COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudețean de Matematică "Argument"
Ediția a XI-a, 1–2 noiembrie 2019

Clasa a IX-a

Problema 1. Să se arate că pentru orice $n \geq 3$ există o infinitate de n-upluri $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de numere strict pozitive astfel încât

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$$

și $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 1$.

Problema 2. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația

$$f(x)f(y) = xy - f(x+y), \quad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 3. Fie ABC un triunghi, punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$, și punctele A_2, B_2, C_2 pe segmentele $[B_1C_1]$, $[C_1A_1]$, respectiv $[A_1B_1]$.
Considerăm propozițiile:
(P_1) Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.
(P_2) Dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.
(P_3) Dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente..
Să se arate că din oricare două propoziții rezultă a treia.

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ o mulțime nevidă cu proprietatea că oricare ar fi $x, y \in A$ avem fie $x + y \in A$, fie $x + y > n$.
Să se arate că media aritmetică a numerelor din mulțimea A nu poate fi mai mică decât $\dfrac{n+1}{2}$.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!