Revistă de matematică editată de Catedra de matematică
a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana.heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *http://www.sincaibm.ro/*

ISSN 1582– 3660

Asupra calculului primitivelor şi integralelor unor funcţii periodice

Dan Bărbosu şi Nicolae Muşuroia

Abstract. The paper is structured methodically and its main target is to find the solution to the antiderivatives on $\mathbb{R}$ of some periodics through a method which differs from the on in [7].
The main results is used both when calculating some derivatives and limits of a sequence defined through on integral as compared to the ordinary calculating methods.

1. Introducere

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie primitivabilă şi periodică nu rezultă că primitivele ei sunt periodice. De exemplu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos x$ este periodică dar nici o primitivă a ei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x + \sin x + c$, nu este periodică. In [7] se demonstrează următoarele rezultate.

Teorema 1.1. *Orice primitivă a unei funcţii periodice se poate exprima ca suma dintr-o funcţie periodică şi o funcţie liniară.*

Corolarul 1.2. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie primitivabilă, periodică de perioadă T. Dacă pentru o primitivă F a ei există $x \in \mathbb{R}$ aşa încât $F(x + T) = F(x)$, atunci primitivele lui f sunt periodice.*

Utilizând rezultatele de mai sus in [7] se propune un algoritm de calcul al unei primitive pe $\mathbb{R}$ a unei funcţii periodice de perioadă $T > 0$.

Folosind acest algoritm se demonstrează, printre altele că o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\cos x+2}$ este funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{3}},\ x \in \{(2k+1)\pi | k \in \mathbb{Z}\}; \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + k\pi\right), \text{dacă } x \in \underset{k\in\mathbb{Z}}{U}\big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big). \end{cases}$$

Scopul principal al lucrării este de a determina o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{a + \cos x} \tag{1.1}$$

unde $|a| > 1$ este dat, printr-o metodă diferită de cea din [7]. Rezultatul obţinut este aplicat în calculul integralei definite a funcţiei (1.1) pe intervale ce conţin puncte de forma $x = (2k + 1)\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ precum şi la calculul unor limite de şiruri definite prin integrală ce apar în lucrările [2], [3], [4], [5], [6]. In ultima parte a lucrării prezentăm calculul unor integrale definite în care intervine funcţia parte fracţionară [1], [3].

2. Rezultatul principal şi aplicaţii

Demonstrăm următoarea

Teorema 2.1. *Dacă $a > 1$, o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei* (1.1) *este $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(x - \operatorname{arctg}\frac{\sin x}{a+\sqrt{a^2-1}+\cos x}\right). \tag{2.1}$$

Demonstraţie. Cum $a > 1$, funcţia (1.1) este primitivabilă pe $\mathbb{R}$. Notăm

$$I = \int \frac{dx}{a+\cos x}.$$

Fie $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Cu schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, se obţine:

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arctg}\left(\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right). \tag{2.2}$$

Transformăm expresia (2.2) după care urmează

$$I = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left[x - 2\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right)\right].$$

Notând: $\alpha = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\beta = \frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, are loc

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left[x - 2\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right]. \tag{2.3}$$

Dar:

$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{a^2-1}-a+1}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{2.4}$$

$$1 + \alpha\beta = \frac{\sqrt{a^2-1}\,(1+\cos x) + (a-1)(1-\cos x)}{\sqrt{a^2-1}\,(1+\cos x)}. \tag{2.5}$$

Un calcul trigonometric elementar (dar nu foarte plăcut) conduce la egalitatea

$$\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta} = \frac{\sin x}{a+\sqrt{a^2-1}+\cos x}. \tag{2.6}$$

Din relaţia (2.3) şi (2.6) se obţine

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(x - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sin x}{a+\sqrt{a^2-1}+\cos x}\right).$$

Deoarece $a > 1$, se poate defini $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin (2.1).

Evident F e derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, adică F e o primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui f. □

Consecinţa 2.1. Dacă $a > 1$, o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{a+\sin x}$ este funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$G(x) = \frac{-1}{\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{\pi}{2} - x - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos x}{a+\sqrt{a^2-1}+\sin x}\right). \tag{2.7}$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema 2.1 pentru $x := \frac{\pi}{2} - x$. □

Consecinţa 2.2. Dacă $a < -1$, o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{a+\sin x}$ este funcţia $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$H(x) = -\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{\pi}{2} + x - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos x}{-a+\sqrt{a^2-1}-\sin x}\right). \tag{2.8}$$

Demonstraţie.

$$I_x = \int \frac{1}{a+\sin x} = -\int \frac{1}{-a-\sin x}dx = -\int \frac{1}{-a+\sin(-x)}dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $x = -t$, obţinem

$$\begin{aligned} I_t &= \int \frac{1}{-a+\sin t}\,dx = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{\pi}{2} - t - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos t}{-a+\sqrt{a^2-1}+\sin t}\right), \end{aligned}$$

deci

$$I(x) = -\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{\pi}{2} + x - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos x}{-a+\sqrt{a^2-1}-\sin x}\right).$$

□

Consecinţa 2.3. Dacă $a < -1$, o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{a+\cos x}$ este funcţia $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(\pi - x - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sin x}{-a+\sqrt{a^2-1}-\cos x}\right). \tag{2.9}$$

Demonstraţie.

$$I_x = \int \frac{1}{a+\cos x}dx = \int \frac{1}{a+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx.$$

Cu schimarea de variabilă $\frac{\pi}{2} - x = t$, obţinem

$$I_t = -\int \frac{1}{a + \sin t}\, dx \overset{(2.8)}{=}$$
$$= +\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{\pi}{2} + t - 2\operatorname{arctg}\frac{\cos t}{-a+\sqrt{a^2-1}-\sin t}\right),$$

deci

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(\pi - x - 2\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{-a+\sqrt{a^2-1}-\cos x}\right).$$

$\square$

Exemplul 1. Calculaţi:

$$I_x = \int \frac{1}{3+\cos x} dx,\ x \in [0, 2\pi].$$

<u>Metoda 1.</u>

Din $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ cu schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = t$, pentru $x \in [0, \pi)$ obţinem:

$$I(t) = \int \frac{1}{t^2+2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C,$$

deci o primitivă F pe intervalul $[0, \pi)$ este de forma

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c,\ x \in [0, \pi)$$

Analog

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c_1,\ x \in [\pi, 2\pi].$$

Atunci pe $[0, 2\pi]$, F este de forma:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c, & x \in [0, \pi) \\ c_2 \quad , & x = \pi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c_1, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Funcţia F fiind continuă in $x = \pi$, obţinem:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + c, & x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c, & x = \pi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Metoda 2. Folosind Teorema 2.1 pentru $a = 3$, obţinem primitiva

$$F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \operatorname{arctg}\frac{\sin x}{3 + 2\sqrt{2} + \cos x}\right)$$

Exemplul 2. Calculaţi:

$$I = \int_0^{3\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

Soluţie.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3\pi} \frac{1}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= 4\int_0^{3\pi} \frac{1}{3 + \cos 4x} dx = \int_0^{12\pi} \frac{1}{3 + \cos t} dt = \\ &= 6\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos t} dt = 6[F(2\pi) - F(0)] = 3\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

unde F este primitiva obţinută în Exemplul 1.

Exemplul 3. Calculaţi:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \sin x} dx$$

Soluţie. Folosind (2.7) obţinem că o primitivă F a funţiei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3+\sin x}$ este

$$F(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - x - 2\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{3 + 2\sqrt{2} + \sin x}\right),$$

iar

$$I = F(2\pi) - F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exemplul 4. Calculaţi:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{1}{3\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx.$$

Soluţie.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{1}{3\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplul 5. Calculaţi:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)} dx$$

Soluţie.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2+\cos x} - \frac{1}{3+\cos x} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x - \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{2+\sqrt{3}+\cos x} \right) \Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{2+2\sqrt{2}+\cos x} \right) \Bigg|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Exemplul 6. Determinaţi o primitivă a funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{-2+\sin x}.$$

Soluţie.

$$I_x = \int \frac{1}{-2+\sin x} dx = -\int \frac{1}{2+\sin(-x)} dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $x = -t$, obţinem:

$$I_t = \int \frac{1}{2+\sin t} dt \overset{(2.7)}{=} -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - t - 2 \operatorname{arctg} \frac{\cos t}{2+\sqrt{3}+\sin t} \right),$$

deci

$$I_x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + x - 2 \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{2+\sqrt{3}-\sin x} \right).$$

Exemplul 7. Calculaţi:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{-2+\cos x} dx.$$

Soluţie.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2+\cos x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2+\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{-2+\sin t} dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-2+\sin t} dt = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Prezentăm în continuare aplicaţii la calculul limitelor unor şiruri definite prin integrală.

Argument 20

Aplicaţia 1. [6] Calculaţi:

$$l = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{3+\cos x} dx.$$

Soluţie. Fie $I(n) = \int_0^n \frac{1}{3+\cos x} dx$. Aplicând formula Leibniz-Newton şi Teorema 2.1 se obţine

$$I(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(n - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{3 + 2\sqrt{2} + cosn} \right)$$

de unde $l = +\infty$.

Aplicaţia 2. [4,5] Calculaţi:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n \frac{1}{2+\cos x} dx.$$

Soluţie. Dacă $I(n) = \int_0^n \frac{1}{2+\cos x} dx$, după Teorema 2.1 cu $a = 2$, rezultă

$$I(n) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(n - \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{2 + \sqrt{3} + \cos n} \right).$$

Deci $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} I(n) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aplicaţia 3. [2,3,4,5] Calculaţi:

$$l = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{dx}{1 + n^2 \cos^2 x}.$$

Soluţie. Fie $I(n) = \int_0^n \frac{dx}{1+n^2\cos^2 x}$. Se obţine succesiv

$$I(n) = \int_0^n \frac{1}{1 + n^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}} dx = \int_0^n \frac{2}{n^2 + 2 + n^2 \cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \int_0^{2n} \frac{dx}{\frac{n^2+2}{n^2} + \cos x}.$$

Aplicând Teorema 2.1 cu $a = \frac{n^2+2}{n^2}$ are loc

$$I(n) = \frac{1}{\sqrt{4n^2+4}} \left\{ 2n - 2 \operatorname{arctg} \frac{n^2 \sin 2n}{n^2 + 2 + \sqrt{4n^2+4} + n^2 \cos 2n} \right\}.$$

Prin urmare $l = 1$

Aplicaţia 4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{1}{3 + \cos nx} dx.$$

Soluţie.

$$I_n = \int_a^b \frac{1}{3+\cos nx}dx = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} \frac{1}{3+\cos t}dt =$$

$$= \frac{1}{n}\big[F(nb)-F(na)\big] \overset{(2.1)}{=} \frac{1}{n}\Bigg[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(nb - \operatorname{arctg}\frac{\sin b}{3+2\sqrt{2}+\cos nb}\right)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(na - \operatorname{arctg}\frac{\sin na}{3+2\sqrt{2}+\cos na}\right)\Bigg].$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\Bigg[\frac{b-a}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sin nb}{3+2\sqrt{2}+\cos nb}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}n}\operatorname{arctg}\frac{\sin na}{3+2\sqrt{2}+\cos na}\Bigg]$$

$$= \frac{b-a}{2\sqrt{2}}.$$

Observaţii

(1) Aplicaţia 1 are o soluţie complet diferită în [6].

(2) Aplicaţia 3 este problema 4 propusă de profesor univ. dr. Mircea Ivan la testul de selecţie al echipei Universităţii Tehnice din Cluj-Napoca pentru participarea la SEEMOUS 2016.

In [2] se prezintă o soluţie complet diferită a ei precum şi următoarea generalizare: dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este continuă, are loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{1+n^2\cos^2 x}dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

(3) Se ştie că, dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T>0$ [6], atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(nx)dx = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)dx$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$. Am preferat să calculăm această limită, în caz particular, utilizând rezultatul (2.1) din această lucrare.

Bibliografie

[1] Furdui, O., *Limits, Series and Fractional Parts Integrals*, Problems in Mathematical Analysis, Springer, New-York, 2013

[2] Furdui, O., Ivan, M. şi Sântămărian, A., *A note on a UTCN SEEMOUS selection test problem*, GMA, **34** (2016), No. 3-4, 34–39

[3] Ivan, M. şi alţii, *Teste Grilă de Matematică*, Admitere 2016, UT PRESS, Cluj-Napoca, 2016
[4] Ivan, M. şi alţii, *Teste Grilă de Matematică*, Admitere 2017, UT PRESS, Cluj-Napoca, 2017
[5] Ivan, M. şi alţii, *Teste Grilă de Matematică*, Admitere 2018, UT PRESS, Cluj-Napoca, 2018
[6] Iurea, Gh., *Proprietăţi ale funcţiilor periodice*, Recreaţii Matematice XII, No. 2, 118–122
[7] Niculescu, L., *Metode de calcul a primitivelor unor funcţii periodice*, Matematica. Teme pregătitoare pentru olimpiade, Ed. Valeriu, 2002, 129–136

Conf. univ. dr., Centrul Universitar Nord Baia Mare,
Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Asupra unor inegalităţi ale lui Ion Ionescu

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Gheorghe Boroica şi Nicolae Muşuroia

Omagiu lui Ion Ionescu, unul dintre fondatorii Gazetei Matematice, în anul 1895

Abstract. This article aims at broadening the well-known inequalities Ionescu–Weitzenböck and Nesbit. The main results can be found in Theorem 1 and Theorem 2.

Inegalitatea

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\cdot S, \tag{I-W}$$

valabilă în orice triunghi ABC, a fost publicată de Ion Ionescu în anul 1897, de Roland Weitzenböck în anul 1919 şi în anul 1940 de D.V. Ionescu.

Inegalitatea

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2},\quad x,y,z\in\mathbb{R}_+^* \tag{N-I}$$

a fost publicată de Nesbitt în anul 1903 şi în anul 1926 de Ion Ionescu.

Scopul acestui articol este de a extinde aceste inegalităţi. Rezultatele principale sunt cuprinse în Teorema 1 şi Teorema 2.

Pentru început enunţăm câteva inegalităţi şi relaţii cunoscute, la care vom apela în cele ce urmează.

1. $$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geq 6,\ \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}_+^*.$$

2. Inegalitatea lui Bergström

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{a_i}\geq\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i},$$

unde $x_k\in\mathbb{R}$, $a_k>0$, $k=\overline{1,n}$.

3. Inegalitatea lui Mitrinović
   În orice triunghi ABC avem: $p\geq 3\sqrt{3}\cdot r$
4. Inegalitatea lui T. Doucet (1872)
   În orice triunghi ABC are loc: $4R+r\geq p\cdot\sqrt{3}$
5. Inegalitatea lui Tsintsifas
   În orice triunghi ABC avem:

$$T_1:\frac{x}{y+z}\,a^2+\frac{y}{z+x}\,b^2+\frac{z}{x+y}\,c^2\geq 2\sqrt{3}\cdot S$$

$$T_2:\frac{x}{y+z}\,a^4+\frac{y}{z+x}\,b^4+\frac{z}{x+y}\,c^4\geq 8S^2,\quad\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$$

6. Inegalitatea Bătineţu-Giurgiu

$$\frac{y+z}{x}\,a^2+\frac{z+x}{y}\,b^2+\frac{x+y}{z}\,c^2\ge 8\sqrt{3}\,S,\quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$$

7. În orice triunghi ABC au loc

$$a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr)$$
$$ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr$$

(G.M. vol. XLVIII (1942–1943), pag. 334)

Fie $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, $x_k\in\mathbb{R}_+^*$, $k=\overline{1,n}$.
Notăm $X_n(2)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2;\ X_n=X_n(1)=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

Teorema 1. *Dacă* $t,\ u\in\mathbb{R}_+^*$, $n\in\mathbb{R}^*\backslash\{1,2\}$, $x_k,y_k\in\mathbb{R}_+^*$, $k=\overline{1,n}$, *astfel încât* $tX_n>u\cdot\max\limits_{1\le k\le n}x_k$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^n\frac{x_k\cdot y_k^2}{t\cdot X_n-u\cdot x_k}\ge\frac{1}{u}\left(\frac{t\cdot Y_n^2}{nt-u}-Y_n(2)\right).$$

Demonstraţie. Avem:

$$\sum_{k=1}^n\frac{x_k\cdot y_k^2}{tX_n-u\cdot x_k}=\frac{1}{u}\cdot\sum_{k=1}^n\frac{ux_k}{tX_n-u\cdot x_k}\,y_k^2$$
$$=\frac{1}{u}\cdot\sum_{k=1}^n\frac{t\cdot X_n-(tX_n-ux_k)}{tX_n-ux_k}\,y_k^2$$
$$=\frac{t}{u}\,X_n\cdot\sum_{k=1}^n\frac{y_k^2}{tX_n-ux_k}-\frac{1}{u}\sum_{k=1}^n y_k^2\overset{Bergström}{\ge}\frac{t}{u}\,X_n\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^n y_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^n(tX_n-ux_k)}-\frac{Y_n(2)}{u}=$$
$$=\frac{1}{u}\left(\frac{tY_n^2}{t\cdot n-u}-Y_n(2)\right).$$

Dacă $n=3$, $x_k>0$, $y_k>0$, $k=\overline{1,3}$ şi $t(x_1+x_2+x_3)>u\cdot\max(x_1,x_2,x_3)$, avem

$$\frac{x_1y_1^2}{t(x_1+x_2+x_3)-ux_1}+\frac{x_2y_2^2}{t(x_1+x_2+x_3)-ux_2}+\frac{x_3y_3^2}{t(x_1+x_2+x_3)-ux_3}$$
$$\ge\frac{1}{u}\left[\frac{t(y_1+y_2+y_3)^2}{3t-u}-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\right].$$

Consecinţa 1. dacă $n=3$ şi $y_1=y_2=y_3=1$, obţinem:

$$\frac{x_1}{t(x_1+x_2+x_3)-ux_1}+\frac{x_2}{t(x_1+x_2+x_3)-ux_2}+\frac{x_3}{t(x_1+x_2+x_3)-ux_3}\ge\frac{3}{3t-u}$$

Consecinţa 2. Dacă $n = 3$, $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ şi $t = u = 1$, obţinem:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}, \quad \text{adică (N-I)}$$

Consecinţa 3. Dacă $n = 3$, $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $y_1 = a$, $y_2 = b$, $y_3 = c$ cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, şi $t = u = 1$, obţinem:

$$\frac{x}{y+z}\,a^2 + \frac{y}{z+x}\,b^2 + \frac{z}{x+y}\,x^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{2} - (a^2+b^2+c^2) \overset{7)}{=}$$

$$= 2p^2 - 2(p^2 - r^2 - 4Rr) = 2r(4R+r) \overset{Doucet}{\geq} 2r\left(p\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}\,S,$$

adică am obţinut prima inegalitate a lui Tsintsifas.

Observaţie. Dacă în inegalitatea lui Tsintsifas luăm $x = y = z$, obţinem că

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S, \quad \text{adică inegalitatea (I-W)}$$

Consecinţa 4. (Generalizare a inegalităţii lui Tsintsifas) Dacă $m, n \in \mathbb{R}_+$, $m + n$, $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, atunci în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\frac{x}{y+z}(ma+nb)^2 + \frac{y}{z+x}(mb+nc)^2 + \frac{z}{(x+y)^2}(mc+na)^2 \geq 2(m+n)^2\sqrt{3}\,S.$$

Demonstraţie. Pentru $n = 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $y_1 = ma + nb$, $y_2 = mb + nc$, $y_3 = mc + na$ şi $t = u = 1$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, obţinem:

$$\frac{x}{y+z}(ma+nb)^2 + \frac{y}{x+z}(mb+nc)^2 + \frac{z}{x+y}(mc+na)^2 \geq$$

$$\geq \frac{(ma+nb+mb+nc+mc+na)^2}{2} - \left[(ma+nb)^2 + (mb+nc)^2 + (mc+na)^2\right] =$$

$$= \frac{(m+n)^2(a+b+c)^2}{2} - (m^2+n^2)(a^2+b^2+c^2) - 2mn(ab+ac+bc)$$

$$= 2(m+n)^2p^2 - 2(m^2+n^2)(p^2 - r^2 - 4Rr) - 2mn(p^2 + r^2 + 4Rr)$$

$$= 2mnp^2 + 2(m^2+n^2-mn)r(4R+r) \overset{Mitrinović}{\geq}$$

$$\geq 2mnp \cdot 3\sqrt{3}r + 2(m^2+n^2-mn)r(4R+r) \overset{Doucet}{=}$$

$$= 6\sqrt{3}\,mnpr + 2(m^2+n^2-mn)rp\sqrt{3}$$

$$= 2(m^2+n^2+2mn)pr\sqrt{3} = 2(m+n)^2\sqrt{3}\cdot S.$$

Observaţie. Pentru $m = 1$, $n = 0$ sau $m = 0$, $n = 1$, obţinem prima inegalitate a lui Tsintsifas.

Teorema 2. *Dacă* $t, u, w, x_k, y_k \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, k = \overline{1,n}$, $n \geq 3$, $v \in \mathbb{R}_+$, $tX_n > u \max\limits_{1\leq k\leq n} x_k$, *atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{tX_n - ux_k}{vX_n + wx_k}\,y_k^2 \geq \frac{tw+uv}{w(nv+w)}\,Y_n^2 - \frac{u}{w}\,Y_n(2).$$

Demonstraţie.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{tX_k - ux_k}{vX_n + wx_k}\, y_k^2 = \frac{u}{w} \sum_{k=1}^{n} \frac{twX_n - uwx_k}{uvX_n + uwx_k}\, y_k^2$$

$$= \frac{u}{w} \sum_{k=1}^{n} \frac{twX_n + uvX_n - (uvX_n + uwx_k)}{uvX_n + uwx_k}\, y_k^2$$

$$= \frac{u}{w}\,(tw + uv)X_n \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{u(vX_n + wx_k)} - \frac{u}{w} \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \overset{Bergström}{\geq}$$

$$\geq \frac{(tw + uv)X_n}{w} \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} (vX_n + wx_k)} - \frac{u}{w}\, Y_n(2) =$$

$$= \frac{(tw + uv)X_n}{w} \cdot \frac{Y_n^2}{nvX_n + wX_n} - \frac{u}{w}\, Y_n(2)$$

$$= \frac{tw + uv}{w(nv + w)}\, Y_n^2 - \frac{n}{w}\, Y_n(2).$$

Observaţie. Pentru $n = 3$, $x_k > 0$, $y_k > 0$, $k = \overline{1,3}$ cu

$$t(x_1 + x_2 + x_3) > u \cdot \max(x_1, x_2, x_3)$$

obţinem:

$$\frac{t(x_1+x_2+x_3) - ux_1}{v(x_1+x_2+x_3) + wx_1}\, y_1^2 + \frac{t(x_1+x_2+x_3) - ux_2}{v(x_1+x_2+x_3) + wx_2} + \frac{t(x_1+x_2+x_3) - ux_3}{v(x_1+x_2+x_3) + wx_3}$$

$$\geq \frac{tw + uv}{w(3v + w)}\,(y_1 + y_2 + y_3)^2 - \frac{u}{w}\,(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Consecinţa 1. Dacă $n = 3$, $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, atunci:

$$\frac{t(x_1+x_2+x_3) - ux_1}{v(x_1+x_2+x_3) + wx_1} + \frac{t(x_1+x_2+x_3) - ux_2}{v(x_1+x_2+x_3) + wx_2} + \frac{t(x_1+x_2+x_3) - ux_3}{v(x_1+x_2+x_3) + wx_3}$$

$$\geq \frac{tw + uv}{w(3v + w)}\, 9 - \frac{u}{w}\, 3.$$

Consecinţa 2. Dacă $n = 3$, $y_1 = y_2 = y_3 = 1$, $t = u = 1 = u = w$, atunci:

$$\frac{x_2 + x_3}{2x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_1 + x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} + \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + 2x_3} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Consecinţa 3. Dacă $n = 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $y_1 = a$, $y_2 = b$, $y_3 = c$, unde

a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, şi $t = u = w = 1$, $v = 0$, obţinem:

$$\begin{aligned}\frac{y+z}{x}a^2 + \frac{x+z}{y}b^2 + \frac{x+y}{z}c^2 &\geq (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\\ &= 4p^2 - 2(p^2 - r^2 - 4Rr) = 2p^2 + 2r^2 + 8Rr\\ &= 2p^2 + 2r(r+4R) \overset{Mitrinović}{\geq} 2p \cdot 3\sqrt{3}\,r + 2r(4R+r)\\ &= 6\sqrt{3}\,pr + 2r(4R+r) \overset{Doucet}{\geq} 6\sqrt{3}\,S + 2r \cdot p\sqrt{3}\\ &= 6\sqrt{3}\,S + 2\sqrt{3}\,S = 8\sqrt{3}\,S,\end{aligned}$$

deci am obţinut

$$\frac{y+z}{x}a^2 + \frac{x+z}{y}b^2 + \frac{x+y}{z}c^2 \geq 8\sqrt{3}\,S,$$

adică inegalitatea Bătineţu-Giurgiu.

Consecinţa 4. (Generalizarea inegalităţii Bătineţu-Giurgiu) Dacă $m, n \in \mathbb{R}_+$, $m+n$, $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, atunci în orice triunghi ABC avem:

$$\frac{y+z}{x}(ma+nb)^2 + \frac{x+z}{y}(mb+nc)^2 + \frac{x+y}{z}(mc+na)^2 \geq 8(m+n)^2 S\sqrt{3}.$$

Demonstraţie. Luăm în Teorema 2, $n = 3$, $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $y_1 = ma + nb$, $y_2 = mb + nc$, $y_3 = mc + na$, $t = u = w = 1$, $v = 0$, şi obţinem:

$$\begin{aligned}&\frac{y+z}{x}(ma+nb)^2 + \frac{x+z}{y}(mb+nc)^2 + \frac{x+y}{z}(mc+na)^2\\ &\geq (m+n)^2(a+b+c)^2 - (m^2+n^2)(a^2+b^2+c^2) - mn(ab+ac+bc)\\ &= 4(m+n)^2p^2 - 2(m^2+n^2)(p^2 - r^2 - 4Rr) - 2mn(p^2 + r^2 + 4Rr)\\ &= 2(m^2+n^2+3mn)p^2 + 2(m^2+n^2-mn)r(4R+r) \overset{Mitrinović}{\geq}\\ &\geq 2(m^2+n^2+3mn)p \cdot 3\sqrt{3}\,r + 2(m^2+n^2-mn)r(4R+r) \overset{Doucet}{\geq}\\ &\geq 2(m^2+n^2+3mn)pr \cdot 3\sqrt{3} + 2(m^2+n^2-mn)rp\sqrt{3}\\ &= (68m^2 + 8n^2 + 16mn)S\sqrt{3} = 8(m+n)^2 S\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Pentru $m = 0$, $n = 1$ sau $m = 1$, $n = 0$, obţinem inegalitatea Bătineţu-Giurgiu.

Bibliografie

[1] Bătineţu-Giurgiu, M.D. şi Stanciu, N., *Inegalităţi de tip Ionescu-Weitzenböck*, G.M., **118**(1), 2013

[2] Bătineţu-Giurgiu, M.D. şi Sitaru, D., *A retrospective of the Ionescu-Nesbit inequality*, RMM - Roumanian Mathematical Magazine, (20) 2018

[3] Bătineţu-Giurgiu, M.D. şi Stanciu, N., *O extindere şi o rafinare a inegalităţii lui Nesbit*, R.M.T, **91**(1), 2012

[4] Bătineţu-Giurgiu, M.D., Sitaru, D. şi Stanciu, N., *Aplications of Tsintsifas'inequality*, RMM, (19) 2017, 24–25

[5] Muşuroia, N., Boroica, Gh., Pop, V., Heuberger, D. şi Bojor, F., *Matematica de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă*, Ed. Paralela 45, 2013

Profesor, Bucureşti

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Argument 20

Un exemplu de corp ordonat nearhimedean

Costel Chiteş şi Daniela Chiteş

Abstract. Gândirea algoritmică este des utilizată de elevi. Axiomatica geometriei euclidiene (D. Hilbert, D. Birkhoff, etc) se studiază opţional. Este un bun prilej de a construi teoreme, pe baza strict a axiomelor sau a teoremelor deja demonstrate. La algebră, axiomatica lui Peano este amintită în treacăt şi, prilejuri de a construi noi obiecte algebrice se află în construcţia inelului de polinoame peste un inel comutativ dat, sau în construcţia mulţimii numerelor complexe pe baza lui $\mathbb{R}$. Din această perspectivă, autorii şi-au propus să evidenţieze importanţia axiomaticii mulţimii numerelor reale, cât şi evidenţierea unui corp ordonat care nu verifică proprietatea lui Arhimede.

A) Generalităţi

Structurile mulţimii numerelor reale sunt: 1) algebrică; 2) de ordine; 3) topologică.

Axiomele 1-13 evidenţiază proprietăţile unui corp comutativ complet ordonat. Axioma 13, fiind axioma lui Cantor (orice parte nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$ are margine superioară) este o axiomă puternică în comparaţie cu: α) proprietatea lui Arhimede; β) principiul intervalelor închise şi incluse; γ) orice şir Cauchy este convergent. Pentru a justifica afirmaţia, vom utiliza

Teorema 1. *Fie K un corp ordonat. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) K este complet ordonat;

b) (b_1) K este arhimedean şi (b_2) orice şir descrescător de intervale închise de lungimi tinzând la zero are intersecţia nevidă;

c) (c_1) K este arhimedean şi (c_2) orice şir Cauchy din K este convergent.

Demonstraţia se află, de exemplu, în [2], pag. 24-30.

Vom demonstra implicaţia: $a) \Rightarrow b_1)$

Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Vom demonstra existenţa unui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x < ny$.
Cazul $x \leq 0$ este banal, deoarece pentru $n = 1$ afirmaţia este adevărată.
Cazul $x > 0$. Presupunem prin absurd contrariul, adică $nx \leq y$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Mulţimea $A = \{nx | n \in \mathbb{N}^*\}$ este majorată de y şi conform axiomei lui Cantor (axioma 13), există $\sup(A) = \alpha$. Cum $\alpha - x$ nu este majorant al mulţimii A (deoarece $\alpha - x < \alpha$ şi α este cel mai mic majorant al lui A), deducem că există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha - x < px \leq y$, de unde $\alpha < (p+1)x$, contradicţie cu ipoteza. $\square$

Remarcă

1. "Fiind date două mărimi de acelaşi fel, neegale, există un multiplu al celei mai mici, care întrece pe cea mai mare" ($*$), [1], pag. 149-150.

