Concursul Interjudețean de Matematică "Argument"

Colegiul Național "Gheorghe Șincai" Baia-Mare

Ediția a XI-a, 2019

Clasa a IX-a

Soluții

Problema 1. Să se arate că pentru orice $n \geq 3$ există o infinitate de n-upluri $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de numere strict pozitive astfel încât

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$$

și $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 1$.

Cristian Litan, Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca

Mircea Rus, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluție. Este suficient să rezolvăm problema pentru $n = 3$, alegând apoi în cazul general $a_4 = a_5 = \ldots = a_n = 1$ și păstrând valorile a_1, a_2, a_3 obținute în cazul particular considerat.

De asemenea, în cazul $n = 3$ vom căuta, pentru simplificare, ca $a_2 = a_3$, astfel că problema se reduce la a determina numerele $a, b > 0$ astfel încât

$$a + 2b = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$$
$$ab^2 \neq 1.$$

Pentru a elimina din start situațiile când $ab^2 = 1$, se verifică

$$ab^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + 2b = b^2 + \frac{2}{b} \Leftrightarrow b^2 - \frac{1}{b^2} = 2\left(b - \frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \left(b + \frac{1}{b} - 2\right)\left(b - \frac{1}{b}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 \left(b - \frac{1}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$

Astfel, este suficient ca $b \neq 1$.

Ecuația în a și b se rescrie echivalent $a^2 + 2\left(b - \frac{1}{b}\right)a - 1 = 0$. Notăm $b - \frac{1}{b} = t$ iar $b \neq 1 \Leftrightarrow t \neq 0$, de unde $b^2 - tb - 1 = 0$. În final, determinând a și b în raport cu t, se obțin soluțiile strict pozitive:

$$\begin{cases} a = \sqrt{t^2+1} - t \\ b = \dfrac{\sqrt{t^2+4} + t}{2} \end{cases}.$$

În concluzie, pentru orice $t > 0$, $\left(\sqrt{t^2+1} - t, \dfrac{\sqrt{t^2+4}+t}{2}, \dfrac{\sqrt{t^2+4}+t}{2}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-3 \text{ de } 1}\right)$ reprezintă o soluție a problemei. ■

Problema 2. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația

$$f(x)f(y) = xy - f(x+y), \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluția autorului. Luăm în (1) $y = 1$ și obținem

$$f(x)f(1) = x - f(x+1), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Înlocuim în (2) pe x cu $x+1$ și obținem

$$f(x+1)f(1) = x + 1 - f(x+2), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă că

$$f(x+2) = x\,(1 - f(1)) + 1 + (f(1))^2\, f(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Pe de altă parte, dacă luăm în (1) $y = 2$, atunci obținem

$$f(x+2) = 2x - f(x)f(2), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Din (4) și (5) rezultă că

$$\left((f(1))^2 + f(2)\right) f(x) = x\,(1 + f(1)) - 1, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Dacă luăm $x = 0$ în (6), rezultă că $(f(1))^2 + f(2) \neq 0$, astfel că (6) conduce la

$$f(x) = ax + b, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ constante ce se vor determina astfel încât să se verifice relația (1).

Rescriind (1), obținem condiția echivalentă

$$(ax+b)(ay+b) = xy - a(x+y) - b, \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}$$

de unde, identificând coeficienții lui x, y, xy, respectiv termenii liberi între cei doi membri ai egalității obținem

$$a^2 = 1, \quad ab = -a, \quad b^2 = -b$$

cu soluțiile $a = \pm 1$, $b = -1$.

Se obțin, astfel, două funcții:

$$f_1(x) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad f_2(x) = -x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

