COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică "Argument"
Ediția a XI-a, 1–2 noiembrie 2019

Clasa a XII-a

Problema 1.
a). Să se determine funcțiile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu proprietatea că $\dfrac{1}{f}$ este o primitivă a funcției f.
b). Există funcții bijective $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ astfel încât inversa f^{-1} să fie o primitivă a funcției f?

Problema 2. Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval deschis. Spunem despre o funcție $f:I\to\mathbb{R}$ că are proprietatea (P) dacă admite o primitivă $F:I\to\mathbb{R}$ astfel încât funcția e^F să fie o primitivă pentru funcția e^f.
a). Pentru $I=\mathbb{R}$, să se arate că nu există funcții ce au proprietatea (P).
b). Pentru $I=(0,\infty)$, să se arate că există atât funcții mărginite, cât și funcții nemărginite ce au proprietatea (P).

Problema 3. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și σ o permutare a mulțimii $\{1,2,\ldots,n\}$.
O submulțime nevidă $A\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ se numește σ-fixă dacă $\sigma(A)=A$.
Să se arate că numărul submulțimilor σ-fixe este de forma 2^k-1, cu $1\le k\le n$.

Problema 4. Fie $(M,\cdot)$ un monoid.
Se spune despre M că are proprietatea (S) dacă pentru orice $x\in M$ există un unic $x'\in M$ astfel încât $x\cdot x'\cdot x=x$ și $x'\cdot x\cdot x'=x'$.
De asemenea, un element $x\in M$ se numește *idempotent* dacă $x\cdot x=x$.
a). Arătați că $(M,\cdot)$ este grup dacă și numai dacă $(M,\cdot)$ este monoid cu proprietatea (S) ce are un singur element idempotent.
b). Dați exemplu de monoid cu proprietatea (S) care nu este grup.
c). Arătați că în orice monoid cu proprietatea (S) oricare două elemente idempotente comută.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

Succes!