Acest principiu, dat de Eudox (405-350 î.Hr.), a stat la baza "metodei exhaustive" utilizate sistematic de Arhimede, metodă care se află la originile calculului integral. Denumirea de "Axiomă a lui Arhimede" a fost dată de O. Stolz în 1883. În sistemul

axiomatic al geometriei, dat de David Hilbert în anul 1899, axioma $(*)$ face parte din grupa axiomelor de continuitate.
Eudox din Cnid a fondat o importantă şcoală de matematică, astronomie şi filosofie. Fiind apreciat de concetăţenii săi, va fi numit "*endoxos*", adică ilustrul.

2. Ne face plăcere să amintim, din lucrarea [18] pag. 50, următorul exemplu. "Se poate goli un ocean folosind în mod repetat o pipetă".
Pentru $x =$ capacitatea pipetei, $y =$ cantitatea de apă a oceanului, există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $nx > y$.

3. Construcţii riguroase ale unui corp complet ordonat s-au realizat în secolul al XIX-lea de către: Georg Cantor (clase de şiruri Cauchy de numere raţionale), Karl Weierstrass (cu ajutorul fracţiilor zecimale), R. Dedekind (cu ajutorul tăieturilor), etc. Numerele fiind cunoscute din Antichitate, erau considerate, în special de greci, ca fiind măsuri de lungimi, de arii, de volume. Axiomatica mulţimii numerelor naturale a fost dată de G. Peano în 1889, apoi $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ s-au construit algebric. Orice construcţie a lui $\mathbb{R}$, bazată pe $\mathbb{Q}$, se realizează prin analiză matematică. $\mathbb{C}$ se construieşte algebric din $\mathbb{R}$.
Mai mult, între orice două corpuri complet ordonate există un izomorfism crescător. De aici rezultă că oricare construcţie a unui corp complet ordonat realizează doar o altă "copie" a lui $\mathbb{R}$.

Axiome de ordine
Vom prezenta o metodă, echivalentă cu cea standard, prin care putem defini corpurile ordonate.

Să considerăm $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ (ce verifică axiomele 1-9).
K este *corp ordonat*, dacă există o parte $P \subset K$ ce verifică axiomele următoare:

i) $P + P \subset P$; *ii)* $P \times P \subset P$; *iii)* pentru oricare $x \in P$, exact una dintre afirmaţii este adevărată $x \in P$, $x = 0$, $-x \in P$.
Elementele lui P se numesc pozitive. Dacă $-x \in P$, x se numeşte negativ.

Definiţie. Simbolurile $<$ şi $>$ (citite "mai mic" şi "mai mare") se definesc astfel:
$x < y$ dacă şi numai dacă $y - x \in P$;
$x > y$ dacă şi numai dacă $x - y \in P$.
Acestea sunt inegalităţi stricte.

Definiţie. Simbolurile $\leq$ şi $\geq$ (citite "mai mic sau egal" şi "mai mare sau egal") se definesc astfel:
$x \leq y$ dacă şi numai dacă $x < y$ sau $x = y$;
$x \geq y$ dacă şi numai dacă $x > y$ sau $x = y$.

Remarcă. $x < y$ şi $y > x$ sunt echivalente; $x \leq y$ şi $y \geq x$ sunt echivalente.
Prin negarea lui $x < y$ (sau $x \leq y$) se obţin $x \geq y$ (sau $x > y$).
Vom nota $K = \mathbb{R}$; $\mathbb{R}_+ = P \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_- = (-P) \cup \{0\}$.

Propoziţia 1. *Fie corpul ordonat $\mathbb{R}$, cu relaţia binară $\leq$ definită prin: $x \leq y$ dacă $y - x \in \mathbb{R}_+$. Relaţia $\leq$ introdusă este o relaţie de ordine totală, compatibilă cu operaţiile de adunare şi de înmulţire.*

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem $x \leq x$, deoarece $x - x = 0 \in \mathbb{R}_+$, deci "$\leq$" este reflexivă.

Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, $y \leq x$; atunci $y - x \in \mathbb{R}_+$, $x - y \in \mathbb{R}_+$. Putem scrie $y - x \in \mathbb{R}_+$, $-(y-x) \in \mathbb{R}_+$ şi, conform *iii*), deducem $x = y$, deci "$\leq$" este antisimetrică.

Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, $y \leq z$; atunci $y - x \in \mathbb{R}_+$, $z - y \in \mathbb{R}_+$ şi, conform cu *i*), deducem $(y-x)+(z-y) \in \mathbb{R}_+$, deoarece $(z-x) \in \mathbb{R}_+$, adică $x \leq z$, deci "$\leq$" este tranzitivă.

Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Cum $y - x \in P \cup (-P) \cup \{0\}$, $P \cap (-P) = \emptyset$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ şi $z \in \mathbb{R}$; atunci $y - x \in \mathbb{R}_+$, $(y+z)-(x+z) \in \mathbb{R}_+$, adică $x + z \leq y + z$.

Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ şi $z \geq 0$; atunci $y - x$, $z \in \mathbb{R}_+$ şi conform cu *ii*) deducem $z(y-x) \in P$ sau $xz \leq yz$.
Deducem că relaţia "$\leq$" este o relaţie de ordine totală, care este compatibilă cu operaţiile de adunare şi de înmulţire definite în corpul $\mathbb{R}$ (axiomele 10, 11, 12). $\square$

Remarcă. Corpul $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ verifică axiomele 1-12, deci este un corp ordonat. Dar $\mathbb{Q}$ nu este complet ordonat. Vom prezenta două argumente în acest sens.

Argumentul 1. Dacă $\mathbb{Q}$ este un corp complet ordonat, atunci conform Teoremei 1, orice şir Cauchy din $\mathbb{Q}$ este convergent. Să considerăm şirul $(q_n)_{n\geq 1}$ al aproximaţiilor prin lipsă ale lui $\sqrt{2}$. Şirul de numere raţionale $(q_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy, dar nu este convergent. [Limita este $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{10^k} < \varepsilon$. Atunci $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|q_{n+k} - q_k| \leq \dfrac{1}{10^k} < \varepsilon$]. Am ajuns la o contradicţie.

Argumentul 2. Dacă $\mathbb{Q}$ este un corp complet ordonat, definim mulţimea $A = \{q \in \mathbb{Q}_+ | q^2 < 2\}$. Observăm că $1 \in A$, deci $A \neq \emptyset$. Mulţimea A este majorată de 2 şi folosind ipoteza, rezultă că există $\sup A = \alpha \geq 1$. Din iraţionalitatea lui $\sqrt{2}$, deducem că $\alpha^2 < 2$ sau $\alpha^2 > 2$.

Dacă $\alpha^2 < 2$, definim numărul raţional pozitiv $b = \dfrac{2-\alpha^2}{2(\alpha+1)^2}$ şi vom ajunge la contradicţie, demonstrând că $\alpha + b \in A$ ($\alpha + b > \alpha$ şi α era cel mai mic majorant). Cum $b(\alpha+1)^2 = \dfrac{2-\alpha^2}{2} < 1$, rezultă $0 < b < \dfrac{1}{(\alpha+1)^2} < 1$. Cum b este subunitar şi pozitiv, deducem $b^2 < b$. Atunci

$$(\alpha+b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha b + b^2 < \alpha^2 + 2\alpha b + b < \alpha^2 + 2\alpha b + b + \alpha^2 b =$$

$$= \alpha^2 + b(\alpha+1)^2 = \alpha^2 + \frac{2-\alpha^2}{2} = \frac{2+\alpha^2}{2} < \frac{2+2}{2} = 2,$$

de unde $\alpha + b \in A$, contradicţie. Analog se ajunge la contradicţie în cazul $\alpha^2 > 2$.
Printre numeroasele consecinţe ale axiomelor 1-13, se află şi

Propoziţia 2.

$$1 > 0$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$; atunci $x > 0$ ori $x = 0$, ori $x < 0$. Dacă $x > 0$, conform axiomei 12 de compatibilitate a relaţiei de ordine faţă de înmulţire, $x^2 > 0$. Dacă $x = 0$, atunci $x^2 = 0$. Dacă $x < 0$, prin adunare cu $-x$, conform axiomei 12, deducem $0 < -x$ de unde, prin înmulţire cu $-x$, deducem $0 < (-x)^2$ sau $x^2 > 0$. Cum $1 \neq 0$ (axioma 6), deducem $1^2 > 0$, deci $1 > 0$.

B) Exemplu de corp ordonat care nu verifică proprietatea lui Arhimede

Considerăm corpul comutativ $K = \mathbb{R}(X)$ al fracţiilor raţionale.
Dacă $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$, $Q \neq 0$, vom nota prin $\gamma(P, Q)$ câtul coeficienţilor dominanţi ai polinoamelor P şi Q. Dacă $Q \neq 0$, atunci $\gamma(0, Q) = 0$.
Dacă $F \in K$, atunci $\gamma(P, Q)$ are aceeaşi valoare pentru oricare reprezentant (P, Q) al lui F, deci vom putea nota valoarea comună cu $\psi(F)$.

Exemplu.

$$\gamma\left(\frac{2X^3+3X^2+2X+3}{6X^4+9X^3+4X+6}\right)=\gamma\left(\frac{(2X+3)(X^2+1)}{(2X+3)(3X^3+2)}\right)=\gamma\left(\frac{X^2+1}{3X^3+2}\right)=\frac{1}{3}$$

sau

$$\gamma\left(\frac{2X^2+3X^2+2X+3}{6X^4+9X^3+4X+6}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\,.$$

Sesizăm că valoarea lui γ nu se modifică prin scrierea fracţiei sub formă ireductibilă (după simplificarea polinoamelor prin cel mai mare divizor comun al acestora).
Vom defini $P = \{F \in K | \psi(F) \geq 0\}$. În cazul când un reprezentant al lui F este (P, Q) şi coeficienţii dominanţi sunt simultan negativi, putem considera ca reprezentant pe $(-P, -Q)$, în care coeficienţii sunt simultan pozitivi.
Să arătăm că P verifică $i), ii), iii)$.

Fe $F_1, F_2 \in P$, $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$ şi (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) reprezentanţi ce au coeficienţii dominanţi pozitivi. Dacă a_1, a_2, b_1, b_2 sunt coeficienţii dominanţi ai polinoamelor P_1, P_2, Q_1, Q_2, vom avea $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ şi $F_1 + F_2$ va avea ca reprezentant cuplul $(A, B) = (P_1Q_2 + P_2Q_1, Q_1Q_2)$.
Din inegalităţile $a_1b_2 > 0$, $a_2b_1 > 0$, $a_1b_2 + a_2b_1 > 0$, $b_1b_2 > 0$, deducem $F_1 + F_2 \in P$ (i).
Cuplul (P_1P_2, Q_1Q_2) este un reprezentant al lui $F_1 \cdot F_2$ şi $a_1a_2 > 0$, $b_1b_2 > 0$; deducem $F_1 \cdot F_2 \in K$ (ii). Dacă $F_1 = 0$ sau $F_2 = 0$, atunci $F_1 + F_2 = F_2$ sau F_1 şi $F_1 \cdot F_2 = 0$, deci $P + P \subset P$, $P \times P \subset P$.
Observăm că $-P = \{F \in K | \psi(F) \leq 0\}$. Pentru oricare $F \in K$ avem $\psi(F) \geq 0$ sau $\psi(F) \leq 0$, iar dacă $\psi(F) \leq 0$ şi $\psi(F) \geq 0$, atunci $F = 0$, deci $K = P \cup (-P)$, $P \cap (-P) = \{0\}$. Astfel am demonstrat că P induce în K un corp ordonat.
Considerăm fracţiile $F = \dfrac{1}{X}$, $G = 1$; $F > 0$, $G > 0$, în corpul ordonat K.
Pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ avem $G - nF = 1 - \dfrac{n}{X} = \dfrac{X-n}{X}$, de unde obţinem

$\psi(G - nF) = 1 > 0$, adică $G - nF \in P\backslash\{0\}$, deci $nF < G$. Rezultă K este un corp ordonat nearhimedean.

Bibliografie

[1] Albu, A.C., *O istorie a matematicii. Antichitatea*, Ed. Nomina, 2009
[2] Colojoară, I., *Analiză matematică*, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1983
[3] Gelbaum, B.R. şi Olmsted, J.M.H., *Contraexemple în analiză*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1973
[4] Gheorghiu, N. şi Precupanu, T., *Analiză matematică*, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1979
[5] Hiriş, V., Megan, M. şi Popa, C-tin, *Introducere în analiză matematică prin exerciţii şi probleme*, Ed. Facla, Timişoara, 1976
[6] Marco, J-P., Mathématique L3, *Analyse*, Pearson, Paris, 2009
[7] Meghea, C-tin, *Bazele analizei matematice*, Ed. Şt. şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977
[8] Mortici, C., *Bazele matematicii. Teorie şi probleme*, Ed. Minus, Târgovişte, 2007
[9] Nicolescu, M., *Analiză matematică*, Vol. 1, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957
[10] Olmsted, J.M.H. şi Brink, R.W., *The real number system*, Appleton-Century-Crofts, N.Y. 1962
[11] Olmsted, J.M.H., *Advanced Calculus*, Appleton-Century-Crofts, N.Y. 1962
[12] Hauchecorne, B., *Les contra-exemples en Mathématiques*, Ellipses, Paris, 2007
[13] Precupanu, Anca, *Bazele analizei matematice*, Ed. Univ. "Al.I. Cuza" Iaşi, 1993
[14] Miculescu, R., *Analiză Matematică. Note de curs*, Ed. Pro Univ., 2017
[15] Miculescu, R. şi Chiteş, C., *Analiză Matematică. Culegere de exerciţii şi probleme*, Ed. Pro Univ., 2017
[16] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw Hill Education, 1976
[17] Sireţchi, Gh., *Calcul diferenţial şi integral*, Vol. 1, *Noţiuni fundamentale*, Ed. Şt. şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985
[18] Stănăşilă, O., *Analiză Matematică*, Ed. Did. Ped., Bucureşti, 1980
[19] Şilov, G.E., *Analiză Matematică*, Ed. Şt. şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989

Lector dr., Universitatea "Dimitrie Cantemir", Bucureşti
Profesoară, Şc. generală nr. 79, Bucureşti

Rafinarea inegalităţii Hadwiger-Finsler

Marian Cucoaneş şi Marius Drăgan

Abstract. The purpose of this article is to give a refinement of Hadwiger-Finsler inequality, using the well-known Weitzenböck inequality.

Una dintre cele mai cunoscute inegalităţi geometrice este inegalitatea Hadwiger-Finsler, care spune că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Scopul acestui articol este de a rafina această inegalitate, precum şi inegalitatea Weitzenböck, pornind de la o inegalitate algebrică aplicată în triunghiul determinat de perpendicularele duse din vârfurile triunghiului pe bisectoare.

Lema 1. *În orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S\sqrt{3}} \geq \frac{3(a^4+b^4+c^4)}{(a^2+b^2+c^2)^2} \tag{1}$$

Soluţie. Ridicând (1) la puterea a doua şi folosind inegalitatea

$$16S^2 = 2\sum a^2b^2 - \sum a^4$$

obţinem

$$\left(\sum a^2\right)^6 \geq 27\left(\sum a^4\right)^2\left[\left(\sum a^2\right)^2 - 2\sum a^4\right]. \tag{2}$$

Notăm $a^2=x$, $b^2=y$, $c^2=z$ şi $t=\left(\sum x^2\right)/\left(\sum x\right)^2$.
Inegalitatea (2) este echivalentă cu

$$\left(\sum x\right)^6 \geq 27\left(\sum x^2\right)\left[\left(\sum x\right)^2 - 2\sum x^2\right]$$
$$\Leftrightarrow 1 \geq 27\left[\frac{\sum x^2}{\left(\sum x\right)^2}\right]^2\left[1-2\frac{\sum x^2}{\left(\sum x\right)^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow 1 \geq 27t^2(1-2t) \Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{3}\right)^2\left(t+\frac{1}{6}\right) \geq 0.$$

În continuare considerăm triunghiul $A_1B_1C_1$, unde C_1B_1 este perpendiculara dusă în A pe bisectoarea din A, C_1A_1 perpendiculara dusă din B pe bisectoarea din B şi A_1B_1 perpendiculara dusă în C pe bisectoarea din C.
Avem

$$B_1C_1 = B_1A + AC_1 = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} + 4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4R\cos\frac{A}{2}.$$

Notăm $\begin{cases} \widehat{a} = B_1C_1 = 4R\cos\dfrac{A}{2} \\ \widehat{b} = A_1C_1 = 4R\cos\dfrac{B}{2} \\ \widehat{c} = A_1B_1 = 4R\cos\dfrac{C}{2} \end{cases}$

$$m(\measuredangle A_1) = \widehat{A} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \tag{3}$$

Dacă $\widehat{S}$ este orice $\triangle A_1B_1C_1$, atunci

$$\widehat{S} = \frac{\widehat{b} \cdot \widehat{C} \sin \widehat{A}}{2} = 8R^2 \Pi \cos\frac{A}{2} = 2Rp.$$

Deci

$$\widehat{S} = 2Rp \tag{4}$$

□

Teorema 1 (rafinarea teoremei Hadwiger-Finsler). *În orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$\sum a^2 \geq 12\sqrt{3}\, S \frac{\left(\sum \cos^4 \dfrac{A}{2}\right)}{\left(\sum \cos^2 \dfrac{A}{2}\right)^2} + \sum (a-b)^2 \tag{5}$$

Soluţie. Aplicăm inegalitatea (1) în triunghiul $A_1B_1C_1$ definit mai sus. Rezultă

$$\frac{\sum \widehat{a}}{4\widehat{S}\sqrt{3}} \geq \frac{3\left(\widehat{a}^4 + \widehat{b}^4 + \widehat{c}^4\right)}{\left(\widehat{a}^2 + \widehat{b}^2 + \widehat{c}^2\right)^2} \tag{6}$$

Înlocuind (3) şi (4) în (6) şi ţinând cont de identităţile $\sum \cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{r^2 + 4Rr}{2Rr}$ şi $\sum a^2 - \sum (a-b)^2 = 4(r^2 + 4Rr)$, rezultă (5). □

Teorema 2 (rafinarea inegalităţii Weitzenböck). *În orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}S} \geq \frac{54R^2 - 78Rr + 21r^2}{(6Rr - 3r^2)^2} \geq 1 \tag{7}$$

Soluţie. Avem

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2\sum a^2b^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$
$$= 1 - \frac{2\left[(\sum ab)^2 - 2abc \sum a\right]}{(\sum a^2)^2} = 1 - \frac{2\left[(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16Rrp^2\right]}{4(p^2 - r^2 - 4Rr)^2}$$

Notăm $p^2 = t$, $r^2 + 4Rr = \alpha$, $16Rr = \beta$. Considerăm funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1 - \dfrac{(t+\alpha)^2 - \beta t}{2(t-\alpha)^2}$, $f'(t) = \dfrac{(t+\alpha)(4\alpha - \beta)}{2(t-\alpha)^3} \geq 0$ deoarece $4\alpha - \beta = 4r^2$. Rezultă că funcţia f este crescătoare pe $(0, +\infty)$.
Deoarece $t_1 = p_1^2 = 16Rr - 5r^2 \leq p^2 = t$, rezultă $f(t) \geq f(16Rr - 5r^2)$ sau

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq 1 - \frac{(16Rr - 5r^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16Rr(16Rr - 5r^2)}{2(16Rr - 5r^2 - r^2 - 4Rr)^2}$$
$$= \frac{18R^2 - 26Rr + 7r^2}{(6Rr - 3r^2)^2} \tag{8}$$

Din (1) şi (8) rezultă (7). Membrul drept al inegalităţii (7) este echivalent cu

$$54R^2 - 78Rr + 21r^2 \geq (6Rr - 3r^2)^2$$

sau $(R - 2r)(3R - r) \geq 0$, adevărat. □

Bibliografie

[1] P. Von Finsler, Hadwiger, H., *Einige Relatione im Dreieck*, Dreieck Commentarii Mathematici Helvetici, **10**(1) (1937), 316–320

[2] Hadwiger, H., Jber Deutsch. Math. Verein., **49** (1939), 35–39

[3] Weitzenböck, R., *Über eine Ungleichung*, Der Dreiecksgeometrie Mathematischen Zeitschrift, **5**(1–2), 1919, 137–146

Profesor, Liceul Tehnologic "Eremia Grigorescu", Mărăşeşti

Profesor, Liceul "Mircea cel Bătrân", Bucureşti

Argument 20

Câteva proprietăţi interesante ale numerelor complexe de acelaşi modul

Dana Heuberger

Abstract. In this paper we will see some less known theorems concerning complex numbers in Geometry, which allow us to find easier proofs, if we use the affixes of some points of the unit circle.
Keywords: complex number, incircle, circumcircle, projection, collinearity, concurrency.

1. Consideraţii teoretice

În acest articol vom evidenţia câteva proprietăţi interesante ale numerelor complexe, care pot conduce la uşurarea considerabilă a calculelor, în rezolvarea unor probleme dificile. O alegere convenabilă a axelor de coordonate este uneori suficientă pentru ca o soluţie să devină mai simplă - vom vedea că de multe ori, dacă ne raportăm la afixele unor puncte aflate pe cercul trigonometric, calculele devin mai scurte şi soluţiile mai elegante.

Vom lucra în planul complex, în care vom nota punctele cu litere mari, iar afixele acestora cu literele mici corespunzătoare.
Vom considera cunoscute noţiunile din programa şcolară despre numerele complexe, precum şi pe cele din programa pentru olimpiadă prezentate în [1].

Propoziţia 1. *Fie punctele $A(a)$, $B(b)$. Ecuaţia dreptei ce trece prin punctul $M(m)$ şi este perpendiculară pe dreapta AB este:*

$$z\left(\overline{b}-\overline{a}\right)+\overline{z}\,(b-a)=m\left(\overline{b}-\overline{a}\right)+\overline{m}\,(b-a).$$

Demonstraţie. Ecuaţia acestei drepte este:

$$\frac{z-m}{a-b}=\frac{\overline{z}-\overline{m}}{\overline{b}-\overline{a}}\Leftrightarrow z\left(\overline{b}-\overline{a}\right)+\overline{z}\,(b-a)=m\left(\overline{b}-\overline{a}\right)+\overline{m}\,(b-a).$$

Propoziţia 2. *Fie triunghiul oarecare ABC, $O(o)$ centrul cercului său circumscris, $H(h)$ ortocentrul, $G(g)$ centrul său de greutate şi M un punct oarecare din plan. Avem:*

a) $o=\frac{|a|^2(b-c)+|b|^2(c-a)+|c|^2(a-b)}{\overline{a}(b-c)+\overline{b}(c-a)+\overline{c}(a-b)}$

b) $h=\frac{\sum a^2\left(\overline{c}-\overline{b}\right)+\sum |a|^2(c-b)}{\sum \overline{a}(b-c)}$.

c) $h+2o=3g=a+b+c$.

d) *AM este dreapta suport a bisectoarei lui $\widehat{BAC}$ dacă şi numai dacă* $\frac{(m-a)^2}{(b-a)(c-a)}\in\mathbb{R}_+$.

e) *AN e dreapta suport a bisectoarei exterioare a lui $\widehat{BAC}$ dacă şi numai dacă $\frac{(n-a)^2}{(b-a)(c-a)} \in \mathbb{R}_-$.*

Demonstraţie. **a**) Înlocuind $m = \frac{a+b}{2}$ în **Propoziţia 1**, deducem că ecuaţia mediatoarei lui $[AB]$ este:

$$z\left(\overline{b}-\overline{a}\right)+\overline{z}\,(b-a)+|a|^2-|b|^2=0.$$

Analog, ecuaţia mediatoarei lui $[AC]$ este:

$$z\,(\overline{c}-\overline{a})+\overline{z}\,(c-a)+|a|^2-|c|^2=0.$$

Înmulţind prima ecuaţie cu $(c-a)$ şi pe cea de-a doua cu $(b-a)$ şi apoi scăzându-le, obţinem concluzia.
b) Din **Propoziţia 1**, deducem ecuaţiile înălţimilor din A şi din B ale triunghiului:

$$h_A : z\left(\overline{c}-\overline{b}\right)+\overline{z}\,(c-b)=a\left(\overline{c}-\overline{b}\right)+\overline{a}\,(c-b)\,,$$

$$h_B : z\,(\overline{a}-\overline{c})+\overline{z}\,(a-c)=b\,(\overline{a}-\overline{c})+\overline{b}\,(a-c)\,.$$

Înmulţind prima ecuaţie cu $(a-c)$ şi pe cea de-a doua cu $(b-c)$ şi apoi adunându-le, obţinem concluzia.
c) Relaţia este o transcriere a faptului că O, G şi H se află pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC.
d) AM este dreapta suport a bisectoarei lui $\widehat{BAC}$ dacă şi numai dacă
$\arg\left(\frac{m-a}{b-a}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{m-a}\right) \Leftrightarrow \frac{\frac{m-a}{b-a}}{\frac{c-a}{m-a}} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \frac{(m-a)^2}{(b-a)(c-a)} \in \mathbb{R}_+$.
e) Fie $D \in AC$ astfel încât $A \in (CD)$.
Atunci există $k \in \mathbb{R}_+$, astfel încât $d-a=k\,(a-c)$.
AN este dreapta suport a bisectoarei exterioară a lui $\widehat{BAC}$ dacă şi numai dacă $\arg\left(\frac{b-a}{n-a}\right)=\arg\left(\frac{n-a}{d-a}\right) \Leftrightarrow \frac{(n-a)^2}{(b-a)(d-a)} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow -\frac{(n-a)^2}{k(b-a)(c-a)} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \frac{(n-a)^2}{(b-a)(c-a)} \in \mathbb{R}_-$.

Observaţie.
a) Dacă O este originea planului, atunci din oricare dintre afirmaţiile **b**) şi **c**) rezultă că $h=a+b+c$.
b) Dacă punctul C este originea planului, atunci

$$o=\frac{ab\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}{\overline{a}b-a\overline{b}},\quad h=\frac{\left(\overline{a}b+a\overline{b}\right)(a-b)}{a\overline{b}-\overline{a}b}.$$

Propoziţia 3. *Fie punctele A şi B pe cercul unitate, al cărui centru este originea reperului cartezian, şi punctele C şi Z arbitrare.*
a) *$Z \in AB \Leftrightarrow z+ab\overline{z}=a+b$.*
b) *Z este pe tangenta în A la cerc $\Leftrightarrow z+a^2\overline{z}=2a$.*
c) *Z este pe dreapta care trece prin C şi este perpendiculară pe AB $\Leftrightarrow z-ab\overline{z}=c-ab\overline{c}$.*
d) *Z este pe dreapta care trece prin C şi este perpendiculară pe tangenta în A la cerc $\Leftrightarrow z-a^2\overline{z}=c-a^2\overline{c}$.*

Demonstraţie.

$$\mathbf{a})\ Z \in AB \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} \Leftrightarrow z\overline{b} - z\overline{a} - a\overline{b} = b\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}b.$$

Înmulţind egalitatea precedentă cu ab şi ţinând cont că $a\overline{a} = b\overline{b} = 1$, deducem:

$$(a-b)\left(z + ab\overline{z} - a - b\right) = 0 \Leftrightarrow z + ab\overline{z} = a + b.$$

b) $\frac{z-a}{0-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a-z}{a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{a}} \Leftrightarrow |a|^2 - \overline{a}z = a\overline{z} - |a|^2 \Leftrightarrow \overline{a}z + a\overline{z} = 2 \overset{|\cdot a}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow z + a^2\overline{z} = 2a.$

c) $\frac{z-c}{a-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-c}{a-b} = \frac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}} \Leftrightarrow \left(\overline{b} - \overline{a}\right) z - \overline{b}c + \overline{a}c = (a-b)\,\overline{z} - a\overline{c} + b\overline{c} \overset{|\cdot ab}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow (a-b)\,z - c\,(a-b) = ab\,(a-b)\,\overline{z} - ab\overline{c}\,(a-b) \Leftrightarrow z - ab\overline{z} = c - ab\overline{c}.$

d) $ZC \parallel OA \Leftrightarrow \frac{z-c}{a-0} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-c}{a} = \frac{\overline{z}-\overline{c}}{\overline{a}} \Leftrightarrow \overline{a}z - \overline{a}c = a\overline{z} - a\overline{c} \overset{|\cdot a}{\Leftrightarrow} z - a^2\overline{z} = c - a^2\overline{c}.$

Propoziţia 4. *Fie punctele A, B, C şi D pe cercul unitate, al cărul centru este originea reperului cartezian, şi Z un punct arbitrar. Avem:*

a) $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -ab.$

b) *Afixul proiecţiei lui Z pe dreapta AB este* $m = \frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.

c) *Punctul de intersecţie al coardelor AB şi CD are afixul* $p = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.

d) *Afixul punctului de intersecţie al tangentelor în A şi B la cerc este* $q = \frac{2ab}{a+b}$.

Demonstraţie. **a**) $\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = \frac{ab(a-b)}{a\overline{a}b - b\overline{b}a} = \frac{ab(a-b)}{b-a} = -ab.$

b) Fie $M\,(m) = pr_{AB}\,(Z)$.

