Concursul Interjudețean de Matematică “Argument”

Colegiul Național “Gheorghe Șincai” Baia-Mare

Ediția a XI-a, 2019

Clasa a X-a

Soluții

Problema 1. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x^3 - y^3) = xf(x^2) - yf(y^2) \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Luând $x = y = 0$ în (1) rezultă că $f(0) = 0$, de unde, mai departe:

$$y = 0 \Rightarrow f(x^3) = xf(x^2) \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Pe baza lui (2), relația (1) devine:

$$\begin{aligned} f\left(x^3 + y^3\right) &= f\left(x^3 - (-y)^3\right) = xf(x^2) - \left(-yf\big((-y)^2\big)\right) = xf(x^2) + yf(y^2) \\ &= f(x^3) + f(y^3) \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

astfel că

$$f(u+v) = f\left(\left(\sqrt[3]{u}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{v}\right)^3\right) = f\left(\left(\sqrt[3]{u}\right)^3\right) + f\left(\left(\sqrt[3]{v}\right)^3\right) = f(u) + f(v) \quad \text{pentru orice } u, v \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Deci funcția f este aditivă.

Din proprietatea de aditivitate, prin inducție se arată imediat că

$$f(nx) = n \cdot f(x) \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Mai departe, din (2):

$$f\big((x+n)^3\big) = (x+n)f\big((x+n)^2\big) \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \in \mathbb{N},$$

care, pe baza lui (3) și (4), se rescrie:

$$f(x^3) + 3n \cdot f(x^2) + 3n^2 \cdot f(x) + n^3 \cdot f(1) = (x+n)\left(f(x^2) + 2n \cdot f(x) + n^2 \cdot f(1)\right) \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

și care, după simplificări, se reduce la

$$2n \cdot \left(f\left(x^2\right) - x \cdot f(x)\right) + n^2 \cdot (f(x) - x \cdot f(1)) = 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Privită ca funcție de n (cu x fixat), expresia din membrul stâng al relației (5) este o funcție de grad cel mult 2 în n cu o infinitate de rădăcini, ceea ce înseamnă că este funcția constantă nulă. Astfel,

$$f\left(x^2\right) = x \cdot f(x) \quad \text{și} \quad f(x) = x \cdot f(1) \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

deci singurele soluții sunt funcțiile

$$f_a(x) = ax \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

cu $a \in \mathbb{R}$ constantă (se verifică imediat relația (1)). ■

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$ dacă și numai dacă pentru orice numere $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ cu $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n| \leq 1$ au loc inegalitățile

$$\left|\frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_2} + \ldots + \frac{a_n}{z_n}\right| \leq n \quad \text{și} \quad |a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n| \leq n. \tag{1}$$

Adrian Boțan, Botoșani

Soluție. Dacă $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$, atunci

$$\left|\frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_2} + \ldots + \frac{a_n}{z_n}\right| \leq \left|\frac{a_1}{z_1}\right| + \left|\frac{a_2}{z_2}\right| + \ldots + \left|\frac{a_n}{z_n}\right| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leq n$$
$$|a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n| \leq |a_1| \cdot |z_1| + |a_2| \cdot |z_2| + \ldots + |a_n| \cdot |z_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leq n.$$

Reciproc, fie $a_i := \frac{z_i}{|z_i|}$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Avem $|a_i| = 1$ iar prima inegalitate din (1) devine

$$\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|} \leq n. \tag{2}$$

Pentru $a_i := \frac{|z_i|}{z_i}$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ avem $|a_i| = 1$ iar a doua inegalitate din (1) devine

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| \leq n. \tag{3}$$

Combinând (2) și (3) obținem

$$m_a(|z_1|, \ldots, |z_n|) = \frac{|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|}{n} \leq 1 \leq \frac{n}{\frac{1}{|z_1|} + \frac{1}{|z_2|} + \ldots + \frac{1}{|z_n|}} = m_h(|z_1|, \ldots, |z_n|).$$

Deoarece, în general, $m_a(|z_1|, \ldots, |z_n|) \geq m_h(|z_1|, \ldots, |z_n|)$, rezultă că

$$m_a(|z_1|, \ldots, |z_n|) = m_h(|z_1|, \ldots, |z_n|) = 1,$$

ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$. ∎

Problema 3. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că imaginea oricărui interval închis I este un interval închis J iar raportul dintre lungimea lui J și lungimea lui I este o constantă $a > 0$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Fie $x < y$, $I = [x, y]$ și $f(I) = [u, v]$. Avem, astfel,

$$|f(x) - f(y)| \leq v - u = a(y - x),$$

de unde concluzionăm imediat că

$$|f(x) - f(y)| \leq a\,|x - y| \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Revenind la început, dacă $x_1, y_1 \in [x, y]$ astfel ca $f(x_1) = u$ și $f(y_1) = v$, atunci aplicăm (1) pentru x_1, y_1 și obținem

$$a(y - x) = v - u = f(y_1) - f(x_1) \leq a|y_1 - x_1| \leq a(y - x).$$

Deoarece în șirul de inegalități de mai sus toate vor fi egalități, rezultă că $\{x_1, y_1\} = \{x, y\}$, astfel că $f(x) = u$, $f(y) = v$ sau $f(x) = v$, $f(y) = u$. Astfel, inegalitatea din (1) este întotdeauna egalitate, ceea ce conduce la

$$f(x) = \pm ax + f(0), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

(luând pe $y = 0$).

