COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică “Argument”
Ediția a XI-a, 1–2 noiembrie 2019

Clasa a X-a

Problema 1. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x^3 - y^3) = xf(x^2) - yf(y^2) \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$ dacă și numai dacă pentru orice numere $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ cu $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n| \leq 1$ au loc inegalitățile

$$\left| \frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_2} + \ldots + \frac{a_n}{z_n} \right| \leq n \quad \text{și} \quad |a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n| \leq n.$$

Problema 3. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că imaginea oricărui interval închis I este un interval închis J iar raportul dintre lungimea lui J și lungimea lui I este o constantă $a > 0$.

Problema 4. Se consideră mulțimea $\mathcal{H}$ a tuturor șirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere complexe care verifică

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n+1} \in \{(1-\varepsilon)a_n + \varepsilon a_{n-1}, (1-\overline{\varepsilon})a_n + \overline{\varepsilon} a_{n-1}\} \quad \text{pentru orice } n \geq 1,$$

unde $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

a). Să se arate că mulțimea termenilor tuturor șirurilor din $\mathcal{H}$ formează în planul complex o rețea plană de hexagoane regulate de latură 1.

b). Să se determine numerele naturale nenule N pentru care există un șir $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{H}$ astfel încât $a_N = 0$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!