Deoarece $M \in AB$, din Propoziţia 3.a) rezultă:

$$m + ab\overline{m} = a + b \tag{1.1}$$

Deoarece M este pe dreapta ce trece prin Z şi e perpendiculară pe AB, din **Propoziţia 3.c**) rezultă:

$$m - ab\overline{m} = z - ab\overline{z} \tag{1.2}$$

Adunând relaţiile (1.1) şi (1.2) rezultă $m = \frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$.

c) Fie $\{P\} = AB \cap CD$. Din **Propoziţia 1, a**) deducem:

$$p + cd\overline{p} = c + d$$

$$p + ab\overline{p} = a + b$$

Înmulţind prima relaţie cu ab, pe cea de-a doua cu cd şi scăzându-le, obţinem:

$$(ab - cd)\,p = ab\,(c+d) - cd\,(a+b)\,.$$

d) Fie $Q\,(q)$ punctul de intersecţie al acestor tangente. Deoarece Q este pe tangenta în A la cerc, din **Propoziţia 3.b**) rezultă:

$$q + a^2\overline{q} = 2a$$

Deoarece Q este pe tangenta în B la cerc, din **Propoziţia 3.b**) rezultă:

$$q + b^2\overline{q} = 2b.$$

Înmulţind prima relaţie cu b^2, pe cea de-a doua cu a^2 şi scăzându-le, obţinem:

$$\left(b^2-a^2\right)q=2ab\,(b-a)\ \Leftrightarrow\ q=\frac{2ab}{a+b}.$$

Propoziţia 5. *Dacă cercul înscris în triunghiul ABC este cercul unitate, iar centrul acestuia este originea reperului cartezian, şi punctele sale de intersecţie cu laturile BC, CA şi AB sunt P, Q, R, atunci:*

a) $a=\frac{2qr}{q+r},\ \ b=\frac{2rp}{r+p},\ \ c=\frac{2pq}{p+q}$.

b) $o=\frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

c) $h=\frac{2\left(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2+pqr(p+q+r)\right)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

Demonstraţie. **a**) Iese din **Propoziţia 4. d**).

b) Din **Propoziţia 2. a**), avem: $o=\frac{\sum|a|^2(b-c)}{\sum\overline{a}(b-c)}$.

$$\sum|a|^2(b-c)\overset{a)}{=}\sum\frac{4}{(q+r)(\overline{q}+\overline{r})}\left(\frac{2rp}{r+p}-\frac{2pq}{p+q}\right)$$
$$=\sum\frac{4qr}{(q+r)(q\overline{q}r+qr\overline{r})}\cdot\frac{2p^2(r-q)}{(r+p)(p+q)}$$
$$=\frac{8pqr}{(p+q)(q+r)(r+p)}\sum\frac{p(r-q)}{q+r}=\frac{8pqr}{(p+q)^2(q+r)^2(r+p)^2}\sum p^3(r-q).$$

Deoarece $\sum p^3(r-q)=(p+q+r)\sum p^2(r-q)$, obţinem:

$$\sum|a|^2(b-c)=\frac{8pqr\,(p+q+r)}{(p+q)^2(q+r)^2(r+p)^2}\sum p^2(r-q).\tag{1.3}$$

$$\sum\overline{a}(b-c)=\sum\frac{2\overline{qr}}{\overline{q}+\overline{r}}\cdot\frac{2p^2(r-q)}{(p+q)(r+p)}$$
$$=\frac{4}{(p+q)(q+r)(r+p)}\sum p^2(r-q)\tag{1.4}$$

Împărţind relaţiile (1.3) şi (1.4), rezultă concluzia.

c) Din $h+2o=a+b+c$, folosind punctele **a**) şi **b**), obţinem concluzia.

Propoziţia 6. *Fie triunghiul ABC înscris în cercul unitate, al cărui centru e originea reperului cartezian.*

a) *Există $u,v,w\in\mathbb{C}$ astfel încât $a=u^2$, $b=v^2$, $c=w^2$ şi astfel încât $-uv$, $-uw$, $-vw$ sunt afixele mijloacelor arcelor AB, AC şi BC ale cercului unitate care nu conţin punctele C, B, respectiv A.*

b) *Cu notaţiile precedente, centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC are afixul $i=-(uv+uw+vw)$.*

Demonstraţie. **a**) Fie M, N, P mijloacele arcelor BC, AC şi AB ale cercului unitate care nu conţin punctele A, B, respectiv C.

Există şi sunt unice $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$u_1^2 = u_2^2 = a,\ v_1^2 = v_2^2 = b,\ w_1^2 = w_2^2 = c.$$

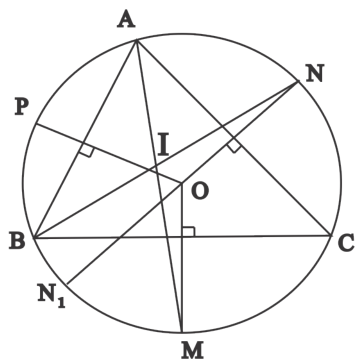
Deoarece $\triangle\ BOM \equiv \triangle\ MOC$, avem: $\frac{m}{b} = \frac{c}{m}$, deci $m^2 = bc = (v_k w_t)^2$, $\forall k, t \in \{1, 2\}$.

Analog rezultă $n^2 = (u_s w_t)^2$, $\forall s, t \in \{1, 2\}$.

Alegem $u \in \{u_1, u_2\}$, $v \in \{v_1, v_2\}$, $w \in \{w_1, w_2\}$ astfel încât $m = -vw$ şi $n = -uw$.

Fie $N_1\,(uw)$, punctul diametral opus lui N.

Deoarece $\mu\left(\widehat{N_1OP}\right) = A = \mu\left(\widehat{MOB}\right)$, rezultă $\frac{n_1}{p} = \frac{m}{b}$, deci $p = \frac{bn_1}{m} = \frac{v^2uw}{-vw} = -uv$.



b) Deoarece $\{I\} = AM \cap BN$, din **Propoziţia 4. c**) rezultă:

$$i = \frac{am(b+n) - bn(a+m)}{am - bn} = \frac{-u^2vw(v^2 - uw) + v^2uw(u^2 - vw)}{-u^2vw + v^2uw} = -(uv + uw + vw).$$

2. Aplicaţii

Aplicaţia 1. *Fie triunghiul ABC circumscris cercului trigonometric, de centru I. Fie D, E, F punctele de intersecţie ale cercului trigonometric cu laturile (BC), (AC) şi (AB), $\{M\} = AI \cap DE$, $\{N\} = BI \cap EF$, $\{P\} = CI \cap FD$, $\{Q\} = AI \cap DF$. Să se arate că:*

a) $IM \cdot IN \cdot IP = 1$.

b) *Punctele I, E, C, Q sunt conciclice.*

c) $BM = IM \cdot EC$.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Avem $ID = IE = IF = 1$. Din **Propoziţia 4. d**) rezultă:

$$a = \frac{2ef}{e+f},\ b = \frac{2fd}{f+d},\ c = \frac{2de}{d+e}.$$

Avem: $\overline{a} = \frac{2}{e+f}$ şi relaţiile analoage.

Deoarece $M \in DE$, avem:

$$m + de\overline{m} = d + e. \tag{2.1}$$

A, I, M sunt coliniare, deci

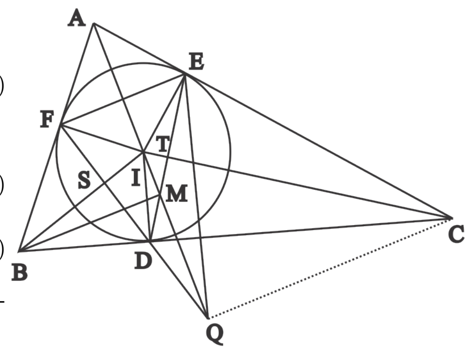
$$\frac{m}{a} = \frac{\overline{m}}{\overline{a}} \Leftrightarrow \overline{m} = m \cdot \frac{\overline{a}}{a} = \frac{m}{ef}.$$

Înlocuind în (2.1), rezultă:

$$m + \frac{dm}{f} = d + e \Leftrightarrow m = \frac{(d+e)\cdot f}{d+f}. \tag{2.2}$$

Deoarece $Q \in DF$, avem:

$$q + fd\overline{q} = f + d. \tag{2.3}$$



A, I, Q sunt coliniare, deci $\overline{q} = q \cdot \frac{\overline{a}}{a} = \frac{q}{ef}$.

Înlocuind în (2.3), rezultă:

$$q = \frac{(d+f)\cdot e}{d+e}. \qquad (2.4)$$

Analog se arată că:

$$n = \frac{(e+f)\cdot d}{e+d} \qquad (2.5)$$

$$p = \frac{(f+d)\cdot e}{f+e} \qquad (2.6)$$

Înmulţind relaţiile (2.2), (2.5), (2.6), deducem:

$mnp = def \;\Rightarrow\; IM \cdot IN \cdot IP = 1.$

b) Fie $\{S\} = BI \cap DF$, $\{T\} = CI \cap DE$.

Din (2.2) rezultă: $m = \frac{tf}{s}$, şi trecând la module, $IM = \frac{IT}{IS}$.

Din (2.4), rezultă: $q = \frac{es}{t}$, şi trecând la module, $IQ = \frac{IS}{IT} = \frac{1}{IM}$.

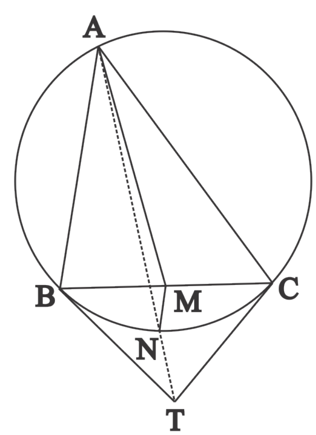
Atunci, deoarece $\frac{IQ}{IE} = \frac{IE}{IM}$ şi $\widehat{QIE} \equiv \widehat{EIM}$, rezultă că triunghiurile QIE şi EIM sunt asemenea, deci $\mu\left(\widehat{IQE}\right) = \mu\left(\widehat{IEM}\right) = \frac{C}{2}$, aşadar punctele I, E, C, Q sunt conciclice.

c) $m = \frac{d+e}{2de} \cdot \frac{2def}{d+f} = \frac{be}{c}$, deci $\frac{m}{b} = \frac{e}{c} \Leftrightarrow \triangle\, BIM \sim \triangle\, CIE$, aşadar

$$BM = \frac{IM \cdot EC}{IE} = IM \cdot CE.$$

Aplicaţia 2. *Fie triunghiul ABC şi T punctul de intersecţie al tangentelor din B şi C la cercul circumscris acestuia. Fie M mijlocul lui $[BC]$ şi N punctul de intersecţie dintre $(AT$ şi cerc. Să se arate că $BM^2 = MN \cdot AM$.*

Dana Heuberger



Soluţie. Considerăm că cercul circumscris triunghiului ABC este cercul trigonometric.

Din **Propoziţia 4. d**) obţinem:

$t = \frac{2bc}{b+c}$, deci $\overline{t} = \frac{2}{b+c}$.

Din **Propoziţia 3. a**) rezultă:

$$t + an\overline{t} = a + n \Leftrightarrow n = \frac{a-t}{a\overline{t}-1}.$$

Înlocuind, obţinem: $n = \frac{ab+ac-2bc}{2a-b-c}$.

Apoi, $n - m = n - \frac{b+c}{2} = \frac{(b-c)^2}{4\left(a - \frac{b+c}{2}\right)}$.

Trecând la module, obţinem:

$$MN = \frac{BC^2}{4AM},$$

de unde rezultă concluzia.

Aplicaţia 3. *Fie patrulaterul $ABCD$ înscris în $\mathcal{C}(O,1)$, astfel încât*

$$\mu\left(\widehat{AOB}\right) + \mu\left(\widehat{COD}\right) \neq \pi.$$

Fie M şi P proiecţiile punctelor A şi C pe BD, iar N şi Q proiecţiile punctelor B şi D pe AC.
Arătaţi că $MNPQ$ este un paralelogram dacă şi numai dacă $ABCD$ este un dreptunghi.

Dana Heuberger

Soluţie. "$\Leftarrow$" Evident. Mai mult, $MNPQ$ este chiar dreptunghi.
"$\Rightarrow$" Alegem reperul cu originea în O, şi astfel încât:
$a = \cos t_1 + i \cdot \sin t_1$, $b = \cos t_2 + i \cdot \sin t_2$, $c = \cos t_3 + i \cdot \sin t_3$, $d = \cos t_4 + i \cdot \sin t_4$, cu $0 < t_1 < t_3 < t_4 < 2\pi$. Arătăm că $ac + bd \neq 0$.
Presupunem că $ac + bd = 0$. Rezultă:

$$\cos(t_1 + t_3) + \cos(t_2 + t_4) + i(\sin(t_1 + t_3) + \sin(t_2 + t_4)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{t_2 + t_4 - t_1 - t_3}{2}\left(\cos\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{2} + i \cdot \sin\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos\frac{t_2+t_4-t_1-t_3}{2} = 0 \Leftrightarrow (t_2 - t_1) + (t_4 - t_3) = \pi \Leftrightarrow \mu\left(\widehat{AOB}\right) + \mu\left(\widehat{COD}\right) = \pi$, contradicţie. Aşadar $ac + bd \neq 0$.

Din **Propoziţia 4. b**) obţinem:

$$m = \frac{b + d + a - bd\overline{a}}{2} = \frac{a + b + d}{2} - \frac{bd}{2a},$$

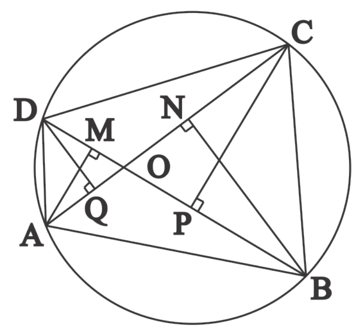
$$p = \frac{b + c + d - bd\overline{c}}{2} = \frac{b + c + d}{2} - \frac{bd}{2c},$$

$$n = \frac{a + b + c - ac\overline{b}}{2} = \frac{a + b + c}{2} - \frac{ac}{2b},$$

$$q = \frac{a + c + d - ac\overline{d}}{2} = \frac{a + c + d}{2} - \frac{ac}{2d}.$$

$$m+p = n+q \Leftrightarrow \frac{a + b + d}{2} - \frac{bd}{2a} + \frac{b + c + d}{2} - \frac{bd}{2c} = \frac{a + b + c}{2} - \frac{ac}{2b} + \frac{a + c + d}{2} - \frac{ac}{2d}.$$

Rezultă:
$m + p = n + q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(b+d)(ac+bd)}{bd} = \frac{(a+c)(ac+bd)}{ac}$.
Deoarece $ac + bd \neq 0$, deducem: $\frac{b+d}{bd} = \frac{a+c}{ac} \Leftrightarrow ab\,(c-d) = cd\,(b-a)$.
Obţinem $\|a\| \cdot \|b\| \cdot CD = \|c\| \cdot \|d\| \cdot AB$, deci $AB = CD$.
Analog, $\frac{b+d}{bd} = \frac{a+c}{ac} \Leftrightarrow bc\,(a-d) = ad\,(b-c)$, deci $AD = BC$.
În concluzie, $ABCD$ este un paralelogram inscriptibil, adică $ABCD$ este un dreptunghi.



Aplicaţia 4. *Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi punctele D, E, F pe cercul său circumscris, astfel încât $AD \parallel BE \parallel CF$. Notăm cu S, T şi U simetricele punctelor D, E şi F faţă de dreptele BC, CA şi AB. Să se arate că punctele S, T, U şi H sunt conciclice.*

([**2**], **problema 4, pag. 7**)

Soluţie. Alegem centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC drept origine a sistemului de axe de coordonate. Atunci, $h = a + b + c$.
$AD \parallel BE \Leftrightarrow \frac{a-d}{b-e} = \frac{\overline{a}-\overline{d}}{\overline{b}-\overline{e}} \Leftrightarrow \frac{a-d}{b-e} = \frac{d-a}{e-b} \cdot \frac{be}{ad} \Leftrightarrow be = ad$.
Analog, $AD \parallel CF \Leftrightarrow ad = cf$.
Fie $M\,(m)$ proiecţia lui D pe BC.
Din **Propoziţia 4. b**) rezultă $m = \frac{b+c+d-bc\overline{d}}{2}$.

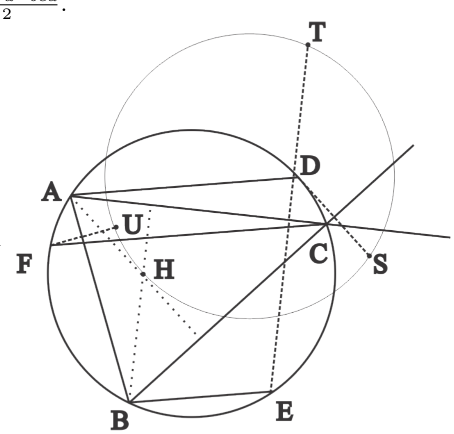
Deoarece $s = 2m - d$, obţinem

$$s = b + c - bc\overline{d}.$$

Analog obţinem:

$$t = a + c - ac\overline{e}$$

$$u = a + b - ab\overline{f}.$$



U, H, S, T sunt conciclice dacă şi numai dacă $\alpha = \dfrac{u-h}{t-h} \cdot \dfrac{t-s}{u-s} \in \mathbb{R}$.
Avem

$$\alpha = \frac{-c - \frac{ab}{f}}{-b - \frac{ac}{e}} \cdot \frac{a - b - \frac{ac}{e} + \frac{bc}{d}}{a - c - \frac{ab}{f} + \frac{bc}{d}},$$

$$\alpha = \frac{(ab+cf)\,(ae-be)}{(ac+be)\,(af-fc)} = \frac{(ab+ad)\,(ae-ad)}{(ac+ad)\,(af-ad)} = \frac{(b+d)\,(e-d)}{(c+d)\,(f-d)}$$

$\overline{\alpha} = \dfrac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \cdot \dfrac{\frac{1}{e}-\frac{1}{d}}{\frac{1}{f}+\frac{1}{d}} = \dfrac{b+d}{bd} \cdot \dfrac{d-e}{de} \cdot \dfrac{cd}{c+d} \cdot \dfrac{df}{d-f} = \alpha \cdot \dfrac{cf}{be} = \alpha,$ deci $\alpha \in \mathbb{R}$.
Aşadar punctele U, H, S, T sunt conciclice.

Bibliografie

[1] Muşuroia, N. (coord.), Boroica, Gh., Pop, V., Heuberger, Dana (coord.), Bojor, F., *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, Clasa a X-a*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2013, 146–178
[2] https://www.scribd.com/document/295267839/TJUSAMO-2013-2014-Complex-Numbers-in-Geometry
[3] https://www.yisun.io/teaching.html

Profesoară, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Argument 20

Configuraţii monocolore în probleme de colorare

Vasile Pop

Abstract. This paper has tackled some approachable problems which refer to one coloured segments and triangles.

1. Introducere

Prin frumuseţea şi dificultatea lor, problemele de colorare au incitat de-a lungul vremurilor numeroşi matematicieni celebri ale căror rezultate au deschis drumuri noi în domeniul combinatoricii, geometriei combinatorice sau teoria numerelor. Dintre cei mai cunoscuţi matematicieni care au avut rezultate deosebite în acest domeniu, multe din ele fiind relativ recente, amintim pe Paul Erdös, Van der Waerden, Issai Schur, Tibor Gallai, Alexander Soifer, Hugo Hadwiger, Victor Klee, Markus Gardner, Nicolas de Bruijn, George Szekeres, Vadim Vizing, Edward Nelson.

Mi-am propus în această lucrare să abordez câteva tipuri de probleme accesibile, cu soluţii deosebit de ingenioase, probleme care se adresează în primul rând elevilor cu calităţi excepţionale, pe care îi atrag problemele ce nu pot fi încadrate în stasuri.

Am grupat problemele pe două idei: segmente monocolore şi triunghiuri monocolore.

2. Segmente monocolore

Problema generală este următoarea: dacă se colorează în mod arbitrar, folosind k culori, să se precizeze dacă pentru orice colorare există un segment de lungime dată, cu capetele de aceeaşi culoare.

Se defineşte numărul cromatic al planului notat cu $\mathcal{X}$: numărul minim de culori cu care trebuie colorat planul, astfel ca orice segment de lungime 1 să aibă capetele de culori diferite.

Observaţie. Numărul $\mathcal{X} - 1$ este cel mai mare număr de culori cu care oricum am colora planul, există un segment de lungime 1 cu capetele de aceeaşi culoare (segment monocolor).

Problema 1. Pentru orice colorare a planului, cu două culori, există două puncte de aceeaşi culoare între care distanţa este 1 (sau orice altă distanţă).

Soluţie. Considerăm în plan un triunghi echilateral ABC de latură 1. Cel puţin două vârfuri au aceeaşi culoare şi se află la distanţa 1 unul de altul. $\square$

Observaţie. Problema 1 afirmă că numărul cromatic al planului este cel puţin 3.

Problema 2. Pentru orice colorare a planului cu două culori (se folosesc ambele), există segment de orice lungime cu capetele de culori diferite.

Soluţie. Fie d lungimea dorită. Mai întâi vom arăta că există în plan două puncte A, B de culori diferite aflate la distanţă mai mare ca d: dacă A este roşu, şi prin absurd toate punctele aflate la distanţă mai mare ca d sunt tot roşii, rămâne că toate punctele negre sunt în interiorul cercului de centru A şi rază d. Există puncte roşii (în afara cercului) oricât de departe de centru, pentru care distanţa la punctele negre din cerc este oricât de mare.

Fie acum A roşu şi B negru cu $d(A, B) > d$. Pe cercul cu centrul A şi raza d toate punctele sunt roşii (dacă nu am terminat). Cercul taie AB în C situat între A şi B, iar C este şi el roşu. Ducem apoi cercul cu centrul C şi raza d care taie AB în D între C şi B.

Punctele segmentului CD sunt toate roşii (fiecare punct $M \in CD$ are un punct N pe cercul $\mathcal{C}(A, d0$ cu $MN = d$). Continuând în acest mod, după un număr finit de cercuri ajungem pe un segment de culoare roşie care conţine pe B. Contradicţie cu alegerea lui B (negru). $\square$

Problema 3. Pentru orice colorare a planului cu trei culori, există un segment cu capetele de aceeaşi culoare aflate la distanţa 1 (sau orice distanţă dorită).

Soluţie. (Hugo Hadwiger, 1961) Considerăm două triunghiuri echilaterale de latură 1, DAB şi CAB, lipite după latura AB.

Dacă punctele A, B sunt de culori diferite, A roşu şi B galben, atunci punctele C şi D sunt albastre (în caz că unul din ele este roşu sau galben s-a terminat).
Cu o construcţie asemănătoare putem presupune că, orice două puncte (ca C şi D) aflate la distanţă $\sqrt{3}$, sunt de aceeaşi culoare. Formăm un triunghi cu laturile $MN = MP = \sqrt{3}$ şi $NP = 1$. De aceea M, N şi M, P au aceeaşi culoare, rezultă că N şi P au aceeaşi culoare şi distanţa între ele este 1. $\square$

Observaţie. Alte soluţii ingenioase, total diferite au fost date de William Moser (1961) în Mathematical Monthly şi Solomon Golamb (1991).

- Problema spune că numărul cromatic al planului este cel puţin 5.
- Pentru colorarea planului cu patru culori avem una din următoarele întrebări:

a) Orice colorare cu patru culori conţine două puncte de aceeaşi culoare aflate la distanţa 1?

b) Există o colorare cu patru culori astfel ca orice segment de lungime 1 să aibă capetele de culori diferite?

Răspunsul la cele două întrebări nu este cunoscut. Avem deocamdată o margine inferioară $\mathcal{X} \geq 5$ şi vom căuta o margine superioară. $\square$

Problema 4. Există o colorare a planului cu nouă culori, astfel încât orice segment de lungime 1 să aibă capetele de culori diferite ($\mathcal{X} \leq 9$).

Soluţie. Considerăm în plan o reţea de pătrate de latură $L = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, colorăm un pătrat de latură $3L$ (ca în figura 1) şi translatăm acest pătrat în tot planul. Distanţa între două puncte de aceeaşi culoare este sau $\leq \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < 1$ sau $\geq \dfrac{2}{\sqrt{3}} > 1$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 1

Problema 5. Există o colorare a planului cu şapte culori, astfel încât orice segment de lungime 1 să aibă capetele de culori diferite?

Soluţie. (Laszlo Szekely, 1982) Partiţionăm planul în pătrate de latură L cu proprietatea $\sqrt{2} \cdot L < 1$ şi $\frac{3}{2}L > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < L < \frac{1}{\sqrt{2}}$ pe care le colorăm (ca în figura 2), benzile de lăţime 3 se repetă. □

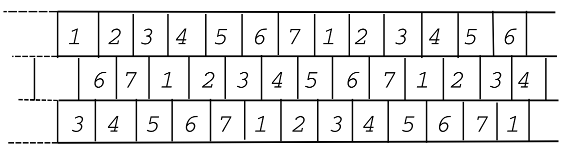


Figura 2

Observaţie. O altă soluţie pentru problema 5 este cu partiţia planului în hexagoane congruente, grupate câte şapte în jurul unuia şi colorarea lor cu cele şapte culori (dată de H. Hadwiger).

- problema 5 spune că numărul cromatic al planului este $\mathcal{X} \leq 7$.
- Rămâne necunoscut numărul cromatic al planului şi el aparţine mulţimii $\{4, 5, 6, 7\}$. Cei mai mulţi matematicieni care s-au ocupat de această problemă acceptă conjectura $\mathcal{X} = 7$, adică orice colorare cu 6 culori are două puncte de aceeaşi culoare la distanţă 1. □

3. Triunghiuri monocolore

Vom considera doar colorări ale planului cu două culori şi urmărim dacă pentru un triunghi T dat, există în plan un triunghi cu vârfurile de aceeaşi culoare (monocolor) congruent cu T.

Problema 6. Pentru orice colorare a planului cu două culori, există un triunghi dreptunghic cu vârfurile de aceeaşi culoare şi cu laturile 1, $\sqrt{3}$ şi 2.

Soluţie. Conform Problemei 1, alegem două puncte A şi B la fel colorate aflate la distanţă 2. Ducem cercul de diametru AB şi construim hexagonul regulat înscris în cerc $ABCDEF$.
Dacă unul din punctele C, D, E, F au aceeaşi culoare cu A şi B am terminat. Dacă nu, se formează triunghiul DCE de cealaltă culoare şi laturi $DC = 1$, $DE = \sqrt{3}$ şi $CE = 2$. □

O generalizare a problemei 6 este

Problema 7. Pentru orice colorare cu două culori a planului, există un triunghi dreptunghic înscris într-un cerc de rază 1 în care unghiurile sunt în raportul unghiurilor ascuţite care este:

a) $2n$;

b) $\frac{n+1}{n}$.

Soluţie. Alegem două puncte A şi B de aceeaşi culoare (C_1) aflate la distanţă 2 şi ducem cercul de diametru AB, în care înscriem un poligon regulat cu $4n+2$ vârfuri $A_1 - A$, $A_{2n+2} = B$.

a) Triunghiurile $A_1A_2A_{2n+2}$, $A_1A_{2n+1}A_{2n+2}$, $A_1A_{4n+2}A_{2n+2}$, şi $A_1A_{2n+3}A_{2n+2}$ au raportul unghiurilor ascuţite $2n$, deci dacă unul din punctele A_2, A_{4n+2}, A_{2n+1}, A_{2n+3} ar fi de culoarea C_1, am terminat.
Rămâne cazul în care toate aceste puncte au culoarea C_2. Aplicând acelaşi raţionament pentru diametrul $A_{4n+2}A_{2n+1}$, obţinem că punctele A_3, A_{2n}, A_{2n+4} şi A_{4n+1} au din nou culoarea C_1. Rezultă că vârfurile simetrice faţă de diametrul perpendicular pe AB sunt la fel de colorate, iar pe arcul din primul cadran vârfurile sunt colorate alternativ cu C_1 şi C_2. Ajungem că punctele A_{n+1}, A_{n+2}, A_{3n+2}, A_{3n+3} au aceeaşi culoare şi triunghiul $A_{n+1}A_{n+2}A_{3n+2}$ este dreptunghic şi raportul unghiurilor ascuţite este $2n$.

b) Triunghiurile $A_1A_{n+1}A_{2n+2}$, $A_1A_{n+2}A_{2n+2}$, $A_1A_{3n}A_{2n+2}$, $A_1A_{3n+2}A_{2n+2}$ au raportul unghiurilor ascuţite $\frac{n+1}{n}$ şi atunci, dacă unul din vârfurile A_{n+1}, A_{n+2}, A_{3n+1}, A_{3n+2} sunt de culoarea C_1, am terminat.
Rămâne că vârfurile A_{n+1}, A_{n+2}, A_{3n+1}, A_{3n+2} au culoarea C_2 şi, aplicând acelaşi raţionament pornind de la diametrul $A_{n+1}A_{3n+2}$ şi $A_{n+2}A_{3n+3}$, rezultă că A_{4n+2}, A_{2n+1}, A_2, A_{2n+3} sunt de culoarea C_1. Apoi A_n, A_{n+3}, A_{3n+1}, A_{3n+4} sunt de culoarea C_2. Repetând raţionamentul, ajungem la contradicţie: punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots$ au culoarea C_1 şi punctele A_{n+1}, A_n, $A_{n-1}, \ldots$ au culoarea C_2. □

Problema 8. Există o colorare a planului cu două culori astfel ca niciun triunghi echilateral delatură 1 să nu aibă vârfurile de aceeaşi culoare.

Soluţie. Partiţionăm planul în benzi orizontale de lăţime $\frac{\sqrt{3}}{2}$, pe care le colorăm alternativ cu C_1 şi C_2.

Un triunghi echilateral cu vârfurile într-o singură bandă are înălţimea $\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci latura ≤ 1. Singura poziţie în care latura 1 este cea în care două vârfuri sunt pe o margine a benzii şi celălalt pe cealaltă margine, dar cele două margini nu au aceeaşi culoare. □

Problema 9. Pentru orice colorare a planului cu două culori există un triunghi cu vârfurile de aceeaşi culoare şi latura de lungime 1 sau $\sqrt{3}$, sau 2.

Soluţie. Fie $A1, A_2$ la fel colorate (C_1) la distanţă 1. Construim triunghiurile echilaterale $A_1A_2B_1$, $A_1A_2B_2$. Dacă unul este de culoarea (C_1), am format triunghiul echilateral de latură 1. Fie B_1, B_2 de culoarea (C_2). Considerăm triunghiul echilateral $B_1B_2B_3$ (în care $A_2 \in A_1B_3$ şi $A_1A_2 = A_2B_3$). Dacă B_3 are culoarea (C_2) am obţinut triunghiul $B_1B_2B_3$ echilateral de latură $\sqrt{3}$. Fie B_3 de culoarea (C_1) şi construim triunghiurile echilaterale $A_2B_3C_1$ şi $A_1B_3C_2$. Dacă C_1 este de culoarea (C_1), s-a format triunghiul $A_2B_3C_1$ de culoarea (C_1), dacă C_2 este de culoarea (C_1), s-a format triunghiul $A_1B_3C_2$ de culoarea (C_1) şi de latură 2. Dacă C_1 şi C_2 sunt de culoarea (C_2), s-a format triunghiul $B_2C_1C_2$ de culoarea (C_2) şi latură 1.

Problema 10. Se colorează punctele planului cu două culori. Să se arate că există un triunghi echilateral de latură 1 sau de latură $\sqrt{3}$ cu toate vârfurile de aceeaşi culoare.