Vom arăta mai departe că, fie

$$f(x) = ax + f(0), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

fie

$$f(x) = -ax + f(0), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Dacă prin absurd ar exista $x, y \in \mathbb{R}^*$ astfel ca

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + f(0) \\ f(y) &= -ay + f(0) \end{aligned}$$

atunci prin scădere obținem:

$$a\,|x - y| = |f(x) - f(y)| = a\,|x + y|\,,$$

deci

$$|x - y| = |x + y|\,,$$

ceea ce are loc dacă și numai dacă $x = 0$ sau $y = 0$ (contradicție). ■

Problema 4. Se consideră mulțimea $\mathcal{H}$ a tuturor șirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere complexe care verifică

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n+1} \in \{(1-\varepsilon)a_n + \varepsilon a_{n-1}, (1-\overline{\varepsilon})a_n + \overline{\varepsilon} a_{n-1}\} \quad \text{pentru orice } n \geq 1,$$

unde $\varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a). Să se arate că mulțimea termenilor tuturor șirurilor din $\mathcal{H}$ formează în planul complex o rețea plană de hexagoane regulate de latură 1.

b). Să se determine numerele naturale nenule N pentru care există un șir $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{H}$ astfel încât $a_N = 0$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

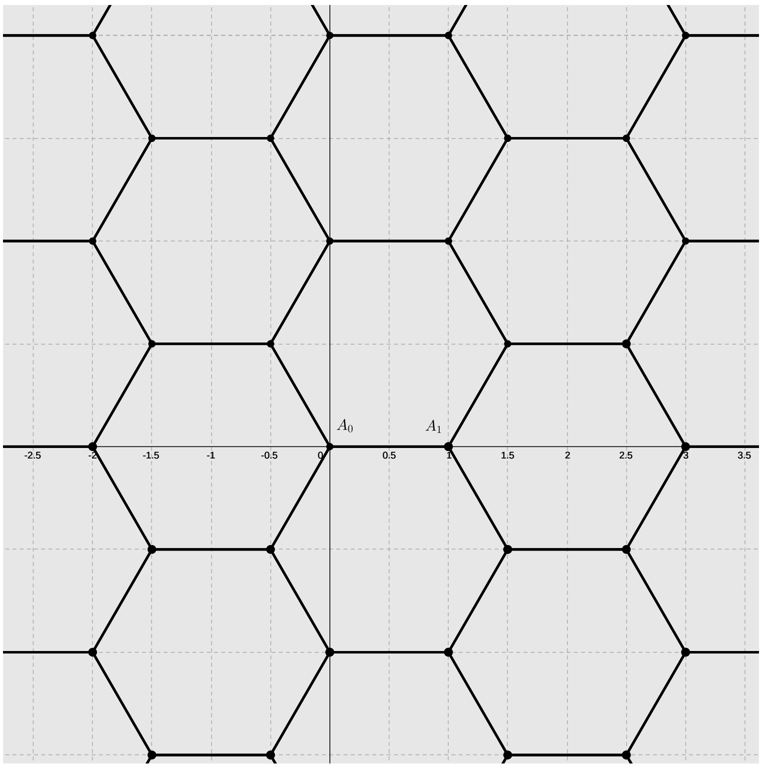
Soluție. a). Rețeaua hexagonală are prima latură A_0A_1, unde $A_0(0)$ și $A_1(1)$. Orice șir $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{H}$ verifică

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n-1}-a_n} \in \{\varepsilon, \overline{\varepsilon}\} \quad \text{pentru orice } n \geq 1,$$

ceea ce în planul complex înseamnă un drum în care orice pas A_nA_{n+1} verifică:

$$A_nA_{n+1} = |a_{n+1}-a_n| = |a_n - a_{n-1}| = \ldots = |a_1 - a_0| = 1$$
$$\mathrm{m}\left(\widehat{A_{n+1}A_nA_{n-1}}\right) = \arg \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n-1}-a_n} \in \{\arg\varepsilon, \arg\overline{\varepsilon}\} = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}.$$

Astfel, orice pas este de lungime 1 și cu o rotație de $\dfrac{2\pi}{3}$ sau $\dfrac{4\pi}{3}$ $\left(\text{echivalent, } -\dfrac{2\pi}{3}\right)$ față de pasul anterior.



b). Se arată că valorile admisibile N sunt $\{2k : k \in \mathbb{N},\ k \geq 3\}$.

