COLEGIUL NAȚIONAL

GHEORGHE ȘINCAI

BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică “Argument”

Colegiul Național “Gheorghe Șincai” Baia-Mare

Ediția a XI-a, 2019

Clasa a XI-a

Soluții

Problema 1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația de recurență:

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 0, \qquad x_0 = 0.$$

Să se determine perechile de numere reale strict pozitive (a, L) astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} a^n(2 - x_n) = L.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluția autorului. Pe baza relației de recurență, se demonstrează ușor prin inducție că $x_n \in [0, 2)$ pentru orice $n \geq 0$. De aici, rezultă că x_n se poate rescrie sub forma $x_n = 2\cos a_n$, unde $a_n = \arccos \frac{x_n}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ iar relația de recurență devine

$$2\cos a_{n+1} = \sqrt{2(1 + \cos a_n)} = \sqrt{4\cos^2 \frac{a_n}{2}} = 2\cos \frac{a_n}{2},$$

deci

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \quad \text{pentru orice } n \geq 0, \qquad a_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Concluzionând,

$$a_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad x_n = 2\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \qquad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

de unde

$$2 - x_n = 2\left(1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 4\sin^2 \frac{\pi}{2^{n+2}} \quad \text{pentru orice } n \geq 0.$$

De aici,

$$L = \lim_{n\to\infty} a^n(2 - x_n) = 4 \lim_{n\to\infty} a^n \sin^2 \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{\pi^2}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{4}\right)^n \left(\underbrace{\frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}}_{\downarrow \atop 1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{4}\right)^n,$$

astfel că L este finită și nenulă dacă și numai dacă $a = 4$.

În concluzie, singura soluție este perechea $\left(4, \frac{\pi^2}{4}\right)$. ■

Soluție parțială (Mircea Rus). Se poate puncta parțial și următoarea soluție care arată că $a = 4$ e singura valoare posibilă, fără a se determina însă limita L (nu se exclude posibilitatea să nu existe soluții).

Pe baza relației de recurență, se demonstrează inductiv că

$$x_n \in [0, 2), \quad x_n < x_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

astfel că șirul este mărginit și strict crescător, deci convergent la $l \in (0, 2]$. Trecând la limită în relația de recurență, rezultă că $l = \sqrt{2 + l}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Revenind la relația de recurență, ea se rescrie sub forma

$$(2 - x_{n+1})(2 + x_{n+1}) = 2 - x_n \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

de unde

$$1 = \frac{L}{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n(2 - x_n)}{a^{n+1}(2 - x_{n+1})} = \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} (2 + x_{n+1}) = \frac{4}{a},$$

astfel că $a = 4$. ■

Problema 2. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică proprietățile:

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$f(x) \leq \mathrm{e}^x - 1, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Din (1), pentru $y = 0$, avem $f(x+0) \leq f(x) + f(0)$, deci $f(0) \geq 0$. În același timp, din (2) avem $f(0) \leq \mathrm{e}^0 - 1 = 0$, astfel că $f(0) = 0$.

Din (1), apoi din (2), avem

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \leq 2f\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1). \tag{3}$$

Reaplicând (1), apoi (3), rezultă:

$$f(x) \leq 2f\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2^2(\mathrm{e}^{\frac{x}{2^2}} - 1)$$

și prin inducție obținem

$$f(x) \leq 2^n(\mathrm{e}^{\frac{x}{2^n}} - 1), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Trecând la limită în (4) ($n \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$ fixat) avem

$$f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2^n}} - 1}{\frac{x}{2^n}} \cdot x = x, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Din (5) avem

$$f(x) + f(-x) \leq x + (-x) = 0 \tag{6}$$

iar din (1) avem

$$0 = f(0) = f(x-x) \leq f(x) + f(-x) \tag{7}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Din (6) și (7) rezultă că $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci f este funcție impară. Revenind la (5), avem acum $-f(x) = f(-x) \leq -x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci

$$f(x) \geq x, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Acum, din (5) și (8) rezultă că $f(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Funcția identitate verifică ambele condiții din enunț. ■