Soluţie. Fie A un punct în plan şi $\mathcal{C}(A, 1)$ cercul de rază 1 şi centru A. Dacă orice punct de pe cerc are aceeaşi culoare cu A, luăm pe cerc B şi C astfel ca $BC = 1$ şi s-a format triunghiul monocolor ABC de latură 1.
Presupunem în continuare că avem două puncte A şi B de culori diferite şi $AB = 1$. Considerăm cercurile de centre A şi B şi rază 2 şi fie C unul dintre punctele de intersecţie al lor. Avem $CA = CB = 2$ şi C are culoarea diferită de A sau de B. Am găsit două puncte în plan de culori diferite, între care distanţa este 2.
Punctul F, mijlocul lui AC, are aceeaşi culoare cu A sau C. Să presupunem că C şi F au culoarea (C_1) şi A culoarea (C_2). Considerăm triunghiurile echilaterale CFG şi CFH. Dacă G sau H au culoarea (C_1), am terminat cu un triunghi echilateral monocolor de latură 1, dacă ele sunt de culoarea (C_2) am terminat cu un triunghi de latură $\sqrt{3}$. □

O proprietate interesantă, din care se poate deduce problema 10, a fost dată de Al Soifer:

Problema 11. Pentru orice colorare a planului cu două culori şi pentru orice triunghi dat T, există în plan un triunghi monocolor congruent cu T sau un triunghi monocolor cu laturile egale cu dublul medianelor triunghiului T.

Soluţie. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului T. Alegem în plan două puncte A şi E de aceeaşi culoare la distanţă $AE = 2b$.
Construim triunghiurile ABC cu $AB = c$ şi $BC = a$ şi ADC cu $AD = a$ şi $DC = c$. Punctul C are aceeaşi culoare cu A sau cu E şi presupunem că A şi C au aceeaşi culoare (C_1). Dacă B sau D au această culoare, am terminat. Dacă nu, atunci triunghiul BDE are vârfurile de culoarea (C_2) şi laturile $BD = 2m_b$, $DE = 2m_a$, $BE = 2$, $BE = 2m_c$. □

Una dintre cele mai frumoase probleme pe care le-am întâlnit vreodată, cu o soluţie absolut ieşită din orice norme, este următoarea:

Problema 11. Se consideră o colorare a planului cu două culori.
Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
  a) Există în plan un triunghi monocolor cu laturile de lungimi a, b, c.
  b) Există în plan un triunghi echilateral, monocolor cu latura a sau b sau c.

Soluţie. Considerăm paralelogramul $HBDF$ cu laturile $HB = DF = a$, $FH = DB = b$ şi construim pe laturi triunghiurile echilaterale HAB, FDE, BDC şi HFG.

În figură apar în plus triunghiurile echilaterale AGD şi ECH congruente, de laturi c. Mai avem şase triunghiuri congruente între ele de laturi a, b, c: HBC, ABD, CDE, EFH, DFG, AHG.

Demonstrăm $b) \Rightarrow a)$. Dacă triunghiul echilateral AHB are vârfurile de culoarea (C_1) şi urmărim să evităm formarea triunghiurilor monocolore de laturi a, b, c, avem succesiv colorările $D \in (C_2)$, $G \in (C_2)$, $F \in (C_1)$, $E \in (C_2)$. Dacă $C \in (C_2)$ avem triunghiul DEC, iar dacă $C \in (C_1)$ avem triunghiul HBC.

Demonstrăm $a) \Rightarrow b)$. Dacă A, H, G sunt de culoarea (C_1) şi evităm triunghiuri echilaterale monocolore, avem succesiv colorările: $B \in (C_2)$, $F \in (C_2)$, $D \in (C_2)$, $C \in (C_1)$, $E \in (C_1)$, $H \in (C_2)$ şi atunci triunghiul GHF este echilateral cu vârfuri în (C_2). $\square$

O consecinţă imediată a problemelor 10 şi 11 este

Problema 12. (Laszlo Havasz, 1979) Să se arate că, pentru orice colorare a planului cu două culori, există trei puncte de aceeaşi culoare care sunt vârfurile unui triunghi de laturi $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ şi π.

Soluţie. Conform problemei 10, există în plan un triunghi monocolor de latură $\sqrt{2}$ sau unul de latură $\sqrt{6}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)$. Conform problemei 11, există un triunghi monocolor de laturi $\sqrt{2}$ sau $\sqrt{6}$ sau π (în loc de π se poate lua orice număr a, astfel ca $\sqrt{2}, \sqrt{6}$ şi a să fie laturi de triunghi).

Bibliografie

[1] Soifer, Al., *The Mathematics Coloring Book*, Springer Verlag, 2009

[2] Hadwiger, H. şi Debruner, H., *Combinatorial geometry in the Plane*, Nauka, Moscow, 1965

[3] Herman, J., Kucera, R. şi Simsa, J., *Counting and Configurations Problem in* Combinatorics, Arithmetics and Geometry, Springer Verlag, 2000

[4] Erdös, P. şi Graham, R., *Euclidean Ramsey Theorems I, II, III*, J. Combinatorial Theory, Ser. A, **14**(1973)

[5] Soifer, Al., *Triangles in two-colored plane*, Geombinatorics, 1991, 6–7, 13–14

[6] Soifer, Al., *Triangles in three-colored plane*, Geombinatorics, 1991, 11–12

Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Argument 20

Some applications of Cocea's Inequality

Daniel Sitaru şi Claudia Nănuţi

Abstract. In this paper are developed a some applications of a 1993's inequality of Romanian mathematician C. Cocea.

Cocea's inequality

Let P be a point in (ABC), where A, B, C are non-collinear. If $PA = x$; $PB = y$; $PC = z$ then:

$$ayz + bxz + cxy \geq abc \tag{*}$$

Proof. If P is the origin of the system of rectangular axis let denote by a, b, c the affixes of A, B respectively C.
$A(a); B(b); C(c); a, b, c$ with a, b, c pairwise distinct.

$$1 = |1| = \left|\frac{ab}{(c-a)(c-b)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-a)(b-c)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\right| + \left|\frac{bc}{(a-b)(a-c)}\right| + \left|\frac{ca}{(b-a)(b-c)}\right| =$$

$$= \frac{|a|\cdot|b|}{|c-a|\cdot|c-b|} + \frac{|b|\cdot|c|}{|a-b|\cdot|a-c|} + \frac{|c|\cdot|a|}{|b-a|\cdot|b-c|}$$

$$|b-c|\cdot|b|\cdot|c| + |a-c|\cdot|a|\cdot|c| + |a-b|\cdot|a|\cdot|b| \geq |b-c|\cdot|c-a|\cdot|a-b|$$

$$ayz + bxz + cxy \geq abc$$

Application 1. In $\triangle ABC$, the following relationship holds:

$$R \geq 2r \quad (\textit{Euler's inequality})$$

Solution. Let $P = O$ (circumcentre) in $(*)$

$$PA = PB = PC = x = y = z = R$$

$$a \cdot R \cdot R + b \cdot R \cdot R + c \cdot R \cdot R \geq abc$$

$$R^2(a + b + c) \geq 4RS$$

$$R \cdot 2s \geq 4S \Rightarrow 2sR \geq 4rs \Rightarrow R \geq 2r$$

Application 2. In $\triangle ABC$ the following relationship holds:

$$4(am_b m_c + bm_c m_a + cm_a m_b) \geq 9abc$$

Solution. Let $P = G$ (centroid) in $(*)$

$$PA = \frac{2}{3}m_a; PB = \frac{2}{3}m_c; PC = \frac{2}{3}m_a$$

Argument 20

$$a\cdot\frac{2}{3}m_b\cdot\frac{2}{3}m_c+b\cdot\frac{2}{3}m_c\cdot\frac{2}{3}m_a+c\cdot\frac{2}{3}m_a\cdot\frac{2}{3}m_b\geq abc$$
$$4(am_bm_c+bm_cm_a+cm_am_b)\geq 9abc$$

Application 3. In $\triangle ABC$, the following relationship holds:

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin B}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\geq\frac{2s}{r}$$

Solution. Let $P=I$ (incentre) in $(*)$

$$PA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}};PB=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}};PC=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$$
$$a\cdot\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}+b\cdot\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}+c\cdot\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}\geq abc$$
$$\frac{a}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{b}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{c}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\geq\frac{abc}{r^2}$$
$$\frac{2R\sin A}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{2R\sin B}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{2R\sin C}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\geq\frac{4Rrs}{r^2}$$
$$\frac{\sin A}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin B}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\geq\frac{4Rs}{r\cdot 2R}=\frac{2s}{r}$$

Application 4. In $\triangle ABC$, the following relationship holds:

$$\sin A|\cos B\cos C|+\sin B|\cos C\cos A|+\sin C|\cos A\cos B|\geq\frac{rs}{2R^2}$$

Solution. Let $P=H$ (orthocentre) in $(*)$

$$PA=2R|\cos A|;PB=2R|\cos B|;PC=2R|\cos C|$$
$$a\cdot 2R|\cos B|2R|\cos C|+b\cdot 2R|\cos C|2R|\cos A|+c\cdot 2R|\cos A|2R|\cos B|\geq abc$$
$$a|\cos B\cos C|+b|\cos C\cos A|+c|\cos A\cos B|\geq\frac{abc}{4R^2}$$
$$2R\sin A|\cos B\cos C|+2R\sin B|\cos C\cos A|+2R\sin C|\cos A\cos B|\geq\frac{4Rrs}{4R^2}=\frac{rs}{R}$$
$$\sin A\cdot|\cos B\cos C|+\sin B|\cos C\cos A|+\sin C|\cos A\cos B|\geq\frac{rs}{2R^2}$$

Application 5. In $\triangle ABC$ the following relationship holds

$$\sum_{cyc(a,b,c)}a\sqrt{((b-c)^2+4r^2)((c-a)^2+4r^2)}\geq abc$$

Solution. Let $P=N$ (Nagel's point) in $(*)$

$$PA=\sqrt{(b-c)^2+4r^2};PB=\sqrt{(c-a)^2+4r^2};PC=\sqrt{(a-b)^2+4r^2}$$
$$\sum_{cyc(a,b,c)}a\cdot PB\cdot PC\geq abc$$

$$\sum_{cyc(a,b,c)} a\sqrt{((b-c)^2+4r^2)((c-a)^2+4r^2)} \geq abc$$

Application 6. In $\triangle ABC$, the following relationship holds:

$$a^2m_bm_c + b^2m_cm_a + c^2m_am_b \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4}$$

Solution. Let $P = K$ (Lemoine's point) in $(*)$

$$PA = \frac{2bcm_a}{a^2+b^2+c^2}; PB = \frac{2cam_b}{a^2+b^2+c^2}; PC = \frac{2abm_c}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sum_{cyc(a,b,c)} \left(a \cdot \frac{2cam_b}{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{2abm_c}{a^2+b^2+c^2}\right) \geq abc$$

$$4abc \sum_{cyc(a,b,c)} \frac{a^2m_bm_c}{(a^2+b^2+c^2)^2} \geq abc$$

$$a^2m_bm_c + b^2m_cm_a + c^2m_am_c \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{4}$$

In all the applications, the equality holds iff $a = b = c$ (equilateral triangle)

Bibliografie

[1] Becheanu, M., *Mathematical Olympiads*, Gil Publishing House, Zalău, 1997

[2] Bencze, M. and Sitaru, D., *699 Olympic Mathematical Challenges*, Studis Publishing House, Iaşi, 2017

[3] Bencze, M. and Sitaru, D., *Quantum Mathematical Power*, Studis Publishing House, Iaşi, 2017

[4] Bencze, M. and Sitaru, D., *Olympic Mathematical Energy*, Studis Publishing House, Iaşi, 2018

[5] Apostolopoulos, G. and Sitaru, D., *The Olympic Mathematical Marathon*, Cartea Românească Publishing House, Piteşti, 2017

[6] Romanian Mathematical Magazine - Interactive Journal, www.ssmrmh.ro

Profesor, C.N. Economic "Theodor Costescu", Drobeta-Turnu Severin

Profesoară, C.N. Economic "Theodor Costescu", Drobeta-Turnu Severin

Argument 20

Tabăra Judeţeană de Excelenţă în Matematică
Târgu Lăpuş, Maramureş
1 – 7 septembrie 2018

În perioada 1-7 septembrie 2017 s-a desfăşurat la Târgu Lăpuş, Tabăra Judeţeană de Excelenţă în Matematică.
Au participat elevi de gimnaziu şi liceu, care s-au clasat pe primele locuri la Olimpiada judeţeană de matematică.

Profesorii care au însoţit grupul şi au ţinut lecţii în tabără au fost: Gheorghe Boroica - directorul taberei, Florin Bojor, Dana Heuberger, Cristian Heuberger, Daniel Horge, Nicolae Muşuroia (C.N. "Gheorghe Şincai"), Vasile Ienuţaş (Şc.gim. "Nicolae Iorga"), Vasile Giurgi (C.N. "Dragoş Vodă"), Teodor Leşe, Mariana Pop (L.T. "Petru Rareş"), Tudor Sântejudean, student, fost olimpic şi conf.univ.dr. Vasile Pop de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca.

Clasa a VI-a

Premiul de excelenţă. *Cosar Antonia*, C.N. "Vasile Lucaciu"
Premiul I. *Pop Tudor*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul al II-lea. *Trenişan Voica*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul al III-lea. *Durtea David*, C.N. "Vasile Lucaciu"
Menţiuni. *Muţ Alexandra, Nedea Carmen, Pop Andreea, Chindriş Ioana, Leo Darius*, L.T. "Petru Rareş" Tg. Lăpuş

Clasa a VII-a

Premiul de excelenţă. *Hartzos Călin Tiberius*, L.T. Vişeu de Sus
Premiul I. *Tămâian Lidia*, Şc. gim. "Nicolae Iorga"
Premiul al II-lea. *Moise Vanesa*, L.T. "Petru Rareş" Tg. Lăpuş
Menţiuni. *Herbil Anastasia*, C.N. "Dragosş Vodă" Sighetu Marmaţiei, *Cârtiţă Bianca, Fülöp Miruna, Pop Adriana*, L.T. "Petru Rareş" Tg. Lăpuş

Clasa a VIII-a

Premiul de excelenţă. *Tuş Traian*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul I. *Dumitriu Marian*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul al II-lea. *Costin Oana*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul al III-lea. *Onea Iulian*, C.N. "Vasile Lucaciu"
Menţiuni. *Muntean Tudor*, C.N. "Gheorghe Şincai", *Oana Cristiana*, L.T. "Petru Rareş" Tg. Lăpuş, *Giurgi Bogdan*, C.N. "Dragosş Vodă" Sighetu Marmaţiei

Clasa a IX-a

Premiul de excelenţă. *Lazea Darius, Zlampareţ George*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul I. *Mujdar Milan*, C.N. "Dragoş Vodă"

Premiul al II-lea. *Brăgaru Maria*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul al III-lea. *Dragoş Andreea*, C.N. "Vasile Lucaciu"
Menţiuni. *Manu Miruna, Paven Andreea, Ţîţoc Alexandra, Leo Darius*, L.T. "Petru Rareş"

Clasa a IX-a

Premiul de excelenţă. *Lazăr Laurenţiu*, C.N. "Dragosş Vodă"
Premiul I. *Zaharie Oana*, C.N. "Vasile Lucaciu"
Premiul al II-lea. *Talpoş Carina*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul al III-lea. *Treista Georgiana*, C.N. "Dragosş Vodă"
Menţiuni. *Ciceu Denis*, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XI-a

Premiul de excelenţă. *Boroica Adrian*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul I. *Becsi Paul*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul al III-lea. *Ilieş Iulia*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Menţiuni. *Onea Vlad*, C.N. "Gheorghe Şincai", *Ţiplea Ştefan, Corneştean Iasmina*, C.N. "Dragosş Vodă"

Clasa a XII-a

Premiul de excelenţă. *Matei Bledea Alexandru*, C.N. "Gheorghe Şincai"
Premiul I. *Dicu Alexandru*, C.N. "Dragosş Vodă"
Premiul al II-lea. *Stepan Dacian, Cotârlan Codrin*, C.N. "Dragosş Vodă"

Clasa a VI-a

1. *a*) Să se determine numărul $a \cdot b \cdot c \cdot \overline{de}$, ştiind că $\dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{b} = \dfrac{\overline{de}}{67} = \dfrac{a+b}{c}$.

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{a^3+b^3}{c^2} = \dfrac{b^3+c^3}{a^2} = \dfrac{c^3+a^3}{b^2}$, să se calculeze $\dfrac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3}$.

2. Determinaţi cele mai mici numere naturale nenule a, b, c pentru care numerele $2a+2b+2c$, $4a+3b+2c$, 2 şi 3 sunt termenii unei proporţii.

3. *a*) Punctele A, B, C, D sunt situate pe o dreaptă d în această ordine. Este adevărată egalitatea: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$?

b) Să se afle numărul maxim de unghiuri formate în jurul unui punct cu măsurile exprimate în grade sexagesimale, prin numere naturale consecutive.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Vasile Ienuţaş, Şc. gim. "Nicolae Iorga"

Argument 20

Clasa a VII-a

1. Fie M şi N mijloacele laturilor $[CD]$ şi $[AD]$ ale patrulaterului $ABCD$ şi $CN \cap BM = \{P\}$. Să se demonstreze că
a) $BM \perp CN$;
b) $\triangle APB$ este isoscel.

2. Să se arate că ecuaţia $x^2 - 1 = 3(z^2 - y^2)$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi cu $|y| \neq |z|$.

3. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{x}$ şi $\sqrt{x - 6\sqrt{x}}$ să fie numere naturale.

4. Pe suprafaţa unui disc de rază 1 cm se pun arbitrar 1000 de puncte. Să se arate că se poate trasa un cerc de rază $\dfrac{1}{9}$ cm, care să conţină cel puţin 11 puncte.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a VIII-a

1. Să se determine numerele reale a, b, c, dacă

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c-1} + \sqrt{c+a-2} = a+b+c.$$

2. Un plan α intersectează muchiile $[AB], [AC], [AD]$ ale tetraedrului regulat $ABCD$ în punctele M, N respectiv P. Să se demonstreze că

$$MN + NP + PM \geq AM + AN + AP.$$

3. Arătaţi că, dacă 5 puncte se găsesc într-o sferă de rază 1 cm, atunci există două între care distanţa este cel mult $\sqrt{2}$ cm.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai"
Conf.univ.dr. Vasile Pop, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a+b+c$ este divizibil cu 6. Să se demonstreze că $a^{3^n} + b^{3^n} + c^{3^n}$ este divizibil cu 6 pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe laturile triunghiului ABC se consideră $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$ cu $AM = BN = CP$. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BMN respectiv CNP. Să se arate că $\triangle ABC$ şi $\triangle G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

3. Fie $n > 6$ un număr natural şi $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, toate numere naturale prime cu n şi mai mici decât n. Să se arate că $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă n este număr prim sau $n = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a X-a

1. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}^*$ şi $|z_1| = |z_2|$. Să se demonstreze că $z_1^n + z_2^n \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie cu proprietăţile
a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \geq 0$;
b) Mulţimea $A = \{x \in [0, \infty) \mid f(x) = 0\}$ este finită.
Să se arate că funcţia f este injectivă.

3. *a*) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare şi inversabilă. Să se arate că ecuaţiile $f(x) = f^{-1}(x)$ şi $f(x) = x$ sunt echivalente.
b) Să se rezolve ecuaţia $\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1)$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XI-a

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k}$. Să se calculeze:
a) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$;
b) $\lim\limits_{n \to \infty} n(a_n - 1)$;
c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left[n(a_n - 1) + \dfrac{1}{2}\right]$.

2. Se consideră mulţimea $A_n = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^{n+1} = 2018^n X\right\}$.
a) Să se arate că A_n are o infinitate de elemente pentru $\forall\, n \geq 1$;
b) Să se determine $A_3 \cap A_{2018}$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care verifică următoarele condiţii:
$\det(A^{2014} + I_2) = \det(A^{2014} - I_2)$ şi $\det(A^{2016} + I_2) = \det(A^{2016} - I_2)$.
Să se demonstreze că $\det(A^n + I_2) = \det(A^n - I_2)$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"
Student Sântejudean Tudor, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Argument 20

Clasa a XII-a

1. Să se determine funcţia derivabilă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia

$$(x+1)f(x) = x^5 + \int_0^x f(t)dt,\ \forall\, x \geq 0$$

2. Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie continuă şi F o primitivă a sa, astfel încât $F(0) = 0$ şi $F(1) \leq 1$.

a) Să se arate că ecuaţia $F(x) = 2x - 1$ are soluţie unică în $[0,1]$;

b) Daţi un exemplu de funcţie f cu proprietăţile din enunţ, pentru care primitiva F verifică şi ea proprietăţile din enunţ, iar ecuaţia de la punctul a are soluţia $x = \dfrac{1}{2}$.

3. a) Fie $(G, \cdot)$ un monoid comutativ, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \neq q$ şi $a \in G$ un element inversabil. Dacă ecuaţiile $x^p = a$ şi $x^q = a$ au soluţii în G, să se demonstreze că ecuaţia $x^n = a$ are soluţie în G, unde n este cel mai mic multiplu comun al numerelor p şi q.

b) Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze σ^3 şi τ^2 şi deduceţi că ecuaţia $x^6 = \sigma$ are cel puţin o soluţie în S_4.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"

Argument 20

Concursul interjudeţean de matematică ”ARGUMENT” Baia Mare, 11–12 noiembrie 2017

Organizatori. Catedra de matematică a Colegiului Naţional ”Gheorghe Şincai”, în parteneriat cu Inspectoratul Şcolar Judeţean Maramureş şi Asociaţia ”Argument”.
Locul de defăşurare. Colegiul Naţional ”Gheorghe Şincai”.
Perioada. 10-11 noiembrie 2017.
Preşedintele concursului. Conf.univ. dr. Vasile Pop de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca.
Participanţi. Loturile colegiilor naţionale: ”Andrei Mureşanu” Dej, ”Mihai Eminescu” Satu Mare, ”Alexandru Papiu Ilarian” Tg. Mureş, ”Silvania” Zalău, ”Emanuil Gojdu” Oradea, Liceul teologic Baptist ”Emanuel” Oradea, ”Dragoş Vodă” Sighetu Marmaţiei, ”Vasile Lucaciu” Baia Mare, ”Gheorghe Şincai” Baia Mare, precum şi elevi de gimnaziu de la şcolile reprezentative din judeţ.

Clasa a V-a

1. Cel mai mic număr natural de trei cifre distincte, cu proprietatea că produsul cifrelor sale este 8, are triplul egal cu
a) 354 b) 372 c) 324 d) 777

2. Numărul natural x pentru care $1 + 2 \cdot \left\{2 \cdot [3 + (x - 4) \cdot 5] : 6\right\} \cdot 7 = 15$ este
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

3. Numărul de numere naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 6 este
a) 2 b) 3 c) 8 d) 9

4. Câte numere naturale dau câtul 11 la împărţirea cu 2017?
a) 2015 b) 2016 c) 2017 d) 10

5. Dacă împărţim numărul natural n la 56, obţinem restul 37. Restul împărţirii lui n la 14 este
a) 5 b) 7 c) 9 d) 11

6. Numărul $\left[3^{121} : 9^{60} + (5^3)^2 : (5^2)^2\right] : 2^2 \cdot 3 - 3$ este
a) 3 b) 13 c) 18 d) 20

7. Ultima cifră a numărului $103^{100} + 37^{10} + 42^{53} + 24^{31}$ este
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6

8. Dacă $S = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{100}$, atunci numărul $6 \cdot S + 1$ este
a) 7^{102} b) 7^{101} c) $7^{101} - 6$ d) $7^{102} - 6$

9. Se consideră numărul $n = 1234567891011\dots 99100$

a) Câte cifre are numărul n?

b) Să se suprime 100 de cifre din numărul n, astfel încât numărul rămas să fie cât mai mare posibil.

10. Determinaţi numărul tripletelor (m, n, p) de numere naturale distincte, astfel încât $653 < 5^m + 5^n + 5^p < 809$

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a VI-a

1. Dacă a, b sunt numere prime şi $[2a, 3b] = 858$, atunci $a + b$ este
a) 143 b) 24 c) 144 d) 59

2. Numărul natural de trei cifre, care împărţit pe rând la 10, 11 şi 12, dă resturile 5,4 respectiv 3, este
a) 175 b) 555 c) 675 d) 925

3. Numărul perechilor $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, care verifică ecuaţia $xy = x + 4096$ este
a) 1 b) 12 c) 2 d) 13

4. Suma celor mai mari divizori impari ai numerelor $10, 11, 12, \dots, 19$ este
a) 100 b) 145 c) 10 d) 64

5. Un segment are lungimea 729 cm. Se împarte segmentul în trei segmente congruente şi se şterge segmentul din mijloc. Fiecare segment rămas se împarte în trei segmente congruente şi se şterge segmentul din mijloc. Repetăm procedeul până când toate segmentele au lungimea de 1 cm. Numărul segmentelor rămase este:
a) 128 b) 243 c) 64 d) 729

6. Suplementul complementului unui unghi este egal cu complementul suplementului altui unghi. Suma măsurilor celor douăunghiuri este:
a) 90° b) 45° c) 180° d) Nu există astfel de unghiuri

7. Avem la dispoziţie segmente cu lungimile egale cu divizorii numărului 3000 exprimate în centimetri, câte un segment pentru fiecare divizor. Suma lungimilor acestor segmente este:
a) 3000 cm b) 9360 cm c) 136 cm d) 74880 cm

8. Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente este $46^\circ 30'$. Dacă măsura unui unghi este cu 37° mai mare decât măsura celuilalt, atunci măsura unghiului mai mic este:
a) 28° b) 65° c) 23° d) 18°

9. Pentru numărul natural n vom nota cu $S(n)$ suma cifrelor numărului n.

a) Calculaţi $S(a)$, unde $a = 9 + 99 + \cdots + \underbrace{999\ldots 99}_{\text{2017 cifre de 9}}$;

b) Arătaţi că $(10^n - 1)(k+1) = k \cdot 10^n + \left(\underbrace{999\ldots 99}_{\text{n cifre de 9}} - k\right)$ pentru orice numere naturale n şi k;

c) Să se calculeze $S(999 \cdot k)$, unde k este un număr natural de două cifre.

10. Un robocangur se găseşte în punctul O de pe dreapta d. El face salturi pe dreapta d la stânga sau la dreapta punctului în care se află. Primul salt este de 1 m şi fiecare salt, începând cu al doilea, este dublu faţă de cel anterior.

a) Să se arate că, după 3 salturi, robocangurul poate să ajungă la distanţa de 7 m de O, respectiv de 5 m de O.

b) Să se demonstreze că robocangurul poate să ajungă în punctul A de pe dreapta d, care se află la distanţă de 2017 m de O la dreapta lui O.

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Meda Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a VII-a

1. Dacă $x \cdot 2^{2016} = (2^{2017-1}) : \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{2016}}\right)$, atunci x este:

a) 4 b) 2 c) 1 d) 23

2. Valoarea sumei $S = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{24 \cdot 50}$ este:

a) $\frac{24}{25}$ b) 1 c) $\frac{12}{25}$ d) $\frac{25}{12}$

3. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \mathbb{Z}$ şi $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = -1$, atunci mulţimea valorilor produsului

$$P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \cdot \left(x_3 + \frac{1}{x_4}\right) \cdot \left(x_4 + \frac{1}{x_5}\right) \cdot \left(x_5 + \frac{1}{x_1}\right)$$

este:

a) $\{0\}$ b) $\{-10, 32\}$ c) $\{-32, 0, 32\}$ d) $\{-32, 0\}$

4. Soluţia ecuaţiei $|x-1| + |x-2| + \cdots + |x-9| = 10(x-11)$ este:

a) 40 b) 65 c) 60 d) 17

5. Se dă şirul: $a_1 = 1 + \frac{1}{1}, a_2 = 1 + \frac{1}{2}, a_3 = 1 + \frac{1}{3}, \ldots, a_n = 1 + \frac{1}{n}, \ldots$ cu $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul tripletelor (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) de termeni consecutivi ai şirului cu $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \in \mathbb{N}$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) infinit

6. Se construieşte pătratul $ACDE$ în exteriorul triunghiului echilateral ABC. Măsura unghiului $\measuredangle DBC$ este:

a) $15°$ b) $20°$ c) $30°$ d) $45°$

7. Liniile mijlocii ale triunghiului isoscel ABC au lungimile de 5 respectiv 11 cm. Perimetrul triunghiului ABC este:

a) 42 cm b) 54 cm c) 56 cm d) 49 cm

8. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \| CD$, $m(\measuredangle B) = 60°$, $AD = DC = CB$, iar linia mijlocie are lungimea 30 cm. Perimetrul trapezului este:

a) 45 cm b) 60 cm c) 85 cm d) 100 cm

9. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, notăm cu x_n cel mai mare număr natural impar care divide pe n şi cu $S_n = x_{n+1} + \cdots + x_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi $S(4)$;

b) Arătaţi că, dacă $a, b \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, $a \neq b$, atunci $x_a \neq x_b$;

c) Calculaţi $S(n)$.

Vasile Pop

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $AB = 3BM$ şi $AC = 3AN$, iar $\{Q\} = BN \cap CM$.

a) Demonstraţi că $MN \perp AC$;

b) Calculaţi $m(\measuredangle BQC)$.

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a VIII-a

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $2a - b = -5$, $-a + 2b = 4$ şi

$$S = (a+b+c)^2 - (a-b-c)^2 + (a+b-c)^2 - (a-b+c)^2,$$

atunci

a) $S = 0$ b) $S = 16$ c) $S = -16$ d) $S = 8$

2. Valoarea numărului $a = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{2,56} : \sqrt{0,64}$ este

a) $2\sqrt{3} - 5$ b) -1 c) $2\sqrt{3} + 1$ d) -5

3. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n + 2\sqrt{4n^2 - 1}}} = 2$$

a) 13 b) 10 c) nu există n d) 12

4. Dacă $x \in \mathbb{R}^*$ este astfel încât $x - \dfrac{1}{2x} = 2$, atunci numărul $x^3 - \dfrac{1}{8x^3}$ este egal cu:

a) 14 b) 11 c) 2 d) 5

5. Dacă $a = \sqrt{2^{2018} - 2^{1010} + 2^{1011} + 1}$ şi $b = \sqrt{2^{2018} - 2^{1011} + 2^{1010} + 1}$, atunci $a - b$ este egal cu:

a) 2 b) -2 c) 2^{1010} d) $2^{1010} + 2$

6. Fie punctele A şi B în spaţiu, cu $AB = 8$. Mulţimea punctelor M din spaţiu, astfel încât $MA = MB = 5$, este:

a) un plan b) o dreaptă c) un cerc d) $\emptyset$

7. Insula MATE este circulară, iar centrul său O este inaccesibil. Geo a mers pe ţărm şi a ajuns pe rând în localităţile A, B şi C (în această ordine). Localnicii i-au spus că $AB = 10$ km, $m(\measuredangle CAB) = 66^\circ$ şi $m(\measuredangle CBA) = 84^\circ$, iar Geo şi-a dat seama că poate calcula cu aproximaţie lungimea ţărmului. Cel mai apropiat număr întreg de această lungime (în km) este:

a) 628 b) 62 c) 63 d) 629

8. O furnică se deplasează pe suprafaţa piramidei triunghiulare $VABC$, mergând pe toate feţele laterale, pe drumul cel mai scurt, pornind din vârful A şi revenind tot acolo. Dacă $VA = 2$ cm şi $m(\measuredangle AVB) = 40^\circ$, atunci distanţa parcursă de furnică este:

a) $2\sqrt{3}$ cm b) $2\sqrt{2}$ cm c) 4 cm d) 3 cm

9. Pentru fiecare număr $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $f(n)$ cel mai mare număr natural impar care îl divide pe n.
Fie suma $S(n) = f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi $S(20)$;
b) Calculaţi $S(n)$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare.

