursiv după cum urmează (vom nota $\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{\text{de } p \text{ ori } \sigma} = \sigma^p$).

Fie $a_1 := 1$ și $A_1 = \{a_1, \sigma(a_1), \sigma^2(a_1), \ldots\}$. Dacă $A_1 \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci se ia $a_2 = \min(\{1, 2, \ldots, n\} \setminus A_1)$ și $A_2 = \{a_2, \sigma(a_2), \sigma^2(a_2), \ldots\}$. Dacă $A_1 \cup A_2 \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci se ia $a_3 = \min(\{1, 2, \ldots, n\} \setminus (A_1 \cup A_2))$ și $A_3 = \ldots$; procedura continuă în același mod până se acoperă toată mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se arată ușor că oricare două submulțimi A_i, A_j $(i \neq j)$ generate în acest mod sunt disjuncte (folosind bijectivitatea lui σ), sunt σ-fixe (prin felul cum sunt definite) și nu conțin alte submulțimi σ-fixe (în afară de ele însele).

Dacă A este o submulțime σ-fixă, atunci ea se scrie (în mod unic) ca reuniune de (una sau mai multe) submulțimi din familia $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, iar alegerea acestor submulțimi se face prin specificarea unei submulțimi (nevide) de indici din $\{1, 2, \ldots, k\}$, ceea ce se poate face în $2^k - 1$ moduri (din cele 2^k submulțimi de indici se elimină mulțimea vidă). ■

Problema 4. Fie $(M, \cdot)$ un monoid.

Se spune despre M că are proprietatea (S) dacă pentru orice $x \in M$ există un unic $x' \in M$ astfel încât $x \cdot x' \cdot x = x$ și $x' \cdot x \cdot x' = x'$.

De asemenea, un element $x \in M$ se numește *idempotent* dacă $x \cdot x = x$.

a). Arătați că $(M, \cdot)$ este grup dacă și numai dacă $(M, \cdot)$ este monoid cu proprietatea (S) ce are un singur element idempotent.

b). Dați exemplu de monoid cu proprietatea (S) care nu este grup.

c). Arătați că în orice monoid cu proprietatea (S) oricare două elemente idempotente comută.

Soluție. Vom nota, în cele ce urmează, cu 1 elementul neutru al unui monoid.

a). Presupunem că $(M, \cdot)$ este grup. Se verifică direct că M are proprietatea (S), cu $x' = x^{-1}$ pentru orice $x \in M$. Fie acum $x \in M$ un element idempotent. Atunci

$$x = 1 \cdot x = \left(x^{-1} \cdot x\right) \cdot x = x^{-1} \cdot (x \cdot x) = x^{-1} \cdot x = 1,$$

așadar $x = 1$ este unicul element idempotent (evident, 1 este idempotent).

Reciproc, dacă $(M, \cdot)$ este un monoid cu proprietatea (S) ce are un singur element idempotent, atunci elementul idempotent este neapărat 1; arătăm că M este grup. Fie $x \in M$. Arătăm că x' este inversul lui x. Avem că

$$\begin{aligned}(x \cdot x') \cdot (x \cdot x') &= (x \cdot x' \cdot x) \cdot x' = x \cdot x' \\ (x' \cdot x) \cdot (x' \cdot x) &= (x' \cdot x \cdot x') \cdot x = x' \cdot x,\end{aligned}$$

astfel că $x \cdot x'$ și $x' \cdot x$ sunt elemente idempotente, deci $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$.

b). Se verifică pentru $M = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ împreună cu operația obișnuită de înmulțire că este un monoid (evident) cu proprietatea (S) care nu este grup (0 nu este inversabil). Într-adevăr, sistemul $\begin{cases} 0 \cdot y \cdot 0 = 0 \\ y \cdot 0 \cdot y = y \end{cases}$ are unica soluție $y = 0$ (deci există unic $0' = 0$), iar sistemul $\begin{cases} 1 \cdot y \cdot 1 = 1 \\ y \cdot 1 \cdot y = y \end{cases}$ are unica soluție $y = 1$ (deci există unic $1' = 1$). De observat, de asemenea, că M are două / ambele elemente idempotente.

c). Fie $(M, \cdot)$ un monoid cu proprietatea (S). Se verifică imediat că $x' = x$ pentru orice element idempotent $x \in M$, deoarece $x = x \cdot x \cdot x$ (*Observație*: se poate demonstra și reciproca, însă nu este esențial în demonstrația care urmează).

Fie acum $e, f \in M$ două elemente idempotente oarecare. Considerăm $x = f \cdot (e \cdot f)' \cdot e$. Avem

$$x \cdot x = f \cdot (e \cdot f)' \cdot e \cdot f \cdot (e \cdot f)' \cdot e = f \cdot \underbrace{((e \cdot f)' \cdot (e \cdot f) \cdot (e \cdot f)')}_{=(e \cdot f)'} \cdot e = x,$$

astfel că x este idempotent. De asemenea,

$$x \cdot (e \cdot f) \cdot x = f \cdot (e \cdot f)' \cdot \underbrace{e \cdot e}_{=e} \cdot \underbrace{f \cdot f}_{=f} \cdot (e \cdot f)' \cdot e = f \cdot \underbrace{(e \cdot f)' \cdot (e \cdot f) \cdot (e \cdot f)'}_{=(e \cdot f)'} \cdot e = x$$

și

$$(e \cdot f) \cdot x \cdot (e \cdot f) = e \cdot \underbrace{f \cdot f}_{=f} \cdot (e \cdot f)' \cdot \underbrace{e \cdot e}_{=e} \cdot f = (e \cdot f) \cdot (e \cdot f)' \cdot (e \cdot f) = e \cdot f$$

așadar $x' = e \cdot f$ și $x = (e \cdot f)'$. Deoarece x este idempotent, rezultă că $x = x' = e \cdot f$, deci $e \cdot f$ este idempotent. Analog, $f \cdot e$ este tot idempotent.

În final, avem

$$(e \cdot f) \cdot (f \cdot e) \cdot (e \cdot f) = e \cdot f \cdot f \cdot e \cdot e \cdot f = (e \cdot f) \cdot (e \cdot f) = e \cdot f$$
$$(f \cdot e) \cdot (e \cdot f) \cdot (f \cdot e) = f \cdot e \cdot e \cdot f \cdot f \cdot e = (f \cdot e) \cdot (f \cdot e) = f \cdot e.$$

Așadar, $(e \cdot f)' = f \cdot e$ și întrucât $e \cdot f = (e \cdot f)'$, concluzionăm că $e \cdot f = f \cdot e$. ■