Observație: Problema se poate imediat generaliza, înlocuind funcția $\mathrm{e}^x - 1$ cu orice funcție g derivabilă în 0 care verifică $g(0) = 0$ și $g(x) \geq g'(0) \cdot x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (ultima condiție este verificată de orice funcție convexă). Soluția f va avea expresia: $f(x) = g'(0) \cdot x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Să se arate că pentru orice $n \geq 2$ există o mulțime infinită de matrice $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel ca pentru orice $A, B \in \mathcal{A}_n$ cu $A \neq B$ să avem:

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad \text{și} \quad A^2 \cdot B = B \cdot A^2.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Pentru $n = 2$, vom căuta matrice A pentru care $A^2 = \alpha I_2$ (evident, αI_2 comută cu orice matrice). Din teorema Cayley-Hamilton va fi suficient să avem $\mathrm{Tr} A = 0$. Alegem

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$$

și avem

$$M_a \cdot M_b = \begin{pmatrix} ab+1 & a-b \\ b-a & ab+1 \end{pmatrix} \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{Z},$$

de unde

$$M_a \cdot M_b \neq M_b \cdot M_a \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{Z} \text{ distincte.}$$

De asemenea, $M_a^2 = (a^2+1)I_2$ comută, evident, cu orice matrice $M_b \in \mathcal{A}_2$.

Pentru $n \geq 3$, definim mulțimea $\mathcal{A}_n$ prin *extensia* elementelor mulțimii $\mathcal{A}_2$ astfel:

$$\mathcal{A}_n = \{P_a : a \in \mathbb{Z}\}, \quad P_a = \left(\begin{array}{c|c} M_a & O_{2,n-2} \\ \hline O_{n-2,2} & I_{n-2} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Se verifică imediat că

$$P_a \cdot P_b = \left(\begin{array}{c|c} M_a \cdot M_b & O_{2,n-2} \\ \hline O_{n-2,2} & I_n \end{array}\right) \neq \left(\begin{array}{c|c} M_b \cdot M_a & O_{2,n-2} \\ \hline O_{n-2,2} & I_n \end{array}\right) = P_b \cdot P_a \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{Z} \text{ distincte,}$$

$$P_a^2 = \left(\begin{array}{c|c} (a^2+1)I_2 & O_{2,n-2} \\ \hline O_{n-2,2} & I_{n-2} \end{array}\right)$$

$$P_a^2 \cdot P_b = P_b \cdot P_a^2 = \left(\begin{array}{c|c} (a^2+1)M_b & O_{2,n-2} \\ \hline O_{n-2,2} & I_{n-2} \end{array}\right).$$

∎

Problema 4.

a). Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există numerele $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = a_n A + b_n I_2$.

b). Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_n, y_n \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n^2 + 10y_n^2 = 11^n$ și x_n, y_n să nu fie multipli de 11.

Vasile Pop, Mircea Rus, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Rezultatul de la punctul (a) se poate obține în mai multe moduri. O soluție se poate da direct prin inducție matematică și utilizând teorema Cayley-Hamilton.

O soluție ce ajută și la rezolvarea punctului (b) pornește de la reprezentarea

$$A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

și folosește egalitatea $A^n \cdot A = A \cdot A^n$ care conduce la $z_n = -10y_n$ și $w_n = x_n$, astfel că

$$A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ -10y_n & x_n \end{pmatrix} = y_n A + (x_n - y_n)\, I_2, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

De asemenea, egalitatea $A^{n+1} = A \cdot A^n$ devine

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 10y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{cu valorile inițiale} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \tag{1}$$

ceea ce, prin inducție matematică, dovedește că $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și încheie justificarea pentru (a).

Continuând ideea, avem

$$11^n = (\det A)^n = \det A^n = x_n^2 + 10y_n^2 \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Rămâne de arătat că x_n și y_n nu se divid cu 11. Folosind (1), avem:

$$x_{n+1} \equiv x_n + y_n - 11y_n \equiv x_n + y_n \equiv y_{n+1} \pmod{11}, \qquad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Deoarece $x_1 \equiv y_1 \equiv 1 \pmod{11}$, va rezulta în final din (2), prin inducție, că

$$x_n \equiv y_n \equiv 2^{n-1} \not\equiv 0 \pmod{11}, \qquad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru a ne asigura, la final, că $x_n, y_n \in \mathbb{N}$, este suficient să le înlocuim cu valorile lor absolute care vor verifica automat condițiile cerute. ■