Vasile Pop

10. Fie cubul $ABCDEFGH$. Fie M piciorul perpendicularei din A pe bisectoarea unghiului AHB, N piciorul perpendicularei din C pe bisectoarea unghiului BHC, S piciorul perpendicularei din D pe bisectoarea unghiului DBH, $\{P\} = AM \cap BH$ şi $\{Q\} = DS \cap BH$.

a) Demonstraţi că $MN \| AC$;
b) Demonstraţi că $APGQ$ este un paralelogram.

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Dana Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Cristian Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a IX-a

1. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ astfel ca

$$P\left(\sqrt{10}\right) = 97531 + 8642\sqrt{10}.$$

Să se determine $P(1)$ şi $P(10)$.

2. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ există $p, q \in \mathbb{Q}$ şi $r, s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ astfel ca

$$a^2 - pa + r = a^2 - sa + q = 0.$$

3. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ care verifică relaţiile de recurenţă

$$a_0 = 2, \quad b_0 = -1,$$
$$a_{n+1} = a_n + b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,,\ b_{n+1} = a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,.$$

Să se determine $[a_n]$ şi $[b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există în plan o mulţime finită de vectori X_n, astfel ca pentru orice vector $\overline{v} \in X_n$, există exact n vectori $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n} \in X_n$ cu proprietatea $|\overline{v} - \overline{v_1}| = |\overline{v} - \overline{v_2}| = \cdots = |\overline{v} - \overline{v_n}| = 1$.

Clasa a X-a

1. Fie x, y numere pozitive care verifică relaţiile:

$$x = y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x + \ldots}}}\,, \quad y = x - \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{y + \ldots}}}$$

(unde x şi y apar de o infinitate de ori).
Să se determine $x + y$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe (reale) sistemul de ecuaţii:

$$(x + 2y)(x + 2z) = 7,\ (y + 2z)(y + 2x) = 3,\ (z + 2x)(z + 2y) = 11.$$

3. Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 1$$

şi

$$x_{n+1} = x_n y_{n-1} + x_{n-1} y_n,\ y_{n+1} = y_n y_{n-1} - x_n x_{n-1},\ n \geq 2.$$

a) Să se arate că $x_n^2 + y_n^2 = 2^{F_n}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $(F_n)_n$ este şirul lui Fibonacci:

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

b) Să se arate că

$$y_n = \sqrt{2}^{F_n} \cos \frac{F_n \cdot \pi}{4} \quad \text{şi} \quad x_n = \sqrt{2}^{F_n} \sin \frac{F_n \cdot \pi}{4}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

4. Fie funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjectivă şi $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injectivă.
a) Să se arate că dacă $f(n) \geq g(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, atunci ambele funcţii sunt bijective.
b) Rămâne adevărată concluzia de la *a*) dacă $f(n) \leq g(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$?

Argument 20

Clasa a XI-a

1. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 2$ este verificată egalitatea

$$[\log_2 n] + \left[\log_2 \frac{n}{2}\right] + \left[\log_2 \frac{n}{3}\right] + \cdots + \left[\log_2 \frac{n}{n}\right]$$
$$= \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^n}\right]$$

2. O alee de dimensiuni $2 \times n$ se pavează cu dale 1×1 albe şi negre. Notăm cu a_n numărul pavajelor care nu conţin un pătrat monocolor 2×2.

a) Să se arate că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1},\ \forall\, n \geq 1.$$

b) Arătaţi că şirul $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

3. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$a_{n+1} = (1-\alpha)a_n + \alpha b_n,\ b_{n+1} = \beta a_n + (1-\beta)b_n,\ n \in \mathbb{N},$$

unde $\alpha, \beta \in (0,1)$ şi $a_0 < b_0$. Să se studieze monotonia, mărginirea, convergenţa şi limitele şirurilor.

4. Fie $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f(aX + bY) = af(X) + bf(Y),$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi orice $x, y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că există o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $f(X) = Tr(A \cdot X)$ pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (S-a notat cu $Tr(B)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei B).

Clasa a XII-a

1. Să se determine funcţiile continue $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, cu primitiva $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, care verifică relaţia

$$(1) \qquad F(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{2},\ \forall\, x \in (0,\infty), \quad f(1) = 2.$$

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n-1$ cu proprietatea

$$f(k) = \frac{1}{k},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Să se determine $f(n+1)$.

3. Pentru fiecare matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definim mulţimea

$$G(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A + X) = \det A + \det X\}.$$

a) Să se arate că $(G(A), +)$ este grup.

b) Să se arate că dacă $A \neq 0$ şi $B \neq 0$, atunci grupurile $(G(A), +)$ şi $(G(B), +)$ sunt izomorfe.

4. Fie G o mulţime nevidă. Pe această mulţime se consideră legea de compoziţie " $\cdot$ " şi funcţia $f : G \to G$, $f(x) = \overline{x}$, $\forall\, x \in G$. Dacă

$$a \cdot (b \cdot c) = d \cdot (e \cdot c) \Rightarrow b = (\overline{a} \cdot d) \cdot e \quad \forall\, a, b, c, d, e \in G,$$

demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup.

Premianţii concursului "Argument", ediţia a IX-a

Clasa a V-a

Premiul I. *Chende Paula* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Pop Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Sajerli Alexia* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Menţiuni. *Pop Rareş, Săcăleanu Ada, Mercea Alexandru, Temeian Adrian, Moraru Andrei, Onţ Andreea Denisa, Săsăran Şerban, Petruţ Mihai, Bucur Briana, Marian Antonia, Dudaş Alex, Nechita Andrei Ştefan, Filip Bogdan* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Balog-Ciegler Christian, Farcaş Lorena Maia, Marincaş Daria Sorina, Pop Tudor Andrei, Barbos Darius, Iancu Andrei, Tănase Cristian, Cosar Antonia, Tiba Paul-Ştefan* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare); *Petrovan Rareş Sebastian, Florea Vasile Alexandru* (C.N. "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei), *Palfi Gabriel Doru* (Şc. Gim. "N. Iorga", Baia Mare).

Clasa a VI-a

Premiul I. *Robu Dacian* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Ştirbu Andrei* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Sajerli Alexia* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Menţiuni. *Şpan Teodora, Ioniţă Sebastian, Ureche Rafael, Şteţco Rareş, Horotan Tudor, Breban Camelia, Pop Anda* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Teleptean Amalia, peter Luca, Koblicica Iulia, Vancea Bianca, Cornişescu Eduard* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare); *Herbil Anastasia* (C.N. "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei), *Tămâian Lidia* (Şc.Gim. "N. Iorga", Baia Mare), *Sugar Andrei* (Şc.Gim. "D. Cantemir", Baia Mare), *Shahzad Ahmed Rayad* (Şc.Gim. "L. Blaga", Baia Mare).

Clasa a VII-a

Premiul al II-lea. *Muntean Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Onea Iulian* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Menţiuni. *Costin Oana, Tuş Traian, Gheţe Ruxandra, Mărcuş Alex, Tiut Cristian, Dumitriu Marian, Şpan Mihai, Varga Andrei, Sava Rareş, Prună Ştefana, Naşcu Matei* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Diaconescu Răzvan, Nagy Alin, Coman David, Popescu Andrei* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare), *Giurgi Bogdan Vasile* (C.N. "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei), *Szmuck Patrick* (Şc. Gim. nr. 18, Baia Mare), *Szebeni Amalia* (Şc.Gim. "George Coşbuc", Sighetu Marmaţiei).

Argument 20

Clasa a VIII-a

Premiul I. *Zlampareţ George* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Lazea Darius* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Menţiuni. *Iliuţă Filip, Gulin Tudor, Borcuti Oana, Dan Izabela, Lupşe Isabella, Vâţă Alexandra, Pop Radu* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Robu Raluca, Ştirbu Silvia* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare), *Hosu Iulia, Mujdar Milan* (C.N. "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei), *Pălincaş Mihai, Mecea Corina* (Şc.Gim. "George Coşbuc", Baia Mare), *Ilieş Andrei* (Şc.Gim. "George Coşbuc", Sighetu Marmaţiei), *Brăgaru Maria Daria* (Colegiul de Arte, Baia Mare).

Clasa a IX-a

Premiul al II-lea. *Talpoş Carina* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Lazea Darius* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Menţiuni. *Giuroiu Tudor, Turda Raul, Goia Alexia, Vanciu Daria, Ciceu Denis, Mariş Radu, Riglea Teodora* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Robu Raluca, Ştirbu Silvia* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare), *Lazăr Laurenţiu, Treista Ioana Georgiana* (C.N. "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei).

Clasa a X-a

Premiul I. *Robu Vlad* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Becsi Paul* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Menţiuni. *Boroica Adrian, Andreicuţ Teofil, Ilieş Iulia, Pop Călin, Filip Anda* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Robu Raluca, Ştirbu Silvia* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare), *Spaczai Carla-Noemi* (C.N. "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei).

Clasa a XI-a

Premiul al II-lea. *Zelina Paul* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Matei Bledea Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Menţiuni. *Mureşan Alex* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Kaszta Tamas* (L.T. "Nemeth Laszlo"), *Diaconescu Mălina* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Clasa a XII-a

Premiul al II-lea. *Mărieş Maria* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Menţiuni. *Bojor Barbu, Pop Vlad, Csolpan Iulia* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Pentru clasele de liceu subiectele au fost selectate şi propuse de:
Conf.univ.dr. Vasile Pop

Concursul ”Gheorghe Şincai” pentru micii matematicieni
Ediţia a VIII-a, 18 aprilie 2018

Organizatori. Catedra de matematică a Colegiului Naţional ”Gheorghe Şincai” şi Asociaţia ”Argument”.

Locul de desfăşurare. Colegiul Naţional ”Gheorghe Şincai”.

Participanţi. **165** elevi de clasa a IV-a de la şcolile gimnaziale din oraş.

I. Considerăm numerele a, b şi c, astfel încât:

$a = (30 - 4 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 4 + 5) - 32 : 8 \cdot (29 + 2 \cdot 3)$,

b verifică relaţia $27 \cdot 7 - 7 \cdot b = (8 - 2 : 2) \cdot [161 - (16 \cdot 16 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)] : 5$,

iar $c = 50 \cdot 4 - (n : 4 - 432) : 5$, unde n este cel mai mare număr natural par mai mic ca 2017 şi care are cifra zecilor 4.

1) Aflaţi numerele a, b, c;

2) Demonstraţi că $10 \cdot b - 40 = a \cdot a + 40$;

3) Demonstraţi că $10 \cdot b + a = c + 1$.

II. Mai mulţi prieteni au o sumă de lei şi doresc să cumpere mere, pere şi caise. Merele costă 4 lei kilogramul, iar caisele 8 lei kilogramul. Dacă ar dori să cumpere 8 kilograme de mere, 4 kilograme de pere şi 6 kilograme de caise ar mai avea nevoie de 8 lei. Dacă ar reduce cantitatea de pere cu 2 kilograme, le-ar mai rămâne 6 lei.

1) Arătaţi că 3 kilograme de pere şi 4 kilograme de caise costă împreună 53 lei.

2) Aflaţi dacă prietenii, cu suma pe care o au, pot cumpăra 6 kilograme de mere, 7 kilograme de pere şi 3 kilograme de caise.

3) Ştiind că prietenii au suma de 100 lei şi că din fiecare fruct trebuie să cumpere cel puţin 1 kilogram, aflaţi cantitatea maximă de fructe pe care o pot cumpăra prietenii, astfel încât să folosească toată suma avută.

III. Considerăm tabloul de numere următor:

1		2		3		4		5	...	98		99		100
	3		5		7		9		...		197		199	
		8		12		16			...			396		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

astfel că fiecare dintre numere (mai puţin cele de pe primul rând) reprezintă suma numerelor alăturate lui, situate cu un rând mai jos. Tabelul se va termina în partea de jos, atunci când pe rând va apărea un singur număr.

1) Calculaţi suma primelor 10 numere de pe rândul al treilea.

2) Cu ce număr începe rândul al optulea?

3) Numărul 2018 apare în tabloul de mai sus?

4) De câte ori apare în tabel numărul 100?

Subiectul a fost propus de:
Prof. Dana Heuberger şi Prof. Cristian Heuberger

Premianţii:

Premiul I. *Mare Lucas, Szabo Ilinca* (Şc.Gim. "George Coşbuc").

Premiul al II-lea. *Costin Tudor* (Şc.Gim. "Avram Iancu"); *Dragoş Victor* (Colegiul de Arte); *Pitic Andra* (Şc.Gim. "Nicolae Iorga").

Premiul al III-lea. *Cardoş Aida-Giulia* (Şc.Gim. "Nicolae Iorga"); *Silinc Alex* (Şc.Gim. "Avram Iancu").

Menţiuni. *Dzeabeniuc Vladimir* (Colegiul de Arte); *Ianoş Alex* (Şc.Gim. "Alexandru Ivasiuc"), *Ursa Adrian* (Şc.Gim. "Dimitrie Cantemir"); *Sabou Sasha* (Şc.Gim. "Alexandru Ivasiuc"), *Iacob Ana Maria* (Şc.Gim. "Lucian Blaga"); *Ormenişan Ariana Iulia* (Şc.Gim. "Nicolae Iorga), *Sălăjan Noris Cruz* (Şc.Gim. "Nichita Stănescu").

Olimpiada de matematică etapa locală Maramureş - 17 februarie 2018

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi ecuaţia $\{2017+x\}+\{2018x\}=x$, unde $\{a\}$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

2. *a*) Arătaţi că $\dfrac{x}{1+y}+\dfrac{y}{1+x}+\dfrac{1}{x+y}\geq\dfrac{3}{2}$, $\forall\, x,y>0$;

b) Numerele reale $x_1,x_2,\ldots,x_n$ verifică inegalitatea $\sum\limits_{k=1}^{n}kx_k\geq\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$.

Arătaţi că $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\geq\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$.

(*Neculai Stanciu, G.M. 2/2018*)

3. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC cu $MA\|BC$ astfel încât AC separă punctele M şi B. Notăm cu H,H_1,H_2,H_3 ortocentrele triunghiurilor ABC, MAB, MBC, MCA. Arătaţi că

$$ABCM \text{ este dreptunghi } \Leftrightarrow HH_1^2+HH_2^2=HH_3^2.$$

(*Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare*)

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Gherasin Gheorghe, Liceul Ped. "Regele Ferdinand" Sighetu Marmaţiei
Prof. Giurgi Vasile, C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei
Prof. Muşuroia Nicolae, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Clasa a X-a

1. Fie numerele complexe p şi q, cu $q\neq 0$. Să se arate că ecuaţia $x^2+px+q^2=0$ are rădăcinile de acelaşi modul dacă şi numai dacă $\dfrac{p}{q}\in[-2,2]$.

2. Fie $x,y,z\in(1,\infty)$ astfel încât $x^2+y^2+z^2=12$.
a) Să se arate că $\log_x 2+\log_y 2+\log_z 2\geq 3$.
b) Să se arate că $\log_z(x^2+y^2)+\log_x(y^2+z^2)+\log_y(z^2+x^2)\geq 9$.

(*SL.17.306, G.M. 11/2017*)

3. *a*) Să se arate că funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$ este injectivă.

b) Fie triunghiul ABC şi D,E,F punctele de contact ale cercului înscris în acesta cu laturile BC,CA şi AB. Fie M,N,P respectiv mijloacele segmentelor $[EF],[FD]$ şi $[DE]$. Arătaţi că $AM=BN=CP$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

(*Dana Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare*)

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Dana Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Prof. Cristian Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Prof. Natalia Fărcaş, C.N. "Vasile Lucaciu", Baia Mare

Clasa a XI-a

1. Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^2+B\cdot A=B^2+A\cdot B+2A$.
Să se demonstreze că $A^2-2A=B^2$.

(*Prof. Costel Cioclu*)

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}}\ ,\ \forall\, n\geq 1.$$

a) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-1)$.

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ pentru care $x_1\in(-1,0)$ şi $x_{n+1}=(1+x_{n+1})x_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.
Demonstraţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, definit prin $y_n=(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, este divergent.

(*S.L.G.M. 12/2017*)

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Darolţi Erika, C.N. "Vasile Lucaciu", Baia Mare
Prof. Costel Cioclu, L.T. "Emil Racoviţă", Baia Mare
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Clasa a XII-a

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie prin $x\circ y=3xy+2x+2y+a$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.
a) Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R},\circ)$ să fie monoid.
b) Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care legea de compoziţie "$*$", definită prin $x*y=2x+f(y)+3xy$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, determină pe $\mathbb{R}$ o structură de monoid comutativ.

2. *a*) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^5+6)}\,dx$, $x > 0$.

b) Să se determine funcţia continuă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ştiind că există $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot f(x) \in \mathbb{R}$ şi $F(2x) - F(x) = 1$, $\forall\, x > 0$, unde F este o primitivă pentru f.

3. *a*) Să se arate că, dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ are primitive pe intervalul I, iar funcţia $g : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă cu derivata continuă pe I, atunci funcţia produs $f \cdot g$ admite primitive pe I.

b) Funcţia $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ are primitive şi verifică relaţia

$$f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = f(x), \quad \forall\, x \in (0, \infty).$$

Să se demonstreze că f este continuă.

(*G.M. 11/2017*)

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Gabriela Boroica, C.N. "Vasile Lucaciu", Baia Mare
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Prof. Radu Pop, C.N. "Vasile Lucaciu", Baia Mare

Argument 20

Test pentru admiterea în clasa a V-a, 23 mai 2018
Matematică

I. Considerăm numerele a, b şi c, astfel încât:

$a = 17 \cdot (15 - 3 \cdot 2) : (91 : 7 + 84 : 6 - 18) + 17 \cdot 18 : 2$,

$b = \{[3 \cdot (2 \cdot 14 - 1 + 2 + 3 + 4) - 88] : 5 + 12 : [4 + 2(27 : 9 - 2]\} : 2 + 8$,

iar c verifică relaţia

$n + 2 \cdot \{123 - [14 + 2(58 - 18 : c)] : 7\} + 10 = 2626$,

unde n este cel mai mic număr, format cu cifre pare distincte, cu cifra sutelor 4 şi mai mare ca 1249.

1) Aflaţi numerele a, b, c;

2) Să se arate că $b \cdot b = a - 49$;

3) Să se arate că $a : [(b + c) : 2] = 2 \cdot b - 5$.

II. La gimnaziu, în Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", sunt 208 elevi, numărul băieţilor fiind cu 8 mai mic decât al fetelor. Aceştia învaţă franceză sau germană ca a doua limbă modernă. Numărul elevilor care învaţă franceză este egal cu al celor care învaţă germană.

1) Aflaţi numărul băieţilor care sunt la gimnaziu în Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai";

2) Notând cu x numărul băieţilor care învaţă franceză, aflaţi în funcţie de x numărul băieţilor care învaţă germană, numărul fetelor care învaţă franceză şi al fetelor care învaţă germană;

3) Ştiind că numărul fetelor care învaţă franceză este 67, aflaţi numărul băieţilor care studiază germană.

III. Un număr de patru cifre se numeşte "jucăuş" dacă suma cifrelor sale este egală cu 6.

1) Calculaţi suma primelor 10 numere "jucăuşe", în ordine crescătoare;

2) Care e cel mai mare produs al cifrelor unui număr "jucăuş"?

3) Arătaţi că 2920 nu se poate scrie ca sumă a două numere "jucăuşe".

Subiectul a fost propus de:
Prof. Dana Heuberger, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Prof. Cristian Heuberger, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Argument 20

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci*

$$(ab + bc + ca)(a^3 + b^3 + c^3) \geq abc(a + b + c)^2$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Avem

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)(a^3+b^3+c^3) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{(abc)^2}(a^3+b^3+c^3) \overset{\text{Radon}}{\geq}$$
$$9abc\frac{(a+b+c)^3}{9} = abc(a+b+c)^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)(a^3+b^3+c^3) \geq abc(a+b+c)^2$$

cu egalitate pentru $a = b = c$.

2. *Se consideră triunghiul ABC, H ortocentrul şi O centrul cercului circumscris triunghiului. Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HAC, respectiv HAB.*

a) Să se demonstreze că O_1 este simetricul lui O faţă de dreapta BC.

b) Să se demonstreze că $\triangle ABC$ şi $\triangle O_1O_2O_3$ au acelaşi centru de greutate, dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

Florin Bojor

Soluţie. *a*) Deoarece A este ortocentrul $\triangle HBC \Rightarrow \overrightarrow{O_1H} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} = \overrightarrow{O_1A}$. Fie M mijlocul lui $[BC]$, atunci

$$\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C} = 2\overrightarrow{O_1M} \Rightarrow \overrightarrow{O_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \tag{1}$$

Dar

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{HA} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{MO} \Rightarrow M$ este mijlocul lui (O_1O) şi deoarece $OM \perp BC \Rightarrow$ O_1 este simetricul lui O faţă de dreapta BC.

b) Deoarece O_1 este simetricul lui O faţă de mijlocul lui $[BC]$, atunci O_1BOC este paralelogram, deci $\overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{CO}$ şi analoagele. Atunci triunghiurile ABC şi $O_1O_2O_3$ au acelaşi centru de greutate

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_3A} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow H = O \Rightarrow \triangle ABC \quad \text{este echilateral.}$$

3. *Să se determine şirurile* $(a_n)_{n\geq 0}$ *de numere naturale care verifică relaţia*

$$a_{a_n} + a_n^2 = n^2 + 5n + 8, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Meda Bojor

Soluţie. Pentru $n = 0 \Rightarrow a_{a_0} + a_0^2 = 8 \Rightarrow a_0^2 \leq 8 \Rightarrow a_0 \in \{0, 1, 2\}$. Dar pentru $a_0 = 0$ se obţine $a_0 = 8(F)$ iar pentru $a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 4$, dar pentru $n = 1 \Rightarrow a_{a_1} + a_1^2 = 14(F)$, deci convine $a_0 = 2$. În acelaşi mod se obţine $a_1 = 3$ şi prin inducţie se demonstrează că $a_n = n+2$, unde în pasul de inducţie folosim următoarea observaţie:

Dacă

$$a_m = a_n \Rightarrow a_{a_m} + a_m^2 = a_{a_n} + a_n^2 \Rightarrow m^2 + 5m + 8 = n^2 + 5n + 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m-n)(m+n+5) = 0 \Rightarrow m = n.$$

4. *Fie* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *astfel încât* $b^2 < ac$. *Să se arate că, dacă* $4a+4b+c > 0$, *atunci* $a + 2b + c > 0$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{a}{4}x^2 + bx + c$.
Discriminantul ecuaţiei $f(x) = 0$ este $\Delta = b^2 - ac < 0$, deci f are semn constant pe $\mathbb{R}$. Cum $f(4) = 4a + 4b + c > 0$, avem că şi $f(2) > 0$, de unde $a + 2b + c > 0$.

5. *Dacă* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *şi* $m \in (0, 1]$, *să se arate că ecuaţia*

$$mx^2 + (a + b + c + d)x + ab + bc + cd + da = 0$$

are rădăcini reale.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = mx^2 + (a + b + c + d)x + ab + bc + cd + da$. Ecuaţia se scrie

$$(m-1)x^2 + x^2 + (a+c)x + (b+d)x + (a+c)(b+d) = 0$$
$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 + (x+a+c)(x+b+d) = 0$$

Avem

$$g(-a-c) = (m-1)(-a-c)^2 \leq 0$$

şi cum g are coeficientul dominant $m > 0$, deducem că ecuaţia $g(x) = 0$ are rădăcini reale.

6. *Fie şirul* $(d_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $d_n = p_{n+1} - 2p_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *unde* p_n *este al* n*-lea număr prim. Arătaţi că* $(d_n)_{n\geq 1}$ *este nemărginit superior.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Presupunem contrariul. Atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$d_n < k, \quad \forall\, n \geq 1 \tag{1}$$

Notăm cu p_{n_0} cel mai mare număr prim cel mult egal cu $(2k)!+1$.
Deoarece numerele $(2k)!+2, (2k)!+3, \ldots, (2k)!+2k$ sunt compuse, utilizând alegerea lui p_{n_0}, deducem că $p_{n_0+1} \geq (2k)!+2k+1$. Atunci

$$d_{n_0} = p_{n_0+1} - 2 \cdot p_{n_0} \geq (2k)! + 2k + 1 - ((2k)! + 1) = 2k,$$

contradicţie cu (1).
Aşadar, presupunerea făcută este falsă.

7. *Să se rezolve ecuaţia* $\{x\}^2 - \{x\} \cdot [x] + [x]^2 = 0$.

Dana Heuberger

Soluţie. Ecuaţia este echivalentă cu: $\{x\}_{1,2} = \dfrac{[x] \pm [x] \cdot \sqrt{5}}{2}$.

Cazul I.

$$\{x\} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot [x] \tag{1}$$

Dacă $x \geq 1$, atunci $\{x\} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot [x] > 1$, fals.
Dacă $x < 0$, atunci $\{x\} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot [x] < -1$, fals.
Aşadar $[x] = 0 \overset{(1)}{=} \{x\}$, deci $x = 0$ este o soluţie.

Cazul II.

$$\{x\} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot [x] \tag{2}$$

Deoarece $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ şi $\{x\} \geq 0$, rezultă că $[x] \leq 0$.
Dacă $[x] = 0$, din (2) rezultă că $\{x\} = 0$, deci avem soluţia $x = 0$.
Dacă $[x] \overset{not}{=} k < 0$, atunci $\{x\} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot k < 1 \Leftrightarrow k > \dfrac{2}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, deci $k \geq -1$. Deoarece $k < 0$, rezultă $k = -1$ şi din (2) obţinem $\{x\} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, aşadar $x = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$.
Soluţia este $S = \left\{0, \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right\}$.

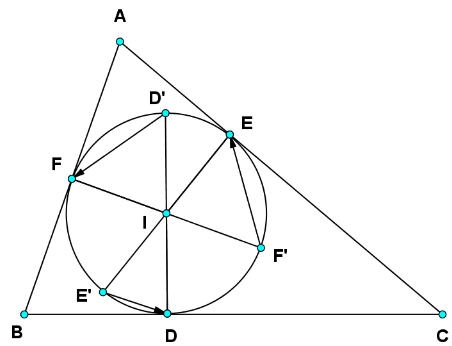
8. *Fie triunghiul ABC, I centrul cercului înscris şi D, E, F punctele de contact ale acestuia cu laturile BC, CA, AB. Fie D', E', F' intersecţiile semidreptelor $(DI, (EI, (FI$ cu cercul înscris şi H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor $D'EF$, $E'FD$, respectiv $F'DE$. Să se arate că:*

a) $\overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \overrightarrow{0}$ *dacă şi numai dacă* $\triangle ABC$ *este echilateral.*

b) *Triunghiurile* $H_1H_2H_3$ *şi* DEF *au acelaşi centru de greutate.*

Dana Heuberger

Soluţie. a)



$\overrightarrow{D'F} = \overrightarrow{D'I} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IF}.$
$\overrightarrow{E'D} = \overrightarrow{E'I} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ID}.$
$\overrightarrow{F'E} = \overrightarrow{F'I} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IE}.$
Adunând egalităţile precedente, obţinem:
$\overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = 2\left(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}\right).$

$\overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow I$ este centrul de greutate al $\triangle DEF$. Deoarece I este şi centrul cercului circumscris $\triangle DEF$, deducem:
$\overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \triangle DEF$ este echilateral $\Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.
b)

$$\overrightarrow{IH_1} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{ID'} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} - \overrightarrow{ID}.$$
$$\overrightarrow{IH_2} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE'} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IE}.$$
$$\overrightarrow{IH_3} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF'} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} - \overrightarrow{IF}.$$

Adunând cele trei relaţii, obţinem:

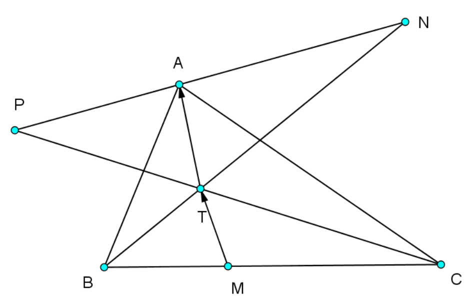
$$\overrightarrow{IH_1} + \overrightarrow{IH_2} + \overrightarrow{IH_3} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$$

aşadar triunghiurile $H_1H_2H_3$ şi DEF au acelaşi centru de greutate.

9. *Fie triunghiul ABC şi punctele M, N, P cu $M \in (BC)$, $A \in (PN)$, $PC \cap BN = \{T\}$ şi $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AN}{AP}$. Să se arate că dreptele AM, BN, CP sunt concurente, dacă şi numai dacă $PN \| BC$.*

Dana Heuberger

Soluţie. " $\Rightarrow$ "



Notăm $\frac{MB}{MC} = \frac{AN}{AP} = k > 0.$
Avem
$\overrightarrow{TA} = \frac{\overrightarrow{TN} + k\cdot\overrightarrow{TP}}{1+k}$, $\overrightarrow{TM} = \frac{\overrightarrow{TB} + k\cdot\overrightarrow{TC}}{1+k}$,
$\overrightarrow{TB} = \alpha \cdot \overrightarrow{TN}$, $\overrightarrow{TC} = \beta \cdot \overrightarrow{TP}$.
Obţinem: $\overrightarrow{TM} = \frac{\alpha\cdot\overrightarrow{TN} + k\cdot\beta\cdot\overrightarrow{TP}}{1+k}$.