■

Soluție alternativă (Mircea Rus). Rescriem (1) sub forma

$$f(x+y) = xy - f(x)f(y), \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Atunci, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem:

$$f\,(x+y+1) = f\,(x+(y+1)) = x(y+1) - f(x)f(y+1) = xy + x - f(x)y + f(x)f(y)f(1)$$

de unde

$$f(x)f(y)f(1) - f\left(x + y + 1\right) + (x + y + xy) = \left(1 + f(x)\right) y, \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Deoarece membrul stâng al egalității (3) este simetric în x, y, prin permutarea variabilelor se obține că

$$\left(1 + f(x)\right) y = \left(1 + f(y)\right) x, \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

astfel că

$$\frac{1 + f(x)}{x} = \frac{1 + f(y)}{y} = \text{constant}, \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Așadar, există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = ax - 1, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}^*$$

iar valoarea $f(0) = -1$ se obține luând în (4) $x = 1$, $y = 0$, astfel că

$$f(x) = ax - 1, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Mai departe, prin (5), relația (1) se reduce imediat la $a^2 = 1$, iar soluțiile sunt funcțiile

$$f_1(x) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad f_2(x) = -x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

■

Problema 3. Fie ABC un triunghi, punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$, și punctele A_2, B_2, C_2 pe segmentele $[B_1C_1]$, $[C_1A_1]$, respectiv $[A_1B_1]$.

Considerăm propozițiile:

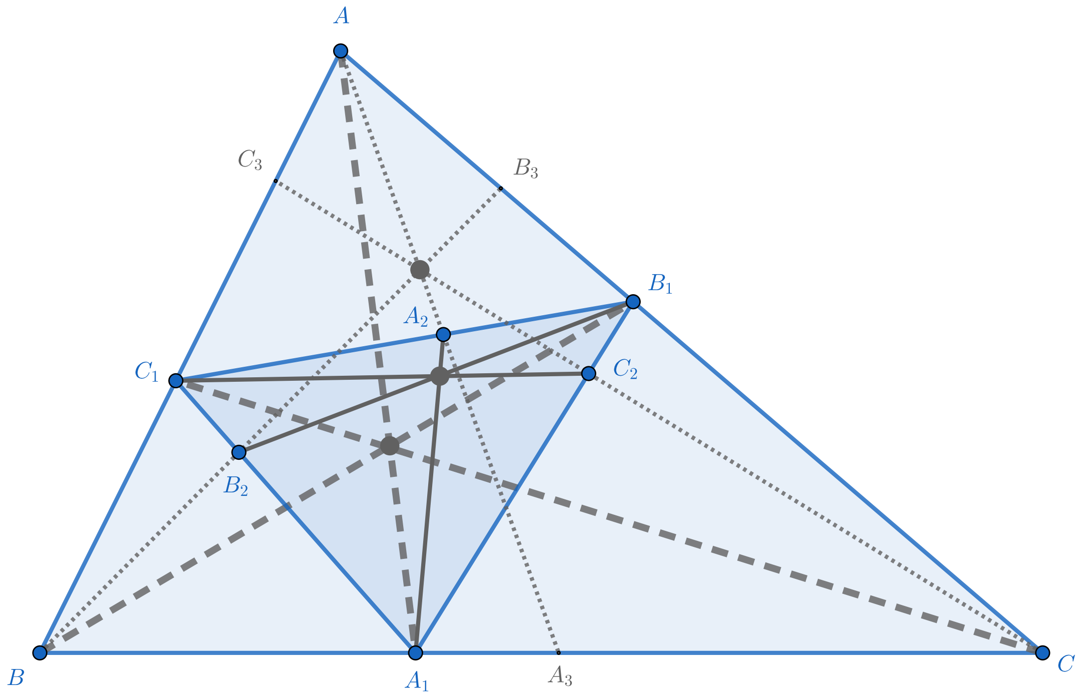
(P_1) Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

(P_2) Dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.

(P_3) Dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente..

Să se arate că din oricare două propoziții rezultă a treia.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca



Soluție.

Fie $t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3 \in [0,1]$ astfel ca:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{t_1}{1-t_1}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{t_2}{1-t_2}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{t_3}{1-t_3},$$

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{s_1}{1-s_1}, \quad \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \frac{s_2}{1-s_2}, \quad \frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{s_3}{1-s_3}.$$

