COLEGIUL NAȚIONAL

GHEORGHE ȘINCAI

BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică “Argument”
Ediția a XI-a, 1–2 noiembrie 2019

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația de recurență:

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}, \quad n \geq 0, \qquad x_0 = 0.$$

Să se determine perechile de numere reale strict pozitive (a, L) astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} a^n(2-x_n) = L.$$

Problema 2. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică proprietățile:

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}$$

și

$$f(x) \leq \mathrm{e}^x - 1, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Problema 3. Să se arate că pentru orice $n \geq 2$ există o mulțime infinită de matrice $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel ca pentru orice $A, B \in \mathcal{A}_n$ cu $A \neq B$ să avem:

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad \text{și} \quad A^2 \cdot B = B \cdot A^2.$$

Problema 4.

a). Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există numerele $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = a_n A + b_n I_2$.

b). Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_n, y_n \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n^2 + 10y_n^2 = 11^n$ iar x_n, y_n să nu fie multipli de 11.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!