A, T, M sunt coliniare $\Leftrightarrow \exists\, \gamma \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{TM} = \gamma \cdot \overrightarrow{TA} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\alpha}{1+k}\overrightarrow{TN} + \frac{k\beta}{1+k}\overrightarrow{TP} = \frac{\gamma}{1+k}\overrightarrow{TN} + \frac{k\gamma}{1+k}\overrightarrow{TP} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{TB}{TN} = \frac{TC}{TP} = \frac{TM}{TA} \Rightarrow PN \parallel BC$$

" $\Leftarrow$ " Fie $AT \cap BC = \{M_1\}$.
Deoarece triunghiurile APT şi M_1CT sunt asemenea, rezultă

$$\frac{AP}{M_1C} = \frac{TP}{TC} \tag{1}$$

Triunghiurile ANT şi M_1BT sunt asemenea, deci

$$\frac{AN}{M_1B} = \frac{TN}{TB} \tag{2}$$

Deoarece triunghiurile NPT şi BCT sunt asemenea, rezultă

$$\frac{TN}{TB} = \frac{TP}{TC} \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) obţinem:

$$\frac{AN}{AP} = \frac{M_1B}{M_1C} \overset{ip}{=} \frac{MB}{MC}$$

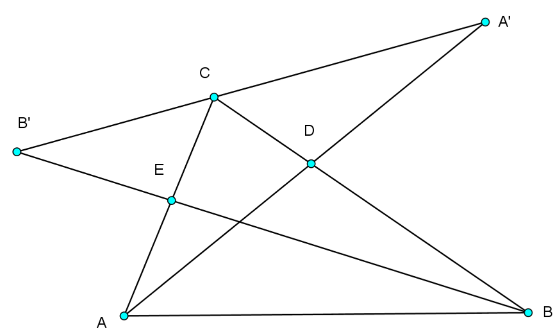
aşadar $M = M_1$, adică dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

10. *Fie triunghiul ABC şi $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ picioarele bisectoarelor din A, respectiv B. Fie punctele A', B', astfel încât D este mijlocul lui (AA') şi E mijlocul lui (BB'). Să se arate că există o infinitate de triunghiuri neisoscele ABC pentru care punctele A', B', C' sunt coliniare.*

Dana Heuberger

Soluţie.

Notăm $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.
Alegem $a < b$. Avem:
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA'} = \frac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{b+c}$,
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EB'} = \frac{c \cdot \overrightarrow{BC} + a \cdot \overrightarrow{BA}}{a+c}$,
$\overrightarrow{EC} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{BC}$.
Obţinem:



$$\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB'}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BA} + \frac{c-a}{a+c} \cdot \overrightarrow{AC} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \frac{-2b}{b+c} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{c-b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC} \tag{2}$$

A', B', C sunt coliniare

$$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\frac{-2b}{b+c}} = \frac{\frac{c-a}{a+c}}{\frac{c-b}{b+c}} \Leftrightarrow \frac{c-b}{-2b} = \frac{c-a}{a+c} \Leftrightarrow c^2 + (a+b)\,c - 3ab = 0$$

Fie funcţia $f : (0, a+b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (a+b)\,x - 3ab$.
Deoarece $f(a) = 2a\,(a-b) < 0$ şi $f(b) = 2b\,(b-a) > 0$, ecuaţia $f(x) = 0$ are o rădăcină $c \in (a,b)$. Rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ sunt

$$x_1 = \frac{-(a+b) - \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}}{2} < 0,\ x_2 = \frac{-(a+b) + \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}}{2}$$

Obţinem $c = \frac{-(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}{2} \in (a,b)$. Rezultă că $b + c > a$ şi $a + b > c$.
Pentru ca a, b, c să poată fi laturi ale unui triunghi, trebuie ca şi $a + c > b$.
$a + c > b \Leftrightarrow \frac{a-b+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}{2} > b \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 14ab + b^2} > 3b - a \Leftrightarrow a > \frac{2b}{5}$.
Aşadar, pentru $a, b \in (0, \infty)$, cu $\frac{2b}{5} < a < b$ şi $c = \frac{-(a+b)+\sqrt{a^2+14ab+b^2}}{2}$, punctele A', B', C sunt coliniare.

11. *Să se arate că, dacă $ABCD$ este un patrulater convex, iar $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $P \in (DA)$, $Q \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NC}{ND} = \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{QA}{QB}$ şi $AM = CP$, $BN = DQ$, atunci $ABCD$ este paralelogram.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie $\dfrac{MB}{MC} = k$. Atunci $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}$ şi

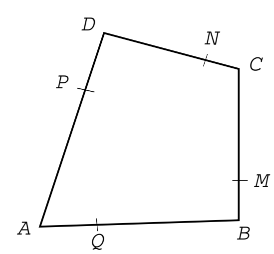
$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{1}{(1+k)^2}(AB^2 + k^2AC^2 + 2k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{(1+k)^2}\left(AB^2 + k^2AC^2 + 2kAB \cdot AC\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}\right) \\ &= \frac{1}{(1+k)^2}\left[(1+k)AB^2 + k(k+1)AC^2 - kBC^2\right] \end{aligned}$$

Analog

$$BN^2 = \frac{1}{(1+k)^2}\left[(1+k)BC^2 + k(k+1)DB^2 - kDC^2\right]$$

$$CP^2 = \frac{1}{(1+k)^2}\left[(1+k)CD^2 + k(k+1)AC^2 - kAD^2\right]$$

$$DQ^2 = \frac{1}{(1+k)^2}\left[(1+k)AB^2 + k(k+1)DB^2 - kAB^2\right]$$



$AM = CP \Leftarrow (1+k)(AB^2 - CD^2) = k(BC^2 - AD^2)$
$BN = DQ \Leftarrow (1+k)(BC^2 - AD^2) = k(DC^2 - AB^2)$.

Atunci

$$AB^2 - CD^2 = \frac{k}{k+1}\,(BC^2 - AD^2) \tag{1}$$

$$AB^2 - CD^2 = \frac{1+k}{k}\,(AD^2 - BC^2) \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă: $(BC^2 - AD^2)\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1+k}{k}\right) = 0$, deci $BC = AD$. Înlocuind în (1) rezultă că $AB = CD$. Concluzionăm că $ABCD$ este paralelogram.

12. *Fie $A_1A_2\ldots A_{2n}$ un poligon convex cu $2n$ vârfuri, $n \geq 3$. Notăm cu $G_1, G_2, \ldots, G_{2n}$ centrele de greutate ale poligoanelor*
$A_1A_2\ldots A_n$, $A_2A_3\ldots A_{n+1}, \ldots, A_{n+1}A_{n+2}\ldots A_{2n}, \ldots, A_{2n}A_1\ldots A_{n-1}$.
Să se arate că dreptele $G_1G_{n+1}, G_2G_{n+2}, \ldots, G_nG_{2n}$ sunt concurente.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie O un punct în plan. Atunci:

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}}{n}, \ \overrightarrow{OG_{n+1}} = \frac{\overrightarrow{OA_{n+1}} + \overrightarrow{OA_{n+2}} + \cdots + \overrightarrow{OA_{2n}}}{n}$$

Fie M mijlocul segmentului $[G_1G_{n+1}]$, deci

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_{2n}}}{2n}.$$

Analog deducem că M este mijlocul segmentelor

$$[GG_{n+2}], [G_3G_{n+3}], \ldots, [G_nG_{2n}].$$

13. *Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci*

$$\sum a\sqrt{\frac{b^4 + c^4}{2}} \leq a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) - 3abc.$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Arătăm că dacă $x, y \in (0, \infty)$, atunci

$$x + y - \sqrt{xy} \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \tag{1}$$

Notăm $\begin{cases} u = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}} \Leftarrow 2u^2 = x^2 + y^2 \\ v = \sqrt{xy} \Leftarrow v^2 + xy \end{cases}$

$$2u^2 + 2v^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Leftarrow 2(u^2 + v^2) = (x+y)^2$$

Inegalitatea (1) se scrie: $x + y - v \geq u$ sau

$$(x+y)^2 \geq (y+v)^2 \Leftrightarrow 2(u^2 + v^2) \geq (u+v)^2$$

$$2u^2 + 2v^2 - u^2 - v^2 - 2uv \geq 0 \Leftrightarrow (u-v)^2 \geq 0$$

Înlocuim în (1) pe x cu $\dfrac{x}{y}$ şi pe y cu $\dfrac{y}{x}$:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2}}+\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}\geq\frac{1}{xy}\sqrt{\frac{x^4+y^4}{2}}+1$$

$$x^2+y^2\geq\sqrt{\frac{x^4+y^4}{2}}+xy$$

Pentru $x=a$; $y=b$: $\quad a^2+b^2\geq\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}+ab\,.$

Prin înmulţire cu c

$$a^2c+b^2c\geq\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}+abc \tag{2}$$

Analog

$$b^2a+c^2a\geq a\sqrt{\frac{b^4+c^4}{2}}+abc \tag{3}$$

$$c^2b+b^2c\geq b\sqrt{\frac{c^4+a^4}{2}}+abc \tag{4}$$

Prin adunarea relaţiilor (2), (3) şi (4):

$$a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+b^2c\geq\sum a\sqrt{\frac{b^4+c^4}{2}}+3abc$$

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-3abc\geq\sum a\sqrt{\frac{b^4+c^4}{2}}\,.$$

14. *Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $m^2-22m+40=3^n$.*

Ionel Tudor

Soluţie. Pentru $n=0$ avem ecuaţia de grad doi $m^2-22m+39=0$, cu discriminantul $\Delta=328=4\cdot 82$, care nu este pătrat perfect şi atunci $m\notin\mathbb{Z}$.
Dacă $n<0$, fie $n=-l\in\mathbb{N}^*$. Atunci ecuaţia devine $(m^2-22m+40)3^l=1$, posibilă în $\mathbb{Z}$ doar dacă $m^2-22m+40=3^l=1$, deci $l=0$ şi $m^2-22m+39=0$, imposibil în $\mathbb{Z}$.
Rezultă că trebuie să avem $n\in\mathbb{N}^*$, caz în care 3^n este număr impar şi se impune ca şi m să fie număr impar. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, ecuaţia dată, scrisă în forma $m^2-22m+40-3^n=0$ şi considerată ca ecuaţie în m, are discriminantul $\Delta=484-160+4\cdot 3^n=4(3^n+81)$, iar m este întreg doar dacă 3^n+81 este pătrat perfect.
Se constată că pentru $n\in\{1,2,3,4\}$, 3^n+81 nu este pătrat perfect.

Dacă $n=5$, atunci $\Delta=36^2$ şi $m\in\{-7;29\}$, deci am găsit perechile (m,n) de soluţii întregi $(-7;5)$ şi $(29;5)$.

Pentru $n \geq 6$, avem $3^n + 81 = 3^4(3^{n-4} + 1)$ şi se impune ca $3^{n-4} + 1$ să fie pătrat perfect.

$n \geq 6$ par $\Leftarrow 3^{n-4} + 1 = (4-1)^{n-4} + 1 = \mathcal{M}4 + (-1)^n + 1 = 4k + 2$ care nu este pătrat perfect, deoarece un pătrat perfect este de forma $4k$ sau $4k + 1$.
Pentru $n = 2p + 1 > 6$, dacă $3^{n-4} + 1$ este pătrat perfect, atunci $3^{2p-3} + 1 = q^2$, unde $q \in \mathbb{Z}$. Rezultă $3^{2p-3} = q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$ şi deci $3^a = r + 1$, $3^b = r - 1$, $a + b = 2p - 3$. Atunci $3^a - 3^b = 2$.

Dacă $a \geq 1$ şi $b \geq 1$, ar trebui ca 3 să dividă pe 2, imposibil. Singura posibilitate este $a = 1$ şi $b = 0$ care conduce la $2p - 3 = 1$, $p = 2$ şi $n5$, în contradicţie cu $n > 6$. Deci ecuaţia din enunţ are în $\mathbb{Z}$ doar soluţiile

$$(m_1, n_1) = (-7, 5) \text{ şi } (m_2, n_2) = (29, 5).$$

15. *Fie* $a, b, c \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$. *Arătaţi că*

$$2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^4-1}{a-1} \cdot \frac{b^4-1}{b-1} \cdot \frac{c^4-1}{c-1}}$$
$$\geq \left(a + \sqrt{b} + a\sqrt{b} - 1\right)\left(b + \sqrt{c} + b\sqrt{c} - 1\right)\left(c + \sqrt{a} + c\sqrt{a} - 1\right).$$

Mihai Vijdeluc

Soluţie. Avem

$$(a^2+1)(b+1) = a^2b + a^2 + b + 1 = \left(a + \sqrt{b}\right)^2 - 2a\sqrt{b} + a^2b + 1$$
$$= \left(a + \sqrt{b}\right)^2 + \left(a\sqrt{b} - 1\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{b} + a\sqrt{b} - 1\right)^2.$$

La fel arătăm că

$$(b^2+1)(c+1) \geq \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{c} + b\sqrt{c} - 1\right)^2 \quad \text{şi}$$
$$(c^2+1)(a+1) \geq \frac{1}{2}\left(c + \sqrt{a} + c\sqrt{a} - 1\right)^2.$$

Dacă le înmulţim membru cu membru, obţinem inegalitatea:

$$8(a^2+1)(b+1)(b^2+1)(c+1)(c^2+1)(a+1)$$
$$\geq \left(a + \sqrt{b} + a\sqrt{b} - 1\right)^2\left(b + \sqrt{c} + b\sqrt{c} - 1\right)^2(\left(c + \sqrt{a} + c\sqrt{a} - 1\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\frac{a^4-1}{a-1} \cdot \frac{b^4-1}{b-1} \cdot \frac{c^4-1}{c-1}$$
$$\geq \left(a + \sqrt{b} + a\sqrt{b} - 1\right)^2\left(b + \sqrt{c} + b\sqrt{c} - 1\right)^2\left(c + \sqrt{a} + c\sqrt{a} - 1\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{2}\sqrt{\frac{a^4-1}{a-1} \cdot \frac{b^4-1}{b-1} \cdot \frac{c^4-1}{c-1}}$$
$$\geq \left(a + \sqrt{b} + a\sqrt{b} - 1\right)\left(b + \sqrt{c} + b\sqrt{c} - 1\right)\left(c + \sqrt{a} + c\sqrt{a} - 1\right).$$

Argument 20

Clasa a X-a

1. *În orice triunghi ABC, cu notaţiile obişnuite, avem:*

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4}+\frac{b^2+c^2}{(b+c)^4}+\frac{c^2+a^2}{(c+a)^4}\geq\frac{1}{8R^2}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Gheorghe Boroica

Soluţie. Din inegalitatea $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$, $\forall\, x,y\in(0,\infty)$, obţinem

$$U=\frac{a^2+c^2}{(a+b)^4}+\frac{b^2+c^2}{(b+c)^4}+\frac{c^2+a^2}{(c+a)^4}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq$$

$$\overset{\text{Radon}}{\geq}\frac{(1+1+1)^3}{2((a+b)+(b+c)+(c+a))^2}=\frac{27}{8(a+b+c)^2}=\frac{27}{32p^2}\geq$$

$$\overset{(1)}{\geq}\frac{27}{8\left(3R\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{8R^2},$$

unde în (1) am folosit inegalitatea lui D.D. Mitrinović: $2p\leq 3\sqrt{3}\,R$.

2. *Dacă $m\in\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, iar ABC este un triunghi, atunci:*

$$3^m\left(\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{m+1}+\left(b\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{m+1}+\left(c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{m+1}\right)\geq 6^{m+1}r^{m+1},$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Soluţie.

$$3^m\left(\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{m+1}+\left(b\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{m+1}+\left(c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{m+1}\right)\geq$$

$$\overset{\text{Radon}}{\geq}3^m\frac{\left(a\operatorname{tg}\frac{A}{2}+b\operatorname{tg}\frac{B}{2}+c\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{m+1}}{3^m}=(2(2R-r))^{m+1}$$

$$=2^{m+1}(2R-r)^{m+1}\overset{\text{Euler}}{\geq}2^{m+1}(3r)^{m+1}=6^{m+1}\cdot r^{m+1},$$

cu egalitate în triunghiul echilateral.

3. *Se consideră punctele A,B,C,D pe un cerc de centru O astfel încât $AB\cap CD=\{M\}$. Tangentele în A şi B la cerc se intersectează în E, iar tangentele în C şi D la cerc se intersectează în F. Dacă $EO\cap CD=\{G\}$ şi $FO\cap AB=\{H\}$, demonstraţi că $HG\|EF$.*

Florin Bojor

Soluţie. Deoarece $GO\perp HM$, $HO\perp MG\Rightarrow O$ este ortocentrul $\triangle MHG\Rightarrow$

$$OM\perp HG \tag{1}$$

Considerăm că cercul este de rază 1 şi notăm cu $x \in \mathbb{C}$ afixul punctului X pentru orice punct din plan.

Atunci $m = \dfrac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$ iar $e = \dfrac{2ab}{a+b}$, $f = \dfrac{2cd}{c+d}$.

Vom demonstra că

$$OM \perp EF \tag{2}$$

$$OM \perp EF \Leftrightarrow \frac{m-o}{f-e} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(a+b)(c+d)}{ab-cd} \in iR \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(c+d)}{ab-cd} = -\overline{\frac{(a+b)(c+d)}{ab-cd}},$$

relaţie care este adev arată deoarece $|a| = 1 \Leftrightarrow \overline{a} = \dfrac{1}{a}$ şi analoagele. Atunci, folosind (1) şi (2) $\Rightarrow HG \| EF$.

4. *Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu b impar. Definim şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ prin $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ şi $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n+1}^2 + b}{ax_n}$, $\forall n \geq 0$. Să se demonstreze că toţi termenii şirului sunt numere naturale dacă şi numai dacă a îl divide pe b.*

Florin Bojor

Soluţie. Dacă $x_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{4a+b}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a|b$.

Dacă $a|b \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*$ cu $a = k \cdot b$, unde k este număr impar, atunci relaţia de recurenţă devine $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}^2 + k}{x_n}$, $\forall n \geq 0$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + k$ şi $x_{n+3}x_{n+1} = x_{n+2}^2 + k$. Scăzând cele două relaţii, se obţine

$$x_{n+2}(x_n + x_{n+2}) = x_{n+1}(x_{n+1} + x_{n+3}) \Leftrightarrow \frac{x_n + x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} + x_{n+3}}{x_{n+2}}.$$

Atunci şirul $\left(\dfrac{x_n + x_{n+2}}{x_{n+1}}\right)_{n \geq 0}$ este constant, deci

$$\frac{x_n + x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{x_0 + x_2}{x_1} = \frac{5+k}{2} \overset{\text{not}}{=} p \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow x_n + x_{n+2} = px_{n+1} \Rightarrow x_{n+2} = px_{n+1} - x_n$$

şi prin inducţie se demonstrează că $x_n \in \mathbb{N}$.

5. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia*

$$16^x + 3 \cdot 16^{[x]} + 2 \cdot 16^{\{x\}} = 1284$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie $x = k + \alpha$, unde $k = [x] \in \mathbb{Z}$ şi $\alpha = \{x\} \in [0, 1)$. Ecuaţia devine:

$$16^{k+\alpha} + 3 \cdot 16^k + 2 \cdot 16^\alpha = 1284 \Leftrightarrow (16^k + 2)(16^\alpha + 3) = 1290 \tag{1}$$

Atunci $16^k + 2 = \dfrac{1290}{116^\alpha + 3} \in \left(\dfrac{1290}{19}, \dfrac{1290}{4}\right]$. De aici, cum $k \in \mathbb{Z}$, deducem că $k = 2$.

Din (1) obţinem că $16^\alpha + 3 = 5 \Leftrightarrow 2^{4\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{4}$, deci $x = 2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{4}$ e unica soluţie a ecuaţiei.

6. *Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci*

$$n^2(n^2+n+1) \,\Big|\, C_{n^3}^n$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Deoarece $C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$, avem:

$$C_{n^3}^n = \frac{n^3}{n} C_{n^3-1}^{n-1} = n^2 \frac{n^3-1}{n-1} C_{n^3-2}^{n-2} = n^2(n^2+n+1) C_{n^3-2}^{n-2},$$

deci are loc concluzia.

7. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} = 0$$

Andrei Eckstein

Soluţie. Notând $\sin x = s$ şi $\cos x = c$, obţinem:

$$s - \frac{2sc}{2} + \frac{3s - 4s^3}{3} - \frac{4sc(2c^2-1)}{4} = 0,$$

adică $s(4s^2 + 6c^3 - 6) = 0$, aşadar $s(c-1)(3c^2+c+1) = 0$.
Soluţia este: $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

8. *Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to [0,1)$, $g(x) = \left\{\{x\} + \left\{\dfrac{x+1}{2}\right\}\right\}$.*

a) Să se arate că funcţia g este surjectivă.

b) Să se arate că funcţia g este periodică. Să se determine perioada principală a acesteia.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Fie $y \in [0,1)$. Alegem $x = \frac{2y-1}{3}$.
I. Dacă $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, atunci $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right)$, şi

$$g(x) = \left\{\frac{2y-1}{3} + 1 + \left\{\frac{y+1}{3}\right\}\right\} = \left\{\frac{2y-1}{3} + \frac{y+1}{3}\right\} = y.$$

II. Dacă $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, şi

$$g(x) = \left\{\frac{2y-1}{3} + \left\{\frac{y+1}{3}\right\}\right\} = \left\{\frac{2y-1}{3} + \frac{y+1}{3}\right\} = y.$$

b) Notăm $\{x\} = f \in [0,1)$. Avem $\frac{f+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

I. Dacă $x = 2k + f$, cu $k \in \mathbb{Z}$, atunci:

$$g(x) = \left\{ f + \left\{ k + \frac{f+1}{2} \right\} \right\} = \left\{ f + \left\{ \frac{f+1}{2} \right\} \right\} = \left\{ \frac{3f+1}{2} \right\}.$$

Aşadar $g(x) = \begin{cases} \frac{3\{x\}+1}{2}, & x \in \left[2k, 2k + \frac{1}{3}\right) \\ \frac{3\{x\}-1}{2}, & x \in \left[2k + \frac{1}{3}, 2k+1\right) \end{cases}$

II. Dacă $x = 2k - 1 + f$, cu $k \in \mathbb{Z}$, atunci:

$$g(x) = \left\{ f + \left\{ k + \frac{f}{2} \right\} \right\} = \left\{ f + \left\{ \frac{f}{2} \right\} \right\} = \left\{ \frac{3f}{2} \right\}.$$

Aşadar $g(x) = \begin{cases} \frac{3\{x\}}{2}, & x \in \left[2k-1, 2k - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{3\{x\}-2}{2}, & x \in \left[2k - \frac{1}{3}, 2k\right) \end{cases}$.

Obţinem: $g(x) = \begin{cases} \frac{3x-(6k-1)}{2}, & x \in \left[\frac{6k-1}{3}, \frac{6k+1}{3}\right) \\ \frac{3x-(6k+1)}{2}, & x \in \left[\frac{6k+1}{3}, \frac{6k+3}{3}\right) \\ \frac{3x-(6k+3)}{2}, & x \in \left[\frac{6k+3}{3}, \frac{6k+5}{3}\right) \end{cases}$

Rezultă:

$$g(x) = \frac{3x - (2n-1)}{2}, \forall x \in \left[\frac{2n-1}{3}, \frac{2n+1}{3}\right), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Fie $n \in \mathbb{Z}$ şi $x \in \left[\frac{2n-1}{3}, \frac{2n+1}{3}\right)$. Atunci, $x + \frac{2}{3} \in \left[\frac{2(n+1)-1}{3}, \frac{2(n+1)+1}{3}\right)$ şi:

$$g\left(x + \frac{2}{3}\right) = \frac{3\left(x + \frac{2}{3}\right) - (2n+1)}{2} = \frac{3x - (2n-1)}{2} = g(x).$$

Aşadar funcţia g are perioada $\frac{2}{3}$.
Presupunem că există $t \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ o perioadă pentru g. Atunci, $g(t) = g(0) = \frac{1}{2}$.
Dacă $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, atunci $g(t) = \frac{3t+1}{2}$, de unde rezultă că $t = 0$, fals.
Dacă $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, atunci $g(t) = \frac{3t-1}{2}$, de unde rezultă că $t = \frac{2}{3}$, fals.
Aşadar $t = \frac{2}{3}$ este perioada principală a funcţiei g.

9. *Fie triunghiul ABC şi D, E, F punctele de contact ale cercului înscris în acesta cu laturile BC, CA, AB. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AEF, BDF, respectiv CDE.*

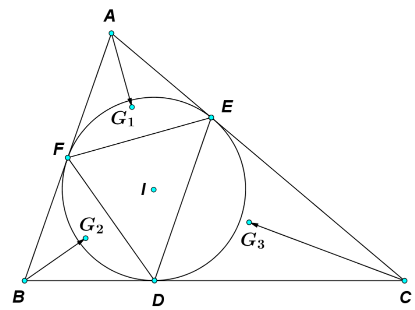
a) Să se determine măsura unghiului dintre dreptele AG_1 şi BG_2.

b) Să se arate că $AG_1 = BG_2 = CG_3$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Dana Heuberger

Argument 20

Soluţie. a)



Considerăm că triunghiul ABC este orientat în sens trigonometric.
Notăm $AB = c, BC = a, AC = b$.
Avem: $z_F = \frac{z_A + \frac{p-a}{p-b} z_B}{1+\frac{p-a}{p-b}} = \frac{(p-b)z_A + (p-a)z_B}{c}$,
$z_E = \frac{(p-c)z_A + (p-a)z_C}{b}$,
$z_D = \frac{(p-c)z_B + (p-b)z_C}{a}$.

$z_{G_1} - z_A = \frac{1}{3}\left(z_A + z_E + z_F\right) - z_A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_{G_1} - z_A = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{p-b}{c} + \frac{p-c}{b} - 2\right) z_A + \frac{p-a}{c} z_B + \frac{p-a}{b} z_C\right)$$

Obţinem:

$$z_{G_1} - z_A = \frac{p-a}{3bc}\left(b\left(z_B - z_A\right) + c\left(z_C - z_A\right)\right).$$

Analog,

$$z_{G_2} - z_B = \frac{p-b}{3ca}\left(c\left(z_C - z_B\right) + a\left(z_A - z_B\right)\right).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \frac{z_{G_1} - z_A}{z_{G_2} - z_B} &= -\frac{a(p-a)}{b(p-b)} \cdot \frac{b + c \cdot \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}}{a + c \cdot \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}} \\ &= -\frac{a(p-a)}{b(p-b)} \cdot \frac{b + c \cdot \frac{b}{c}\left(\cos A + i \cdot \sin A\right)}{a + c \cdot \frac{a}{c}\left(\cos(-B) + i \cdot \sin(-B)\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_{G_1} - z_A}{z_{G_2} - z_B} &= -\frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{1 + \cos A + i \cdot \sin A}{1 + cos B - i \cdot \sin B} \\ &= -\frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\left(\cos\frac{A+B}{2} + i \cdot \sin\frac{A+B}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{z_{G_1} - z_A}{z_{G_2} - z_B} = \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\left(\cos\left(\pi + \frac{A+B}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\pi + \frac{A+B}{2}\right)\right) \qquad (1)$$

Aşadar $\mu\left(\widehat{AG_1, BG_2}\right) = \left(\pi + \frac{A+B}{2}\right) - \pi = \frac{A+B}{2}$.

b) Din (1) rezultă că $\frac{AG_1}{BG_2} = \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$. Analog obţinem $\frac{BG_2}{CG_3} = \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$.

$$AG_1 = BG_2 = CG_3 \ \Leftrightarrow\ (p-a) \cdot \cos\frac{A}{2} = (p-b) \cdot \cos\frac{B}{2} = (p-c) \cdot \cos\frac{C}{2}. \qquad (2)$$

Deoarece $p-a=\frac{bc}{p}\cdot\cos^2\frac{A}{2}$ şi $p-b=\frac{ca}{p}\cdot\cos^2\frac{B}{2}$, obţinem:

$$(p-a)\cdot\cos\frac{A}{2}=(p-b)\cdot\cos\frac{B}{2}\ \Leftrightarrow\ b\cdot\cos^3\frac{A}{2}=a\cdot\cos^3\frac{B}{2}\overset{t.sin}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sin B\cdot\cos^3\frac{A}{2}=\sin A\cdot\cos^3\frac{B}{2}\ \Leftrightarrow\ \sin\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}.$$

Rezultă:

$$(p-a)\cdot\cos\frac{A}{2}=(p-b)\cdot\cos\frac{B}{2}\Leftrightarrow\ \frac{1-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{1-\sin^2\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\qquad(3)$$

Folosind definiţia, se arată uşor că funcţia $f:(0,1)\to\mathbb{R},\ f(t)=\frac{1-t^2}{t}$ este injectivă.
Aşadar, (3) $\Leftrightarrow\ f\left(\sin\frac{A}{2}\right)=f\left(\sin\frac{B}{2}\right)\Leftrightarrow A=B$.
Analog, $(p-b)\cdot\cos\frac{B}{2}=(p-c)\cdot\cos\frac{C}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1-\sin^2\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{1-\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\ \Leftrightarrow\ B=C$.
Aşadar, (2) $\Leftrightarrow\triangle ABC$ este echilateral.

10. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases}3^{\log_2 x}-3\log_2 y=2-x\\ 3^{\log_2 y}-3\log_2 z=2-y\\ 3^{\log_2 z}-3\log_2 x=2-z\end{cases}$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. 1) Dacă
$x\ge y>0\Rightarrow 2-x\le 2-y\Rightarrow 3^{\log_2 x}-3\log_2 y\le 3^{\log_2 y}-3\log_2 z\Rightarrow$
$0\le 3^{\log_2 x}-3^{\log_2 y}\le 3(\log_2 y-\log_2 z)\Rightarrow y\ge z\Rightarrow 2-y\le 2-z\Rightarrow$
$3^{\log_2 y}-3\log_2 z\le 3^{\log_2 y}-3\log_2 x\Rightarrow$
$0\le 3^{\log_2 y}-3^{\log_2 z}\le 3(\log_2 z-\log_2 x)\Rightarrow z\ge x$.
Deci $x\ge y\ge z\ge x$, adică $x=y=z$.

2) Dacă $x\le y\Rightarrow 2-x\ge 2-y\Rightarrow 3^{\log_2 x}-3\log_2 y\ge 3^{\log_2 y}-3\log_2 z\Rightarrow$
$3(\log_2 y-\log_2 z)\le 3^{\log_2 x}-3^{\log_2 y}\le 0\Rightarrow y\le z\Rightarrow 2-y\ge 2-z\Rightarrow$
$3^{\log_2 y}-3\log_2 z\ge 3^{\log_2 z}-3\log_2 x\Rightarrow$
$3(\log_2 x-\log_2 z)\ge 3^{\log_2 z}-3^{\log_2 y}\ge 0\Rightarrow x\ge z$.
Deci $x\le y\le z\le x$, adică $x=y=z$.

În ambele situaţii avem $x=y=z$. Obţinem ecuaţia

$$3^{\log_2 x}-3\log_2 x=2-x\Rightarrow 3^{\log_2 x}+x=3\log_2 x+2.$$

Notăm $\log_2 x=t$; ecuaţia devine $3^t+2^t=3t+2$, adică $f(t)=g(t)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=3^t+2^t$ este o funcţia convexă, iar $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=3t+2$ este o funcţie de gradul întâi. Prin urmare, ecuaţia $f(t)=g(t)$ are cel mult două soluţii. Cum $t_1=0$ şi $t_2=1$ verifică ecuaţia, deducem că acestea sunt singurele soluţii, deci soluţia sistemului este: $(1,1,1),(2,2,2)$.

11. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot (\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{16}$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Arătăm că, dacă $a, b \in (0, \infty)$; $a + b = 1$, atunci $a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{10}$.

Presupunem că $a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

$$1 = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}$$

$\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}\right)$; $(\log_{ab} a; \log_{ab} b)$ sunt la fel orientate. Din inegalitatea Cebysev

$$\frac{1}{a}\ \log_{ab} a + \frac{1}{b}\ \log_{ab} b \geq \frac{1}{2}(\log_{ab} a + \log_{ab} b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ \log_{ab} ab \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{a+b} = 2$$

$$\log_{ab} a^{\frac{1}{a}} + \log_{ab} b^{\frac{1}{b}} \geq 2 = \log_{ab}(ab)^2$$

$$\log_{ab}(a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}}) \geq \log_{ab}(ab)^2$$

$$a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}} \leq (ab)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}} \leq \frac{1}{16}$$

Egalitatea are loc pentru $a = b = \frac{1}{2}$.

Fie $a = \sin^2 x$; $b = \cos^2 x$. Ecuaţia $(\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{16}$ revine la $a = b = \frac{1}{2}$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} = \cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left\{(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

sau

$$x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

12. *Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$ şi $\lambda \in [0, 1]$. Să se arate că dacă:*

a) f este funcţie convexă şi descrescătoare, atunci

$$f\left(2\sqrt{xy}\right) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

b) f este funcţie concavă şi crescătoare, atunci:

$$f\left(2\sqrt{xy}\right) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Dacă $x < y \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y = \lambda(x-y) + y \leq y \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{xy}$.

Dacă $x \geq y \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y = (1-\lambda)(y-x) + x \leq x \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{xy}$.

Rezultă:

$$\lambda x + (1-\lambda)y \leq 2\sqrt{xy}$$

$$f \text{ convexă } \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad (1)$$

$$f \text{ convexă } \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \qquad (2)$$

$$f \text{ crescătoare } \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f\left(2\sqrt{xy}\right) \qquad (3)$$

$$f \text{ descrescătoare } \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f\left(2\sqrt{xy}\right) \qquad (4)$$

Din (1), (4):

$$f\left(2\sqrt{xy}\right) \leq f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Din (2), (3):

$$f\left(2\sqrt{xy}\right) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

13. *Să se arate că*

$$\frac{\sin^2 x}{1+4\cos^4 x} + \frac{\cos^2 x}{1+4\sin^4 x} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ionel Tudor

Soluţie. Cum $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin^4 x = \dfrac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$,
$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\cos^4 x = \dfrac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$, obţinem
$1+4\sin^4 x = 2-2\cos 2x+\cos^2 2x$ şi $1+4\cos^4 x = 2+2\cos 2x+\cos^2 2x$.
Rezultă

$$\frac{\sin^2 x}{1+4\cos^4 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2+2\cos 2x+\cos^2 2x}$$
$$\frac{\cos^2 x}{1+4\sin^4 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2-\cos 2x+\cos^2 2x},$$

iar inegalitatea devine

$$\frac{1-\cos 2x}{2+2\cos 2x+\cos^2 2x} + \frac{1+\cos 2x}{2-2\cos 2x+\cos^2 2x} \geq 1$$

sau, după eliminarea numitorilor şi reducerea termenilor, obţinem:

$$\cos^4 2x - 6\cos^2 2x \leq 0;\ (\cos^2 2x)(\cos^2 2x - 6) \leq 0,$$

care este adevărată.

14. *Fie ABC un triunghi în care $A = 2B$. Arătaţi că $a < 2b$.*

Mihai Vijdeluc şi Vasile Ienuţaş

Soluţie. Avem $\sin A = \sin 2B = 2\sin B\cos B$, iar $A = 2B \Rightarrow B$ este unghi ascuţit, rezultă $\cos B > 0$.
Din teorema sinusurilor avem:
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{2b}{2\sin B} = \frac{2b\cos B}{\sin A} < \frac{2b}{\sin A} \Rightarrow a < 2b$$

15. *Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c = 1$. Arătaţi că*
$$\frac{\log_a^3 b}{3a+2} + \frac{\log_b^3 c}{3b+2} + \frac{\log_c^3 a}{3c+2} \geq 1$$

Mihai Vijdeluc

Soluţie. Folosind inegalitatea lui Hölder avem:
$$\frac{\log_a^3 b}{3a+2} + \frac{\log_b^3 c}{3b+2} + \frac{\log_c^3 a}{3c+2} \geq \frac{(\log_a b + \log_b c + \log_c a)^3}{3(3a+2+3b+2+3c+2)}$$
$$= \left(\frac{\log_a b + \log_b c + \log_c a}{3}\right)^3.$$
Din inegalitatea mediilor rezultă:
$$\frac{\log_a b + \log_b c + \log_c a}{3} \geq (\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a)^{\frac{1}{3}} = (\log_a a)^{\frac{1}{3}} = 1,$$
şi problema este rezolvată.

Clasa a XI-a

1. *Fie $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui a şi b ecuaţia $a^x = bx + 1$ are soluţie unică reală?*

Dan Bărbosu

Soluţie. Distingem situaţiile:
(i) $b = 0$; ecuaţia $a^x = 1$ are unica soluţie $x = 0$, $\forall\, a > 0$.
(ii) $b > 0$; în acest caz $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = bx + 1$ e strict crescătoare şi $f(0) = 1$.

(a) Dacă $a \in (0, 1) \Rightarrow g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $g(x) = a^x$ este strict descrescătoare şi $g(0) = 1 = f(0)$. Ecuaţia $g(x) = f(x)$ are unica soluţie $x = 0$.

(b) Dacă $a \in (1, +\infty) \Rightarrow g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $g(x) = a^x$ este strict crescătoare, convexă şi $g(0) = 1 = f(0)$, graficul lui f intersectează în general graficul lui g în două puncte. Ecuaţia $f(x) = g(x)$ are soluţie unică, dacă punctele precedente sunt confundate, adică $g'(0) = f'(0) \Leftrightarrow \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$.

(iii) $b < 0$; în acest caz $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este strict descrescătoare şi $f(0) = 1$.

(a) Dacă $a > 1 \Rightarrow g$ este strict crescătoare şi $g(0) = 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$ are unica soluţie $x = 0$.

(b) Dacă $a \in (0, 1) \Rightarrow g$ e strict descrescătoare, convexă şi $g(0) = 1$. Atunci $x = 0$ e unica soluţie a ecuaţiei
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(0) = g'(0) \Leftrightarrow b = \ln a \Leftrightarrow a = e^b.$$

(iv) Dacă $a = 1 \Leftarrow f(x) = g(x)$ are unica soluţie $x = 0$.
Deci:

$$\Big\{(a,b) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \,|\, \exists!\, x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{a.î.} \quad a^{x_0} = bx_0 + 1\Big\} =$$
$$= \Big\{(a,b) \in (0,1) \times (0,+\infty)\Big\} \cup \Big\{(e^b, b) \,|\, b \in (0,+\infty)\Big\} \cup$$
$$\cup \Big\{(a,b) \in (1,+\infty) \times (-\infty,0)\Big\} \cup \Big\{(e^b, b) \,|\, b \in (-\infty,0)\Big\} \cup$$
$$\cup \Big\{(1,b) \,|\, b \in \mathbb{R}\Big\} \cup \Big\{(a,0) \,|\, a \in (0,+\infty)\Big\}.$$

2. *Calculaţi $f'(0)$ în fiecare din cazurile*

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2n+1]{x^{2n-1} - \sin^{2n-1} x}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2} \,\Big|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2n+1]{x^{2n-1} - \operatorname{tg}^{2n-1} x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Bărbosu

Soluţie. (i)

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[2n+1]{x^{2n-1} - \sin^{2n-1} x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[2n+1]{\frac{x^{2n-1} - \sin^{2n-1} x}{x^{2n+1}}}$$
$$= \lim_{x \to 0} \sqrt[2n+1]{\frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x^{2n-2} + x^{2n-3} \sin x + \cdots + \sin^{2n-2} x}{x^{2n+2}}}$$

Dar

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{2n-2} + x^{2n-3} \sin x + \cdots + \sin^{2n-2}}{x^{2n-2}} = 2n - 1,$$

iar

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

În concluzie, $f'(0) = \sqrt[2n+1]{\dfrac{2n-1}{6}}$.

(ii) Analog cu $(i) \Rightarrow$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[2n+1]{x^{2n-1} - \operatorname{tg}^{2n-1}} x}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[2n+1]{\frac{x^{2n-1} - \operatorname{tg}^{2n-1} x}{x^{2n-2}}}$$
$$= \lim_{x \to 0} \sqrt[2n+1]{\frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} \, \frac{x^{2n-2} + x^{2n-3} \operatorname{tg} x + \cdots + \operatorname{tg}^{2n-2} x}{x^{2n-2}}}$$

Dar

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{2n-2} + x^{2n-3} \operatorname{tg} x + \cdots + \operatorname{tg}^{2n-2} x}{x^{2n-2}} = 2n - 1,$$

iar

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^{\frac{1}{2}} x}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = -\frac{1}{3}.$$

În concluzie,

$$f'(0) = \sqrt[2n+1]{-\frac{2n-1}{3}} = -\sqrt[2n+1]{\frac{2n-1}{3}}.$$

3. *Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Calculaţi limita*

$$l(a) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left((a+x)^x - a^x\right)^x$$

Dan Bărbosu

Soluţie. Avem succesiv:

$$\begin{aligned}
l(a) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a^{x^2}\left(\left(\frac{a+x}{a}\right)^x - 1\right)^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\left(1+\frac{x}{a}\right)^x - 1\right)^x \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(e^{x\ln(1+\frac{x}{a})} - 1\right)^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{e^{x\ln(1+\frac{x}{a})} - 1}{x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}\, x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)\right)^x \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{e^{x\ln(1+\frac{x}{a})} - 1}{x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}\right)^x x^x \left(\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}}\cdot\frac{x}{a}\right)^x \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^x)^2\,\frac{1}{a^x} = 1.
\end{aligned}$$

Am folosit limitele fundamentale:

$$l_1 = \lim_{n\to 0}\frac{e^n - 1}{n} = 1,\ \ l_2 = \lim_{n\to 0}\tfrac{\ln(1+n)}{n} = 1 \text{ şi } l_3 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1.$$

4. *Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n!} = a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n!} = b \in \mathbb{R}_+^*$, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{a_n\cdot b_n}\right) = \dfrac{1}{e}$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Soluţie. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a_n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!\cdot n} = 1$$

şi analog $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n\cdot n} = 1$. Din teorema Cauchy-D'Alembert, deducem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n\cdot n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

şi analog $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{b_n}}{n} = \dfrac{1}{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

Fie $u_n = \dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[2n]{a_n b_n}}$, $n \geq 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{n}{\sqrt[n]{a_n}} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{b_n}}} = \frac{1}{e}\sqrt{e \cdot e} = 1$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$, iar

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\sqrt[n]{a_n b_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n!}{a_n} \cdot \frac{n!}{b_n}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = e.$$

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[2n]{a_n b_n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_n b_n}(u_n - 1) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_n b_n} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \ln u_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{a_n}{n^n} \frac{b_n}{n^n}} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \ln u_n^n = \frac{1}{e}.$$

5. Să se arate că pentru orice număr natural n, există numerele raţionale strict pozitive $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ cu proprietăţile:

a) $\dfrac{a_0}{0!^2} + \dfrac{a_1}{1!^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n!^2} = \dfrac{1}{n!^4}$;

b) $\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} < \dfrac{3}{\sqrt{(2n)!}}$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Din identitatea $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$, $n \in \mathbb{N}$, deducem că $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, adică $\dfrac{1}{(2n)!} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k!)^2(n-k)!^2} = \dfrac{1}{(n!)^4}$.

Alegând numerele $a_k = \dfrac{1}{(2n)!} \cdot \dfrac{1}{(n-k)^2}$, $k \in \overline{0,n}$, acestea sunt raţionale şi verifică *a)*.

Cum

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{a_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} \cdot \frac{1}{(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{1}{1!} + \frac{1}{0!} \right) < \frac{3}{\sqrt{(2n)!}},$$

numerele alese verifică şi *b)*.

6. *Să se determine funcţiile derivabile $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $f(0) = 0$ şi $f'(x^3) = f(x)$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Se observă că funcţia nulă nu este soluţie.
Fie în continuare funcţia f nenulă şi care e soluţie. Din ipoteză avem că $f'(x) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[0, \infty)$.
Cum f e nenulă şi $f \geq 0$, va exista $x_0 > 0$ astfel încât $f(x_0) > 0$. Alegem $a = \sup\{x \,|\, f(x) = 0\}$. Deoarece f e nenulă, avem că $a \neq +\infty$ şi atunci $a \in (0, \infty)$.
Din continuitate şi monotonie, deducem că $f(x) = 0$ pe $[0, a]$ şi $f(x) > 0$ pe (a, ∞).
Aplicând teorema lui Lagrange lui f pe $[a, a + 1]$, deducem că există $c \in (a, a + 1)$ astfel încât $f(a + 1) = f'(c)$, deci $f(a + 1) = f\left(\sqrt[3]{c}\right)$.
Din f crescătoare şi $\sqrt[3]{c} < \sqrt[3]{a+1} < a+1$, rezultă că f este constantă pe $\left[\sqrt[3]{c}, a + 1\right]$, deci f' este nulă pe acest interval.
Atunci $f'(a + 1) = 0 = f'(0)$ şi cum f' este crescătoare (compunere de două funcţii cresacătoare), rezultă că $f' = 0$ pe $[0, a + 1]$. Atunci $f'(c) = 0 = f(a + 1)$. Cum $f(a + 1) > 0$ (din alegerea lui a şi f crescătoare), se obţine o contradicţie, deci presupunerea făcută e falsă.

În concluzie, singura soluţie este funcţia nulă.

7. *Fie n un număr natural nenul şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$. Să se arate că:*

$$\ln(1 + x_1) \cdot \ln(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot \ln(1 + x_n) \leq \ln^n \left(1 + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln(1 + x))$ este de două ori derivabilă şi $f'(x) = \dfrac{1}{(x + 1)\ln(x + 1)}$, $f''(x) = \dfrac{-\left(1 + \ln(x + 1)\right)}{(x + 1)^2 \ln^2(x + 1)} < 0$, deci f este concavă.
Cu inegalitatea lui Jensen avem:

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\ln\left(1 + \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)\right) \geq \frac{1}{n}\left[\ln(\ln(1 + x_1)) + \cdots + \ln(\ln(1 + x_n))\right]$$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(\ln\left(1 + \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)\right) \geq \ln\left[\ln(1 + x_1)\ln(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot \ln(1 + x_n)\right]$$

$$\Leftrightarrow \ln^n\left(1 + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \ln(1 + x_1) \cdot \ln(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot \ln(1 + x_n),$$

de unde se obţine concluzia.

8. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm cu $S(A)$ suma elementelor sale.*

a) Arătaţi că există o infinitate de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $S(A^k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

b) Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $\det A = 0$, astfel încât $S(A^k) = \alpha^{k-1}$, $\forall\, k = \overline{1,n}$. Demonstraţi că $S(A^k) = \alpha^{k-1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

c) Pentru $\alpha = \dfrac{1}{n}$, daţi un exemplu de matrice cu proprietăţile de la punctul b).

Dana Heuberger

Soluţie. Soluţie. Alegem $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $\det(A) = 0$, deci cu $\operatorname{rang}(A) = 1$. Rezultă că $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$, cu $k \in \mathbb{R}$.
Atunci, $S(A) = (k+1)(a+b) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{a+b} - 1$.
În acest caz, $tr(A) = a - b + \frac{b}{a+b} \overset{not.}{=} t$. Din relaţia Cayley-Hamilton rezultă că $A^2 = t \cdot A$, deci $S\left(A^2\right) = t \cdot S(A) = t \overset{ip}{=} \frac{1}{2}$. Obţinem:

$$2\left(a^2 - b^2\right) = a - b. \tag{1}$$

Cazul I: Dacă $a = b \in \mathbb{R}^*$, atunci $k = \frac{1}{2a} - 1$ şi soluţiile sunt:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ \dfrac{1}{2} - a & \dfrac{1}{2} - a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

Cazul II: Dacă $a \neq b$, atunci din (1) rezultă că $a + b = \frac{1}{2}$ şi $k = 1$.
Soluţiile sunt:

$$A = \begin{pmatrix} a & \dfrac{1}{2} - a \\ a & \dfrac{1}{2} - a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R},\ a \neq \frac{1}{4}.$$

b) Fie $m \in \mathbb{N}, m \geq n$. Presupunem că pentru orice $k \leq m$ avem $S\left(A^k\right) = \alpha^{k-1}$. Deoarece $\det(A) = 0$, relaţia Cayley-Hamilton devine:

$$A^n - a_{n-1} \cdot A^{n-1} + a_{n-2} \cdot A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot a_1 \cdot A = 0_n. \tag{2}$$

Calculând suma elementelor matricei din membrul stâng, obţinem:

$$\alpha^{n-1} - a_{n-1} \cdot \alpha^{n-2} + a_{n-2} \cdot \alpha^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot a_1 = 0$$

Înmulţind egalitatea precedentă cu α^{m-n+1} obţinem:

$$\alpha^m = a_{n-1} \cdot \alpha^{m-1} - a_{n-2} \cdot \alpha^{m-2} + \ldots + (-1)^n \cdot a_1 \cdot \alpha^{m-n+1} \tag{3}$$

Înmulţind (2) cu A^{m-n+1}, rezultă:

$$A^{m+1} = a_{n-1} \cdot A^m - a_{n-2} \cdot A^{m-1} + \ldots + (-1)^n \cdot a_1 \cdot A^{m-n+2} = 0_n.$$

Calculând suma elementelor matricelor din egalitatea precedentă şi folosind ipoteza de inducţie, obţinem:

$$S\left(A^{m+1}\right) = a_{n-1} \cdot \alpha^{m-1} - a_{n-2} \cdot \alpha^{m-2} + \ldots + (-1)^n \cdot a_1 \cdot \alpha^{m-n+1}$$

Din (3) rezultă că $S\left(A^{m+1}\right) = a^m$.
c) Alegem

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

9. *Fie* $M = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \,|\, tr(X^3) = tr(X) = 0\}$.
a) Arătaţi că mulţimea $\mathcal{M}$ *este infinită.*
b) Daţi un exemplu de matrice $A, B \in \mathcal{M}$, *cu* $AB \neq BA$.
c) Dacă $A \in \mathcal{M}$, $A^3 \neq O_3$, *arătaţi că, pentru orice* $k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} \notin \mathcal{M}$ *şi* $A^{2k+1} \in \mathcal{M}$.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $X_z = z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ este o soluţie.

b) Matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 2 & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ nu comută.

c) Fie $A \in \mathcal{M}$, cu valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Presupunem că $A^2 \in \mathcal{M}$. Atunci, $tr\left(A^2\right) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$.
Deoarece $tr\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ şi $tr\left(A^3\right) = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 0$, rezultă că $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, deci $A^3 = 0_3$, fals. Aşadar $A^2 \notin \mathcal{M}$ şi $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$.
Avem $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 0 \end{cases}$, deci $\begin{cases} \lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2) \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 - (\lambda_1 + \lambda_2)^3 = 0 \end{cases}$, adică $\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) = 0$.
Obţinem $\begin{cases} \lambda_1 \overset{not.}{=} a \neq 0 \\ \lambda_2 = -a \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ sau permutările circulare ale acestui sistem.
Folosind relaţia Cayley-Hamilton, deducem că $A^3 = a^2 \cdot A$.
Prin inducţie, rezultă că pentru orice $t \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} A^{2t+1} = a^{2t} \cdot A \in \mathcal{M} \\ A^{2t+2} = a^{2t} \cdot A^2 \notin \mathcal{M} \end{cases}$.

10. *Fie* $b > 1$. *Să se arate că şirul* $(a_n)_{n \geq 1}$ *cu* $a_1 = 1$ *şi* $a_{n+1} = \dfrac{a_n \cdot b^n}{a_n + b^n}$ *este convergent şi să se determine limita sa.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Se verifică, că $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, şi din $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{b^n}{a_n + b^n} < 1$, deducem că $(a_n)_n$ este descrescător.

Însumând relaţiile $\dfrac{1}{a_{k+1}} = \dfrac{1}{a_k} + \dfrac{1}{b^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, obţinem

$$\frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdots + \frac{1}{b^{n-1}},$$

deci $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{b}{b-1}\left(1 - \dfrac{1}{b^n}\right)$. Trecând la limită, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{b}{b-1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{b-1}{b}$.

11. *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care are exact două puncte fixe a şi b cu $a < b$. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(a) = b$ şi $f(f(x)) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, nu este continuă.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Din $g(a) = a$, $f(a) = b$ şi $f(f(x)) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, obţinem $f(f(a)) = g(a)$, deci $f(b) = a$.
Presupunem că f este funcţie continuă. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x$. Cum $h(a) \cdot h(b) = (b-a)(a-b) < 0$ şi h este continuă, deducem că există $x_0 \in (a, b)$ astfel încât $h(x_0) = 0$, deci există $x_0 \in (a, b)$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.
Atunci $x_0 = f(x_0) = f(f(x_0)) = g(x_0)$, adică g are punctul fic $x_0 \in (a, b)$. Contradicţie cu faptul că funcţia g are numai punctele fixe a şi b. Prin urmare funcţia f nu poate fi continuă.

Observaţie. Pentru $g(x) = x^2$, obţinem problema XI302 din RMT 4/2010, autor Florin Rotaru.

12. *Fie $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $A^{p+q} + A^{2q} + A^q = O_n$, iar $B = A^p + A^q + I_n$. Să se arate că matricea $I_n - AB$ este inversabilă.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Se verifică, că $AB = BA$. Din $A^{p+g} + A^{2q} + A^q = O_n$, rezultă că $A^q(A^p + A^q + I_n) = O_n$, deci $A^q \cdot B = O_n$ şi $A^q \cdot B^q = O_n = (AB)^q$.
Din $(I_n - AB)(I_n + (AB) + (AB)^2 + \cdots + (AB)^{q-1}) = I_n - (AB)^q = I_n$, rezultă că matricea $I_n - AB$ este inversabilă.

13. *Fie $p \in \mathbb{R}_+^*$ fixat şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 \in (0, p+1)$ şi $x_{n+1} = \sqrt{px_n + p + 1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se studieze dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi, în caz afirmativ, să se calculeze limita sa.*

Adrian Pop

Soluţie. Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice că $x_n \in (0, p+1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
$P(n) : x_n \in (0, p+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
I) $P(1) : x_1 \in (0, p+1)$ propoziţie adevărată conform ipotezei.
II) $P(k) \to P(k+1)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem $P(k)$: $x_k \in (0, p+1)$ propoziţie adevărată şi demonstrăm că $P(k+1) : x_{k+1} \in (0, p+1)$ este propoziţie adevărată.

$$\begin{aligned}
&x_{k+1} = \sqrt{px_k + p + 1},\ x_k \in (0, p+1) \Rightarrow 0 < px_k < p(p+1) \\
&\Rightarrow p+1 < px_k + p + 1 < (p+1)^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{px_k + p + 1} < p+1 \\
&\Rightarrow x_{k+1} \in (0, p+1)
\end{aligned}$$

Din

$$\left.\begin{array}{l} P(1)\text{"}A\text{"} \\ P(k) \to P(k+1), k \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ propoziţie adevărată}$$

$$\Rightarrow x_n \in (0, p+1), \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Din ipoteză avem:

$$x_{n+1} = \sqrt{px_n + p + 1} \Rightarrow x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_n + 1)(-x_n + p + 1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 > x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \overset{x_n > 0}{\Rightarrow} x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2}$$

$\Rightarrow$ şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Din relaţiile (1) şi (2) $\overset{\text{T. Weierstrass}}{\Rightarrow}$ $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in (0, p+1]$.
Trecând la limită în relaţia din enunţ, obţinem:
$l = \sqrt{pl + p + 1} \Rightarrow l^2 - pl - p - 1 = 0 \Leftrightarrow l = -1$ (nu convine) sau $l = p + 1$.
Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p + 1 \in (0, p+1]$.

14. *Să se arate că, dacă $a, b \in [0, 2]$, atunci*

$$\frac{a^2}{b+2} + \frac{b^3}{a+2} + (2-a) \cdot b^2 \leq 12$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Fie $K = [0,2] \times [0,2]$; $f : K \to \mathbb{R}$;

$$f(a,b) = \frac{a^2}{b+2} + \frac{b^3}{a+2} + (2-a)b^2$$

Funcţia f este continuă pe $[0,1] \times [0,1]$. Din teorema Weierstrass, f îşi atinge maximul pe $[0,1] \times [0,1]$, care este un domeniu convex

$$\begin{aligned}
f'_a &= \frac{2a}{b+2} - \frac{b^3}{(a+2)^2} - b^2 \\
f''_a &= \frac{2}{b+2} + \frac{2b^3}{(a+2)^3} > 0 \\
f'_b &= -\frac{a^2}{(b+2)^2} + \frac{3b^2}{a+2} + 2b(2-a) \\
f''_b &= \frac{2a^2}{(b+2)^3} + \frac{6b}{a+b} + 2(2-a) > 0
\end{aligned}$$

Funcţia f este strict convexă în x, y, z şi este definită pe un pătrat cu laturile paralele cu axele. Rezultă că f îşi atinge maximul într-unul din vârfurile pătratului,

$$\begin{aligned}
&f(0,0) = 0\\
&f(0,2) = \frac{0^2}{2+2} + \frac{2^3}{0+2} + (2-0)\cdot 2^2 = 4+8 = 12\\
&f(2,0) = \frac{2^2}{0+2} + \frac{0^3}{2+2} + (2-2)\cdot 0^2 = 2\\
&f(2,2) = \frac{2^2}{2+2} + \frac{2^3}{2+2} + (2-2)\cdot 2^2 = 2+2 = 4\\
&\quad \Rightarrow \max_{(a,b)\in K} f(a,b) = f(0,2) = 12
\end{aligned}$$

15. *i) Aflaţi două matrice pătratice X şi Y, cu elemente reale, ştiind că $X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;*

ii) Arătaţi că oricare ar fi matricele X şi Y, cu elemente reale, cu proprietatea $X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, atunci $XY \neq YX$.

Mihai Vijdeluc

Soluţie. *i)* Luăm $X = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Presupunem contrariul, $XY = YX \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\det(X^2+Y^2) &= \det[(X+iY)(X-iY)] = \det(X+iY)\det(X-iY)\\
&= \det(X+iY)\det(\overline{X+iY}) = |\det(X+iY)|^2 \geq 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Calculăm determinantul matricei $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ şi avem:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 3\cdot 3 - 4\cdot 4 = 9 - 16 = -7,$$

contradicţie cu $(*)$, deci presupunerea făcută este falsă, înseamnă că $XY \neq YX$.

Clasa a XII-a

1. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Calculaţi limita*

$$l = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\,dx$$

Dan Bărbosu

Argument 20

Soluţie. Notăm $I_n = \displaystyle\int_a^b \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\, dx$.

Vom aplica criteriul cleştelui. Pentru început, observăm că:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_a^b \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n} dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \sqrt{(x-a)^n + (b-x)^n} dx \\
&\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{(b-x)^n} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \sqrt[n]{(x-a)^n} dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-a) dx = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-a} t\, dt \\
&= 2\frac{t^2}{2}\Bigg|_{\frac{b-a}{2}}^{b-a} = (b-a)^2 - \frac{(b-a)^2}{4} = 3\frac{(b-a)^2}{4} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Comparăm $(x-a)^n$ cu $(b-x)^n$ pe intervalul $[a, b]$. Pentru aceasta considerăm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (b-x)^n - (x-a)^n$. Observăm că

$$f(x) = (a+b-2x) \underbrace{\{(b-x)^{n-1} + (b-x)^{n-2}(x-a) + \cdots + (x-a)^{n-1}\}}_{>a}$$

x	a		$\frac{a+b}{2}$		b
$f(x)$		$++$	0	$---$	$-$

Din semnul funcţiei f, rezultă că

$$\max_{x \in [a,b]} \{(b-x)^n, (x-a)^n\} = \begin{cases} (b-x)^n, & x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right) \\ (x-a)^n, & x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

Din observaţia de mai sus, obţinem

$$
\begin{aligned}
I_n &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sqrt[n]{2(b-x)^n} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \sqrt[n]{2(x-a)^n} dx \\
&= \sqrt[n]{2} \left\{ \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-a) dx \right\} = \sqrt[n]{2} \frac{3(b-a)^2}{4} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Din (*) şi (**) $\Rightarrow$

$$3\frac{(b-a)^2}{4} \leq I_n \leq \sqrt[n]{2} \cdot 3\frac{(b-a)^2}{4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 3\frac{(b-a)^2}{4},$$

căci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

2. *(i) Dacă* $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *iar* $n \in \mathbb{N}^*$*, arătaţi că*

$$A^n = \begin{bmatrix} \dfrac{(4+3i)^n + (4-3i)^n}{2} & \dfrac{(4-3i)^n - (4+3i)^n}{2i} \\ \dfrac{(4+3i)^n - (4-3i)^n}{2i} & \dfrac{(4+3i)^n + (4-3i)^n}{2} \end{bmatrix}$$

(ii) Deduceţi identităţile:

$$5^n \cdot \cos\left(n \operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left((4+3i)^n + (4-3i)^n\right),$$
$$5^n \cdot \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2i}\left((4+3i)^n - (4-3i)^n\right)$$

Dan Bărbosu

Soluţie. (i) Fie $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$; se ştie că $(G, \cdot)$ e un grup, izomorf cu grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, iar funcţia $f : \mathbb{C}^* \to G$, $f(a+b\cdot i) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ este un izomorfism de grupuri. Atunci: $f((a+b\cdot i)^n) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^n \underset{not}{=} \begin{bmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{bmatrix}$, unde $a_n = Re(a+bi)^n$, $b_n = Im(a+bi)^n$.
Dar $(a+bi)^n = a_n + ib_n$, $(a-bi)^n = a_n - ib_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ a_n = \frac{(a+bi)^n + (a-bi)^n}{2},\ b_n = \frac{(a+bi)^n - (a-bi)^n}{2i}.$$

Luând $a = 4$, $b = 3$, rezultă

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \dfrac{(4+3i)^n + (4-3i)^n}{2} & \dfrac{(4-3i)^n - (4+3i)^n}{2i} \\ \dfrac{(4+3i)^n - (4-3i)^n}{2i} & \dfrac{(4+3i)^n + (4-3i)^n}{2} \end{bmatrix}.$$

(ii)
$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \dfrac{4}{5} & -\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) & -\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) \\ \sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) & \cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A^n = \frac{1}{5^n}\begin{bmatrix} \cos n\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) & -\sin n\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) \\ \sin n\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) & \cos n\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) \end{bmatrix}.$$

Ţinând seama de cele demonstrate la (i), se obţin identităţile enunţului.

3. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu elementul unitate $1 \in A$. Dacă $a, b \in A$ sunt elemente inversabile astfel încât $ab^{-1} + a^{-1}b = 1$, atunci arătaţi că*

$$(a-b)^2 \cdot (a^{-2} + b^{-2}) = -1$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Avem $ab^{-1} + a^{-1}b = 1 \Rightarrow a^2b^{-1} + b = a \Rightarrow a^2 + b^2 = ab$ şi atunci

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 + b^2 - ab - ba = 0 - ba = -ba \qquad (1)$$

$$ab^{-1} + a^{-1}b = 1 \Rightarrow b^{-1} + a^{-2}b = a^{-1} \Rightarrow b^{-2} + a^{-2} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem că

$$(a-b)^2(a^{-2} + b^{-2}) = -(ba)(ba)^{-1} = -1$$

4. *Fie funcţiile $f, g : [0,1] \to (0, \infty)$ cu f derivabilă, f' continuă şi pozitivă, g continuă. Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f'(x)}{1 + f(x) + x^n \cdot g(x)}\, dx = \ln \frac{1 + f(1)}{1 + f(0)}\,.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Soluţie. Avem:

$$0 \le \frac{f'(x)}{1 + f(x)} - \frac{f'(x)}{1 + f(x) + x^n \cdot g(x)} = \frac{f'(x) \cdot x^n g(x)}{(1 + f(x))(1 + f(x) + x^n g(x))}$$
$$\le x^n f'(x) g(x), \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Integrând şi trecând la limită obţinem:

$$0 \le \ln(1 + f(x))\Big|_0^1 - \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f'(x)}{1 + f(x) + x^n g(x)}\, dx$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f'(x) g(x) dx = 0.$$

Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f'(x)}{1 + f(x) + x^n \cdot g(x)}\, dx = \ln \frac{1 + f(1)}{1 + f(0)}\,.$$

5. *Pentru o mulţime finită M de numere naturale nenule, scrise în ordine crescătoare, notăm cu a_M numărul format prin alăturarea tuturor numerelor din mulţime. De exemplu, pentru $M = \{2, 30, 41\}$ avem că $a_M = 23041$. Considerăm mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Să se determine câte numere de forma a_M sunt divizibile cu 3, unde M parcurge toate submulţimile nevide ale lui A.*

Florin Bojor

Soluţie. Pentru o mulţime $M=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ numărul $a_M \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow b_1+b_2+\ldots+b_n \,\vdots\, 3$, deoarece $10^k \equiv 1(\bmod 3)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Prin urmare, trebuie să găsim câte submulţimi nevide ale lui A au suma elementelor divizibilă cu 3. Pentru aceasta, considerăm polinomul $f=(X+1)(X^2+1)\ldots(X^{100}+1) \in \mathbb{R}[X]$, care are proprietatea că, pentru fiecare submulţime a lui A, există exact un termen de forma X^s, unde s este suma elementelor din submulţime. Dacă $f=a_0+a_1X+\cdots+a_{5050}X^{5050}$, atunci numărul submulţimilor care au suma divizibilă cu trei este

$$a_3+a_6+\cdots+a_{5049}=\frac{1}{3}\left(f(1)+f(\varepsilon)+f(\varepsilon^2)\right)-a_0, a_0=1,$$

unde ε este rădăcină nereală de ordinul trei a unităţii.
Dar deoarece $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon\neq 1$, avem $f(1)=2^{100}$,

$$f(\varepsilon)=(1+\varepsilon)\left[2(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\right]^{33}=2^{33}(1+\varepsilon)$$

şi

$$f(\varepsilon^2)=(1+\varepsilon^2)\left[[2(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)\right]^{33}=(1+\varepsilon^2)2^{33},$$

deci numărul cerut este $\dfrac{1}{3}(2^{100}+2^{33})-1$.

6. *Fie $k\in\mathbb{N}^*$ şi $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x^k}=\ell\in\mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$.*

Florin Bojor

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x^k}=\ell$, atunci pentru $\varepsilon>0$ există $\delta>0$, astfel încât

$$\left|\frac{f(x)}{x^{k+1}}-\ell\right|<\varepsilon,\quad \forall\, x\in[0,\delta).$$

Atunci, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ cu $\dfrac{1}{n}<\delta$ şi pentru orice $x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$, avem că

$$\left|n^{k+1}\int_0^{\frac{1}{n}}\left(f(x)-x^k\cdot\ell\right)dx\right|\le n^{k+1}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f(x)-x^k\cdot\ell\right|$$
$$=n^{k+1}\int_0^{\frac{1}{n}}x^k\left|\frac{f(x)}{x^k}-\ell\right|dx<n^{k+1}\varepsilon\int_0^{\frac{1}{n}}x^kdx=\frac{\varepsilon}{k+1}$$

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\int_0^{\frac{1}{n}}\big(f(x)-x^k\cdot\ell\big)dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^{k+1}\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx=\ell\lim_{n\to\infty} n^{k+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^k dx=\frac{\ell}{k+1}.$$

7. *Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă, periodică şi neconstantă. Să se arate că, pentru orice primitivă F a funcţiei f, funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=F(x^2+\sin x)$ nu este o funcţie periodică.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Presupunem contrariul. Atunci G e periodică şi fie $T>0$ perioada sa. Rezultă că funcţia $g=G'$ e periodică de perioadă T

$$g(x+T)=(G(x+T))'=(G(x))'=g(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Avem că G e derivabilă şi

$$g(x)=f(x^2+\sin x)\cdot(2x+\cos x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Atunci g e continuă şi fiind perioadă avem că g este mărginită.
Dacă $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x^2+\sin x\Rightarrow h'(x)=2x+\cos x$, $h''(x)=2-\sin x>0$, deci h' e strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
Deducem că există un unic $\alpha\in\mathbb{R}$ $(\alpha<0)$ astfel încât $h'(\alpha)=0$ şi avem următorul tabel de variaţie:

x	$-\infty$		α		∞
$h'(x)$	$-\,-\,-\,-$		0		$+\,+\,+\,+$
$h(x)$	∞	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	∞

Rezultă că $Im(h)=[h(\alpha),\infty)$.
Din f continuă şi periodică (fie $T_1>0$ perioada lui f), rezultă că f e mărginită. Cum f e neconstantă, există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)\neq 0$. Atunci $f(a+nT_1)\neq 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Pentru n suficient de mare $(n\geq n_0)$ avem că $a+nT_1\in[h(\alpha),\infty)$, deci există $c_n\in[\alpha,\infty)$ cu $h(c_n)=a+nT_1$.

Din $g(c_n)=f(h(c_n))(2c_n+\cos c_n)=f(a)(2c_n+\cos c_n)$, făcând pe $n\to\infty$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} g(c_n)\in\{-\infty,\infty\}\Rightarrow g$ nu e mărginită, contradicţie.

8. *Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=C_n^0+\dfrac{C_n^1}{4}+\dfrac{C_n^2}{7}+\cdots+\dfrac{C_n^n}{3n+1}$. Să se arate că:*

$$\frac{2^{n+1}}{5n+2}<a_n<\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Deoarece $(1+x^3)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^{3k}$, integrând această identitate pe $[0,1]$, obţinem că $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1+x^3)^n dx$.

Pentru $x \in (0,1)$ avem că $x^3 < x$, deci $\displaystyle\int_0^1 (1+x^3)^n dx < \int_0^1 (1+x)^n dx$, deci

$$a_n < \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \qquad (1)$$

Dacă $x \in [0,1)$, atunci $1+x^3 = (1+x)(x^2-x+1) > (1+x)x = x^2+x \geq 2\sqrt{x^3}$, deci

$$a_n = \int_0^1 (1+x^3)^n dx > \int_0^1 2^n \sqrt{x^3}^n dx = \left.\frac{2^n \cdot x^{\frac{3n}{2}+1}}{\frac{3n}{2}+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}}{3n+2} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) se obţine concluzia problemei.

9. *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel astfel încât*

$$(ab)^3 = a^2b^2,\ \forall\, a,b \in A \qquad (1)$$

$$(a+b)^3 = a^2+b^2,\ \forall\, a,b \in A \qquad (2)$$

Să se arate că inelul este comutativ.

Dana Heuberger

Soluţie. Dacă $1 \in A$ este elementul unitate al inelului, notăm, ca de obicei, $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{de\ k\ ori\ 1} = k \in A$.

Pentru $a=2$ şi $b=1$, din (1) obţinem $8=4$, deci $4=0$.
Pentru $a=3$ şi $b=1$, din (1) obţinem $27=9$, deci $18=0$.
Deoarece $4=0$, rezultă că $2=0$, adică inelul are caracteristica 2.
Pentru $b=1$, din (2) obţinem, folosind că $2=0$:

$$a^3+a^2+a+1 = a^2+1 \iff a^3 = a$$

Înlocuind a cu $a+1$ în egalitatea precedentă, rezultă:

$$a^3+a^2+a+1 = a+1 \iff a^3 = a^2$$

Deducem că $\forall a \in A,\ a^2 = a$.
Pentru orice $x,y \in A$, obţinem:

$$(x+y)^2 = x+y \iff x^2+xy+yx+y^2 = x+y \iff xy = yx.$$

10. *Fie n un număr natural impar, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie pentru care $f^n(x) = x + \operatorname{arcctg} f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia f admite primitive.*

Ludovic Longaver

Soluţie. Considerăm funcţia continuă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x^n - \operatorname{arcctg} x$, care este şi bijectivă. Astfel g este inversabilă, cu inversa g^{-1} continuă. Relaţia din enunţ devine $g \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, de unde se obţine $f = g^{-1}$ continuă, deci primitivabilă.

11. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *pentru*

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+8}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\,,\ n \geq 1.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. Funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ este continuă, deci integrabilă. Considerăm şirul de diviziuni $\Delta_n = \left(0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right)$ al intervalului $[0,1]$ şi $\xi_k^{(n)} = \dfrac{\sqrt{k^2-1}}{n} \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$, $k = \overline{1,n}$ şirul punctelor intermediare.
Şirul sumelor Riemann corespunzătoare este

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k^2-1}{n^2}+1}}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2-1}} = a_n\end{aligned}$$

şi are limita

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+8}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}\right) = \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

12. *Fie* $0 \leq a < b$ *şi* $f, g : [a,b] \to (0,\infty)$ *două funcţii continue şi de aceeaşi monotonie pe* $[a,b]$. *Să se arate că există* $c \in [a,b]$ *astfel încât*

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\int_a^c g(t)dt + g(c)\int_c^b f(t)dt.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_a^b f(x)g(x)dx - f(t)\int_a^t g(x)dx - g(t)\int_t^b f(x)dx$$

este continuă pe $[a,b]$.

$$F(a) = \int_a^b f(x)g(x)dx - g(a)\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)(g(x)-g(a))dx$$

şi $\quad F(b) = \displaystyle\int_a^b g(x)(f(x)-f(b))dx$. Deducem că $F(a) \geq 0$ dacă g este crescătoare şi $F(a) \leq 0$ dacă g este descrescătoare, iar $F(b) \leq 0$ dacă f este crescătoare şi $F(b) \geq 0$ dacă f este descrescătoare.
Cum f şi g au aceeaşi monotonie, rezultă că $F(a) \cdot F(b) \leq 0$. Funcţia F având proprietatea lui Darboux, există $c \in [a,b]$ astfel încât $F(c) = 0$, adică concluzia problemei.

13. *Determinaţi funcţiile derivabile cu derivatele continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *cu proprietatea* $\left\{\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right\} = \{f(x)\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Din relaţia dată obţinem

$$\int_0^x f(t)dt - f(x) = \left[\int_0^x f(t)dt\right] - [f(x)],\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Cum $\left[\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right] - [f(x)] \in \mathbb{Z}$, iar funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt - f(x)$ este continuă, deducem că $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $g(x) = k$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Derivând relaţia $\displaystyle\int_0^x f(t)dt - f(x) = k$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deducem $f'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ şi de aici $\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)' = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Deci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c \cdot e^x$. Din relaţia $\displaystyle\int_0^x f(t)dt - f(x) = k$, rezultă $c = -k \in \mathbb{Z}$. Aşadar funcţia căutată este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k \cdot e^x$, $k \in \mathbb{Z}$.

14. *Să se demonstreze că, dacă* $x \in (1,3)$, *atunci*

$$\frac{2}{x-1}\int_1^x \operatorname{arctg} x\, dx \leq \int_1^3 \operatorname{arctg} x\, dx \leq \frac{2}{3-x}\int_x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Fie $g(x) = \dfrac{\int_1^x \operatorname{arctg} x\, dx}{x-1}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\left(\int_1^x \operatorname{arctg} x\, dx\right)'(x-1) - \int_1^x \operatorname{arctg} x\, dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\operatorname{arctg} x(x-1) - (x-1)\operatorname{arctg} c_1}{(x-1)^2}; \quad c_1 \in (1,x) \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} c_1}{x-1} > 0, \quad \text{deoarece } c_1 < x,$$

$$g'(x) > 0 \Rightarrow g \text{ crescătoare } \Rightarrow g(x) \le g(3) \Rightarrow \frac{\int_1^x \operatorname{arctg} x\, dx}{x-1} \le \frac{\int_1^3 \operatorname{arctg} x\, dx}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-1}\int_1^x \operatorname{arctg} x\, dx \le \int_1^3 \operatorname{arctg} x\, dx.$$

Fie $h(x) = \dfrac{\int_x^3 \operatorname{arctg} x\, dx}{3-x}$.

$$h'(x) = \frac{\left(\int_x^3 \operatorname{arctg} x\, dx\right)'(3-x) - (3-x)'\int_x^3 \operatorname{arctg} x\, dx}{(3-x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-(3-x)\operatorname{arctg} x + (3-x)\operatorname{arctg} c_2}{(3-x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{\operatorname{arctg} c_2 - \operatorname{arctg} x}{3-x}\ ;\ c_2 \in (x,3)$$

$$\Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h \text{ crescătoare } \Rightarrow h(x) \ge h(1)$$

$$\Rightarrow \frac{\int_x^3 \operatorname{arctg} x\, dx}{3-x} \ge \frac{\int_1^3 \operatorname{arctg} x\, dx}{2} \Rightarrow \int_1^3 \operatorname{arctg} x\, dx \le \frac{2}{3-x}\int_x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$$

15. *Să se calculeze*

$$I = \int \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}\, dx, \quad \textit{unde } x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{24}\right)$$

Daniel Sitaru

Soluţie.

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}$$
$$= \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$I = \int \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}\, dx = \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right) dx$$

Cum $\quad \operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} \Rightarrow$

$$\sqrt{3}\left(1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \Rightarrow$$
$$\sqrt{3}-\sqrt{3} \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\pi\right) \Rightarrow$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right).$$

Atunci

$$I=\int\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right) d x$$
$$I=x+\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\cos x|-\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left|\cos \left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right|+C.$$

Argument 20

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi ABC, iar R raza cercului circumscris, atunci:

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{4R}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

2. *a*) Să se demonstreze că, dacă o progresie geometrică cu toţi termenii numere naturale conţine trei termeni în progresie aritmetică, atunci progresia geometrică este constantă.

b) Să se demonstreze că orice progresie aritmetică infinită de numere naturale nenule conţine o progresie geometrică infinită.

Florin Bojor

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică formată din numere întregi. Dacă progresia are doi termeni divizibili cu numere prime distincte p respectiv q, demonstraţi că progresia are o infinitate de termeni divizibili cu $p \cdot q$.

Meda Bojor

4. Să se determine numerele întregi a, b şi c ştiind că ecuaţiile

$$x^2 - ax + b = 0$$
$$x^2 - bx + c = 0$$
$$x^2 - cx + a = 0$$

au cel puţin o rădăcină raţională comună.

Meda Bojor

5. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ ştiind că $x^3 + ax + 2 \geq 0$, $\forall\, x \in [0, \infty)$.

Gheorghe Boroica

6. Să se rezolve ecuaţia $[x] = \left[\dfrac{1}{x+1}\right]$.

Dana Heuberger

7. Determinaţi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\begin{cases} a_{n+3} \leq a_n + 3, & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ a_{n+5} \geq a_n + 5, & \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Nicolae Muşuroia

8. Fie $d \geq 2$ un număr natural care nu este pătrat perfect.
Arătaţi că $\left\{n\sqrt{d}\right\} < \dfrac{1}{2n\sqrt{d}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Maria Pop

9. Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z cu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$. Să se arate că

$$3(x+y+z)^2 \leq 54\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) + xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

Radu Pop

10. Determinaţi perechile (x, y) de numere naturale care verifică relaţia

$$x^6 + 1 = x^3 + y^3.$$

Vasile Pop

11. Fie a, b, c numere reale strict pozitive.
a) Arătaţi că $\dfrac{a+1}{a^2 - a + 1} \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}$.
b) Arătaţi că

$$(x^3 + y^3 + z^3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}}\right) \geq \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{2}}.$$

Gheorghe Râmbu

12. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci

$$a + b + c < 2\sum ab + \sum \frac{a(1-bc)}{bc+b+c+1}.$$

Daniel Sitaru

13. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, arătaţi că

$$4(m_a m_{a'} + m_b m_{b'} + m_c m_{c'}) + aa' + bb' + cc' \geq$$
$$\geq 4\left(\sqrt{aa'bb'} + \sqrt{bb'cc'} + \sqrt{cc'aa'}\right).$$

Daniel Sitaru

14. Se consideră mulţimile

$$A = \left\{ (3n^2 + 2n - 16)\sqrt{2} \,/\, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{şi}$$
$$B = \left\{ (2n^2 + 3n - 14)\sqrt{3} \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) Determinaţi $A \cap B$;
b) Găsiţi cel mai mic element nenul al mulţimii

$$M = \left\{ (3n^2 + 2n - 16)\sqrt{2} - (2n^2 + 3n - 14)\sqrt{3} \,/\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ionel Tudor

15. Aflaţi valoarea maximă a expresiei $E(x) = \dfrac{2019x^2}{2x^3 + 673}$, unde $x > 0$.

Mihai Vijdeluc şi Vasile Ienuţaş

Clasa a X-a

1. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ iar a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi ABC de arie $[ABC]$, atunci

$$\frac{a^2 \cdot x^2}{yz} + \frac{b^2 \cdot y^2}{zx} + \frac{c^2 \cdot z^2}{xy} \geq 4\sqrt{3}\,[ABC].$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ iar a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC de semiperimetru s, atunci

$$\frac{a^2}{c(bx + cy)^2} + \frac{b^2}{a(cx + ay)^2} + \frac{c^2}{b(ax + by)^2} \geq \frac{9}{2(x + y)^2 s}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Gheorghe Boroica

3. Fie şirul cu termeni naturali $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că
$a_{n+2} = 4(n+1)a_{n+1} - 4n(n+1)a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Să se demonstreze că pentru orice număr prim p există un termen al şirului divizibil cu toate numerele prime mai mici decât p.

Meda Bojor

4. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\frac{(a^2 + bc)^2}{m_b \cdot m_c} + \frac{(b^2 + ca)^2}{m_c \cdot m_a} + \frac{(c^2 + ab)^2}{m_a \cdot m_b} \leq 48R^2.$$

Gheorghe Boroica

5. Fie $a > 1$ un număr real. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia
$$a^{\sqrt{x}-1} + a^{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} + 1 = \frac{9\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\,.$$

Vasile Giurgi

6. Numerele $a, b, c > 1$ verifică relaţia $\lg^2 a + \lg^2 b + \lg^2 c \leq 3$. Arătaţi că
$$\frac{1}{\log_a c + \dfrac{\log_c(ab)}{\lg a \cdot \lg b}} + \frac{1}{\log_b a + \dfrac{\log_a(bc)}{\lg b \cdot \lg c}} + \frac{1}{\log_c b + \dfrac{\log_b(ca)}{\lg c \cdot \lg a}} \leq 1.$$

Vasile Giurgi

7. Fie funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injectivă, astfel încât $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, $f(x) \neq x$ şi astfel încât pentru orice mulţime $A \subset \mathbb{Z}$ cu două elemente, $f(f(A)) = A$.

a) Arătaţi că $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, $f(f(x)) = x$.

b) Daţi un exemplu de funcţie monotonă cu proprietatea din enunţ.

Dana Heuberger

8. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $\begin{cases} 2^{\frac{a+b}{c}} + 2^{\frac{b+c}{a}} & \leq 8 \\ 2^{\frac{b+c}{a}} + 2^{\frac{c+a}{b}} & \leq 8 \\ 2^{\frac{c+a}{b}} + 2^{\frac{a+b}{c}} & \leq 8 \end{cases}$.

Arătaţi că $a = b = c$.

Nicolae Muşuroia şi Gheorghe Maiorescu

9. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât
$$g(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x} + \cdots + \sqrt[2n+1]{x}\,,$$
iar funcţia f are proprietatea
$$f\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x} + \cdots + \sqrt[2n+1]{x}\right) \leq x \leq$$
$$\leq \sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[5]{f(x)} + \sqrt[7]{f(x)} + \cdots + \sqrt[2n+1]{x},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Demonstraţi că f şi g sunt funcţii bijective.

Adrian Pop

10. Fie $A = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = \dfrac{1}{3}\right\}$, $B = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \geq \dfrac{1}{2}\right\}$, $X = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

a) Să se arate că $A + B = A \cdot B \neq C$, unde $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$; $A \cdot B = \{a \cdot b \,|\, a \in A, b \in B\}$.

b) Să se arate că nu există nicio mulţime nevidă $Y \subset \mathbb{C}$ astfel ca $X+Y = X \cdot Y \neq \mathbb{C}$.

Vasile Pop

11. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea; $f(x + \sin x) \leq x \leq f(x) + \sin f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se rezolve inecuaţia $f(x) \geq x$.

Vasile Pop

12. În triunghiul ascuţitunghic ABC are loc următoarea relaţie:

$$\frac{\log_{\sin A}\sin B}{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}}+\frac{\log_{\sin B}\sin C}{\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}}+\frac{\log_{\sin C}\sin A}{\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}\geq 3\sqrt{3}$$

Daniel Sitaru

13. Determinaţi $x,y,z>0$ astfel încât $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z=3\\ 3^x+3^y+3^z=27\end{cases}$.

Daniel Sitaru

14. *a*) Să se determine $n\in\mathbb{Z}^*$, pentru care numărul $108\sin\dfrac{\pi}{n}-144\sin^3\dfrac{\pi}{n}$, este întreg;

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}^*$ ecuaţia $108\sin\dfrac{\pi}{n}-144\sin^3\dfrac{\pi}{n}=n$.

Ionel Tudor

15. Se consideră un triunghi ABC cu laturile de lungimi a,b,c şi raza cercului circumscris R. Arătaţi că

$$\frac{bc}{b+c}\sin^2\frac{A}{2}+\frac{ca}{c+a}\sin^2\frac{B}{2}+\frac{ab}{a+b}\sin^2\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}R.$$

Mihai Vijdeluc şi Vasile Ienuţaş

Clasa a XI-a

1. Pentru ce valori ale lui $a\in(-1,\infty)$, şirul $(x_n)_{n\in N}$ definit prin relaţiile $x_0=a$, $x_{n+1}=x_n^3+3x_n^2+3x_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ este:

a) descrescător;

b) convergent?

Dan Bărbosu

2. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ o matrice cu proprietăţile $\det(A)\neq 2$ şi
$\det(A+I_2)=\det(A^2+I_2)=\det(A^3+I_2)$.
Să se demonstreze că $\det(A^m+I_2)=\det(A^n+I_2)$ pentru orice $m,n\in\mathbb{N}^*$.

Florin Bojor

3. Fie $a>-1$ un număr real şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0\in(1,\infty)$, iar $x_{n+1}=x_n^2+(a+1)x_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_0+1)(x_1+1)\cdot\ldots\cdot(x_n+1)}{x_n^2}.$$

Meda Bojor

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă, cu proprietatea că $2018f(f(x))=f(x)+x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia admite un unic punct fix.

Gabriela Boroica

5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât
$A \cdot B = B \cdot A$, $\det(A^2 - B^2) = 0$ şi $\det(A^2 + B^2) = 0$.
Arătaţi că există o alegere a semnelor $+, -$ astfel încât
$\det(\det(B) \cdot A \pm \det(A) \cdot B) = 0$.

Gheorghe Boroica

6. Fie $x, y, z > 0$ şi $a, b \geq 0$, cu $a \leq b$. Să se demonstreze că

$$\frac{(x^a + y^a)(x^a + z^a)(y^a + z^a)}{x^a y^a z^a} \leq \frac{(x^b + y^b)(x^b + z^b)(y^b + z^b)}{x^b y^b z^b}.$$

Marian Cucoaneş

7. Dacă α şi β sunt numere naturale nenule prime între ele, demonstraţi că există două şiruri de numere naturale $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ cu $(x_n, y_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este convergent la α şi $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent la $\dfrac{\alpha}{\beta}$.
Există astfel de şiruri cu $(x_n)_{n \geq 1}$ mărginit?

Cristian Heuberger

8. Fie şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \left[\sqrt[3]{n}\right]$. Să se arate că:
a) Şirul e mărginit dar nu e monoton;
b) Şirul nu e convergent;
c) $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$.

Dana Heuberger şi Costel Chiteş

9. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(A) > 0$ şi $\det(2016A + B) = \det(2018A + B)$.
Să se arate că $\det(2017A + B) < \det(2019A + B)$.

Nicolae Muşuroia

10. Să se determine toate funcţiile continue $f : [0,1] \to [0,1]$, pentru care există $n \geq 1$ astfel ca $f^n(x) = x$, $\forall\, x \in [0,1]$ $(f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f)$.

Vasile Pop

11. Să se arate că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $\det(A - B) \neq 0$, este verificată egalitatea $A(A-B)^{-1}B = B(A-B)^{-1}A$.

Vasile Pop

12. Fie $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică $(A' = A)$, astfel ca

$$(Tr(A^{2010})^{2011} = (Tr(A^{2011}))^{2010}.$$

Să se arate că $A^n = Tr(A) \cdot A^{n-1}$.

Vasile Pop

13. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietăţile:
$\det(A) = 1$, $\det(A - B) = 0$, $\det(A + B) \neq 0$ şi $A^2 + AB = 2A$.
Să se arate că $Tr(A) = Tr(A^{-1})$.

Radu Pop

14. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că dacă $\det(A-B)=\det(A+B)$, atunci

$$(AB^*)^{2n} = (B^*A)^{2n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Gheorghe Râmbu

15. Fie $\Omega(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(2^{k-1}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2^k}\right)\right)$, unde $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Să se demonstreze că $\Omega(A)+\Omega(B)+\Omega(C) > ABC - \pi$, oricare ar fi A, B, C măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului ascuţitunghic ABC.

Daniel Sitaru

Clasa a XII-a

1. Demonstraţi egalitatea

$$\int_0^1 \sqrt[2019]{1-x^{2018}}\,dx = \int_0^1 \sqrt[2018]{1-x^{2019}}\,dx.$$

Dan Bărbosu

2. Dacă $a, b \in (0,\infty)$ şi $m \in [1,\infty)$, să se calculeze:

$$\int \frac{x^{2m+1}+a\cdot x^m}{(x^{m+1}+b)^{2m+1}}\,dx, \quad \text{unde } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

3. *a*) Să se calculeze derivata funcţiei $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{e^x}$.
b) Să se determine primitivele funcţiei $g:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{e^x(2-\sin(2x))}{e^{2x}\cdot\cos^2 x + \sin^2 x}.$$

Florin Bojor

4. Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} (x^2-1)e^{x+\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

Meda Bojor

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive şi verifică relaţia

$$f(f(x)-3x+1) = 3f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că f este continuă.

Gheorghe Boroica

6. Se consideră mulţimea

$$\mathcal{F} = \Big\{ f \mid f : [0,1] \to [0,1] \text{ e funcţie continuă, bijectivă şi verifică } f(f(x)) \geq X^2,\ \forall\, x \in [0,1] \Big\}.$$

a) Arătaţi că $\mathcal{F} \neq \emptyset$;

b) Arătaţi că, dacă $f \in \mathcal{F}$ şi $f(0) = 0$, atunci $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq \frac{1}{3}$.

Gheorghe Boroica

7. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel astfel încât există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care, oricare ar fi $x \in A$, $x^{n+1} = x$. Arătaţi că pentru orice $x, y \in A$, $(xy)^n = (yx)^n$.

Marian Cucoaneş

8. Fie grupul $(G, \cdot)$ cu exact 4 subgrupuri. Să se arate că ordinul lui G este un număr natural care are cel mult doi factori primi.

Dana Heuberger

9. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 2009$, iar $a + b + c - 3$ este un cub perfect.

Dana Heuberger

10. Fie $a > 1$. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^a \frac{x^{n+a}}{x^n + a} dx$.

Nicolae Muşuroia

11. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to [a, b]$ două funcţii continue. Să se arate că există $c \in [a, b]$ astfel încât $\dfrac{\int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt}{b - a} = c$.

Nicolae Muşuroia

12. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale nenule cu proprietatea că

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} = n.$$

Să se arate că $(x_1^2 + 1) \cdot (x_2^2 + 1) \cdot \ldots \cdot (x_n^2 + 1) \geq 2^n$.

Nicolae Muşuroia şi Radu Pop

13. Fie $n \geq 2$ un număr natural liber de pătrate, D_n mulţimea divizorilor naturali ai numărului n şi $D \subset D_n$ o mulţime cu proprietăţile:

a) $1 \in D$;

b) Dacă $x \in D$, atunci $\dfrac{n}{x} \in D$;

c) Dacă $x, y \in D$, atunci $(x, y) \in D$, unde (x, y) este cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Să se arate că numărul de elemente al mulţimii D este de forma 2^k, cu $k \in \mathbb{N}$.

Vasile Pop

14. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă.
Să se arate că există funcţiile $u, v, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel ca:

1) $f = u \cdot v + w$;

2) $\displaystyle\int_a^b u(x)dx = \int_a^b v(x)dx = \int_a^b w(x)dx = 0.$

Ioan Raşa şi Vasile Pop

15. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$
Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, există $c_n \in (0, 1)$ astfel încât:

$$\int_0^{c_n} tf(t)dt = \frac{n+1}{n}\, c_n \cdot \int_0^{c_n} f(t)dt.$$

Gheorghe Râmbu