Pentru orice punct X din plan notăm cu $\overline{r}_X$ vectorul său de poziție. Avem, astfel:

$$\overline{r}_{A_1} = (1-t_1)\overline{r}_B + t_1\overline{r}_C, \quad \overline{r}_{B_1} = (1-t_2)\overline{r}_C + t_2\overline{r}_A, \quad \overline{r}_{C_1} = (1-t_3)\overline{r}_A + t_3\overline{r}_B$$

$$\overline{r}_{A_2} = (1-s_1)\overline{r}_{B_1} + s_1\overline{r}_{C_1} = \underbrace{[(1-s_1)t_2 + s_1(1-t_3)]}_{\alpha_1}\overline{r}_A + \underbrace{s_1t_3}_{\beta_1}\overline{r}_B + \underbrace{(1-s_1)(1-t_2)}_{\gamma_1}\overline{r}_C$$

$$\overline{r}_{B_2} = (1-s_2)\overline{r}_{C_1} + s_2\overline{r}_{A_1} = \underbrace{(1-s_2)(1-t_3)}_{\alpha_2}\overline{r}_A + \underbrace{[(1-s_2)t_3 + s_2(1-t_1)]}_{\beta_2}\overline{r}_B + \underbrace{s_2t_1}_{\gamma_2}\overline{r}_C$$

$$\overline{r}_{C_2} = (1-s_3)\overline{r}_{A_1} + s_3\overline{r}_{B_1} = \underbrace{s_3t_2}_{\alpha_3}\overline{r}_A + \underbrace{(1-s_3)(1-t_1)}_{\beta_3}\overline{r}_B + \underbrace{[(1-s_3)t_1 + s_3(1-t_2)]}_{\gamma_3}\overline{r}_C.$$

Astfel, $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ vor fi coordonatele baricentrice ale punctelor A_2, B_2, C_2 relativ la triunghiul ABC. Dacă notăm cu A_3, B_3, C_3 intersecțiile dreptelor AA_2, BB_2, CC_2 respectiv cu $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, atunci:

$$\frac{BA_3}{A_3C} = \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{(1-s_1)(1-t_2)}{s_1t_3}$$
$$\frac{CB_3}{B_3A} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{(1-s_2)(1-t_3)}{s_2t_1}$$
$$\frac{AC_3}{C_3B} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \frac{(1-s_3)(1-t_1)}{s_3t_2}.$$

Conform *teoremei lui Ceva*, propozițiile P_1, P_2, P_3 devin:

$$P_1 : \underbrace{\frac{t_1}{1-t_1} \cdot \frac{t_2}{1-t_2} \cdot \frac{t_3}{1-t_3}}_{T} = 1$$
$$P_2 : \underbrace{\frac{s_1}{1-s_2} \cdot \frac{s_2}{1-s_2} \cdot \frac{s_3}{1-s_3}}_{S} = 1$$
$$P_3 : \underbrace{\frac{\gamma_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \cdot \frac{\beta_2}{\alpha_3}}_{=T \cdot S} = 1$$

Avem, evident:

$$T = S = 1 \Rightarrow T \cdot S = 1$$
$$T = T \cdot S = 1 \Rightarrow S = 1$$
$$S = T \cdot S = 1 \Rightarrow T = 1.$$

■

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ o mulțime nevidă cu proprietatea că oricare ar fi $x, y \in A$ avem fie $x + y \in A$, fie $x + y > n$.

Să se arate că media aritmetică a numerelor din mulțimea A nu poate fi mai mică decât $\dfrac{n+1}{2}$.

Soluție. Fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$ șirul ordonat crescător al elementelor lui A.

Demonstrăm că

$$x_k + x_{p+1-k} \geq n + 1, \quad \text{pentru orice } k \in \{1, 2, \ldots, p\}. \tag{1}$$

Presupunem prin absurd că există $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ astfel încât $x_k + x_{p+1-k} \leq n$. De aici avem:

$$x_{p+1-k} < \underbrace{x_1 + x_{p+1-k}}_{y_1} < \underbrace{x_2 + x_{p+1-k}}_{y_2} < \ldots < \underbrace{x_k + x_{p+1-k}}_{y_k} \leq n.$$

Conform proprietății din enunț, rezultă că $y_1, y_2, \ldots, y_k \in A$. Se obțin, astfel, k valori distincte din A mai mari decât x_{p+1-k}; însă în A sunt doar $k - 1$ valori mai mari decât x_{p+1-k} (contradicție), astfel că presupunerea făcută este falsă.

Concluzia rezultă acum direct din (1), însumând după toate valorile lui k. ■