Avem $\varepsilon^3 = 1$, $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} = \varepsilon^2$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Rezultă că orice șir $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{H}$ este unic caracterizat de un șir $(p_n)_{n\geq 1}$, cu $p_n \in \{-1, 1\}$ pentru orice $n \geq 1$, unde $a_{n+1} = (1-\varepsilon^{p_n})a_n + \varepsilon^{p_n} a_{n-1}$. Astfel,

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\varepsilon^{p_n}\right)\left(a_n - a_{n-1}\right) \quad \text{pentru orice } n \geq 1,$$

de unde

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n \varepsilon^{p_1+p_2+\ldots+p_n} \cdot (a_1 - a_0) = (-1)^n \varepsilon^{p_1+p_2+\ldots+p_n} \quad \text{pentru orice } n \geq 1. \tag{1}$$

În particular, după paritatea lui n avem:

$$a_{2n+1} - a_{2n} = \varepsilon^{p_1+\ldots+p_{2n}} \in \{1, \varepsilon, \overline{\varepsilon}\}, \qquad a_{2n} - a_{2n-1} = \varepsilon^{p_1+\ldots+p_{2n-1}} \in \{-1, -\varepsilon, -\overline{\varepsilon}\}.$$

Dacă notăm $\alpha_n = 2 \operatorname{Re} a_n = a_n + \overline{a_n}$ ($n \geq 0$), atunci obținem mai departe că

$$\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} \in \{-1, 2\}, \qquad \alpha_{2n} - \alpha_{2n-1} \in \{-2, 1\},$$

astfel că, modulo 3, avem

$$\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} = 2 \pmod 3, \qquad \alpha_{2n} - \alpha_{2n-1} = 1 \pmod 3.$$

Deoarece inițial $\alpha_0 = 0$ și $\alpha_1 = 2$, se obține în final că $\alpha_{2n} = 0$ (mod 3) și $\alpha_{2n+1} = 2$ (mod 3) pentru orice $n \geq 0$. Pentru ca $a_N = 0$, este necesar ca $\alpha_N = 0$, deci N va fi par.

De asemenea, dacă $a_N = 0$, atunci se poate construi mai departe a_n astfel încât $a_{N+6} = 0$, alegând $p_N = p_{N+1} = \ldots = p_{N+5} = 1$; într-adevăr, pe baza lui (1) aplicat succesiv, se obține

$$a_{N+6} = a_N + \varepsilon^{p_1+p_2+\ldots+p_N} \left(\underbrace{1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^5}_{=0} \right) = 0.$$

În final, se arată că $N = 2$ și $N = 4$ nu satisfac condiția $a_N = 0$ pentru niciun șir, iar valorile $N = 6$, $N = 8$, $N = 10$ verifică $a_N = 0$ pentru șiruri convenabil alese. Astfel, apelând (1) se obține:

$$a_2 = a_1 - \varepsilon^{p_1} = 1 - \varepsilon^{p_1} \neq 0 \quad \text{pentru orice } p_1 \in \{-1, 1\}.$$

Pentru $N = 4$, dacă $a_4 = 0$, atunci

$$0 = a_4 = a_3 - \varepsilon^{p_1+p_2+p_3} = a_2 + \varepsilon^{p_1+p_2} - \varepsilon^{p_1+p_2+p_3} = 1 - \varepsilon^{p_1} + \varepsilon^{p_1+p_2} - \varepsilon^{p_1+p_2+p_3},$$

de unde, înmulțind cu ε^{-p_1} și trecând la partea reală se obține:

$$0 = \operatorname{Re} 0 = \operatorname{Re}\left(\varepsilon^{-p_1} - 1 + \varepsilon^{p_2} - \varepsilon^{p_2+p_3}\right) = -\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} - \operatorname{Re} \varepsilon^{p_2+p_3},$$

astfel că $\operatorname{Re} \varepsilon^{p_2+p_3} = 2$, ceea ce nu poate avea loc pentru nicio alegere a valorilor p_2, p_3.

Se poate obține $a_6 = 0$, alegând $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1$, astfel că

$$a_6 = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^5 = 0.$$

Se poate obține $a_8 = 0$, alegând $p_1 = -1$, $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1$, $p_7 = -1$, astfel că

$$a_8 = 1 - \varepsilon^{-1} + 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^3 = 1 - \varepsilon^2 + 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 1 + \varepsilon - 1 = 0.$$

Se poate obține $a_{10} = 0$, alegând $p_1 = p_2 = -1$, $p_4 = \ldots = p_7 = 1$, $p_8 = -1$, $p_9 = 1$. ■