Revistă de matematică editată de Catedra de matematică a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana.heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *http://www.sincaibm.ro/*

ISSN 1582– 3660

O extindere şi generalizare a şirului Lalescu

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Abstract. In this article, we are presenting a few extensions for Lalescu, Romeo T. Ianculescu and Bătineţu-Giurgiu series.

Vom spune că o mulţime $A \subset \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ are proprietatea (m) sau este o m-mulţime dacă $1 \in A$ şi $x + 1 \in A$, $\forall\, x \in A$.
Exemple de astfel de mulţimi sunt: $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$, $[1, \infty)$, N, N^*.
Să observăm că oricare ar fi m-mulţimea A, atunci $\mathbb{N}^* \subset A$ şi că $+\infty$ este punct de acumulare pentru orice m-mulţime A.

Definiţia 1. Dacă A este o m-mulţime, atunci o funcţie $f : A \to \mathbb{R}^*$ are proprietatea (L) sau este o L-funcţie, dacă există $r \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in A}} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^r} = a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Definiţia 2. Dacă A este o m-mulţime, atunci o funcţie $g : A \to \mathbb{R}_+^*$ are proprietatea (B) sau este o B-funcţie, dacă există $s \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in A}} \frac{f(x+1)}{f(x) \cdot x^{s+1}} = b \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{şi există} \quad \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in A}} \frac{(f(x))^{\frac{1}{x}}}{x^{s+1}}.$$

Definiţia 3. Dacă A este o m-mulţime, atunci funcţia $h : A \to \mathbb{R}_+^*$ are proprietatea (G) sau este o G-funcţie, dacă există $t \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in A}} \frac{f(x)}{x^{t+1}} = c \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in A}} \left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x = d \in (1, \infty).$$

Să dăm câteva exemple de astfel de funcţii.

Dacă $\Gamma : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ este funcţia lui Euler de speţa a doua, atunci funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = (\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}$ are proprietatea (L) deci este o L-funcţie.
Într-adevăr,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}} \frac{(\Gamma(n+1))^{\frac{1}{n}}}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

unde aplicăm teorema (criteriul) Cauchy-D'Alembert (C-D'A) şi obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}$$

şi

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim_{x\to\infty}f(x)\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}f(x)(u(x)-1)=\lim_{x\to\infty}f(x)\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\ln u(x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\ln(u(x))^x=e^{-1}\lim_{x\to\infty}\frac{u(x)-1}{\ln u(x)}\ln(u(x))^x, \qquad (1)$$

unde $u(x)=\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\dfrac{f(x+1)}{x+1}\cdot\dfrac{x}{f(x)}\cdot\dfrac{x+1}{x}$ şi deci $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=e^{-1}\dfrac{1}{e^{-1}}1=1$ şi atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{u(x)-1}{\ln u(x)}=1$, iar

$$\lim_{x\to\infty}(u(x))^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)}\cdot\frac{1}{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}=e$$

şi atunci din relaţia (1) deducem că $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=e^{-1}\cdot 1\cdot\ln e=e^{-1}$, ceea ce arată că funcţia f este o L-funcţie în care $r=0$ şi $a=e^{-1}$.

Funcţia $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $g(x)=\Gamma(x+1)$ este o B-funcţie. Într-adevăr

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x+1)}{g(x)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+2)}{x\cdot\Gamma(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)\Gamma(x+1)}{x\cdot\Gamma(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1,$$

deci g este o $B-$funcţie în care $s=0$, $b=1$.

De asemenea funcţiile $h,k:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $h(x)=(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}$, $k(x)=x^{\frac{x+1}{x}}$ sunt două exemple de G-funcţii. Într-adevăr,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}{x}=e^{-1}$$

şi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{h(x+1)}{h(x)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)}\cdot\frac{1}{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}=e.$$

Deci $t=0$, $c=e^{-1}$ şi $d=e$.

Totodată avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1+\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$$

şi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k(x+1)}{k(x)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{x\cdot\frac{x+2}{x+1}}}{x^{x\left(\frac{x+1}{x}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}\cdot\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}$$
$$=e\cdot\frac{1}{1}=e,$$

ceea ce arată că şi funcţia k este o G-funcţie cu $t=0$, $c=1$, $d=e$.

Să evidenţiem acum şi alte proprietăţi ale conceptelor introduse mai sus.

Propoziţia 1. *Orice L-funcţie $f:A\to\mathbb{R}_+^*$, unde A este o m-mulţime, este o G-funcţie.*

Demonstraţie. Dacă f este o L-funcţie, atunci există $r\in\mathbb{R}_+$ astfel încât $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^r}=a\in\mathbb{R}_+^*$ şi atunci

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x)}{x^{r+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^{r+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)^{r+1}-n^{r+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n+1)-f(x)}{n^r}\cdot\frac{n^r}{(n+1)^{r+1}-n^{r+1}}\right)$$
$$=a\cdot\frac{1}{r+1}=\frac{a}{r+1}.$$

De asemenea avem:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{(x+1)^{r+1}}\cdot\frac{x^{r+1}}{f(x)}\cdot\frac{x+1}{x}\right)=\frac{a}{r+1}\cdot\frac{r+1}{a}\cdot 1=1$$

şi

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x=\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\left(\left(1+\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(x+1)-f(x)}}\right)^{\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}\cdot x}$$
$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^r}\cdot\frac{x^{r+1}}{f(x)}}=e^{a\cdot\frac{r+1}{a}}=e^{r+1},$$

ceea ce arată că f este o G-funcţie cu $c=\dfrac{a}{r+1}$, $d=e^{r+1}$ şi $t=r$.

Propoziţia 2. *Orice G-funcţie, $f:A\to\mathbb{R}_+^*$ unde A este o m-mulţime, este o L-funcţie.*

Demonstraţie. Dacă f este o G-funcţie, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \dfrac{f(x)}{x^{t+1}} = c \in \mathbb{R}_+^*$ şi există $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x = d \in (1,\infty)$. Prin urmare,

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \frac{f(x+1)}{(x+1)^{t+1}} \cdot \frac{x^{t+1}}{f(x)} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{t+1} = c\cdot \frac{1}{c}\cdot 1 = 1$$

şi, de asemenea, avem:

$$d = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \left(\frac{f(x{+}1)}{f(x)}\right)^x = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \left(\left(1+\frac{f(x{+}1)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(x+1)-f(x)}}\right)^{\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}x}$$
$$= e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}x} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^t}\cdot\frac{x^{t+1}}{f(x)}} = e^{\frac{1}{c}\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^t}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{c}\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \frac{f(x{+}1)-f(x)}{x^t} = \ln d \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \frac{f(x{+}1)-f(x)}{x^t} = c\cdot \ln d \in \mathbb{R}_+^*.$$

Cele de mai sus ne arată că f este o L-funcţie unde $r = t$ şi $a = c\cdot \ln d$.

Propoziţia 3. *Dacă $f : A \to \mathbb{R}_+^*$, unde A este o m-mulţime, este o B-funcţie, atunci funcţia $g : A \to \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = (f(x))^{\frac{1}{x}}$ este o L-funcţie.*

Demonstraţie. Conform definiţiei B-funcţiei, există $s \in \mathbb{R}_+$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \dfrac{f(x+1)}{f(x)x^{s+1}} = b \in \mathbb{R}_+^*$ şi deci va trebui demonstrat că există $r \in \mathbb{R}_+$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \dfrac{g(x+1)-g(x)}{x^r} = a \in \mathbb{R}_+^*$. Într-adevăr, avem

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} \frac{g(x)}{x^{s+1}} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}} \frac{g(x)}{n^{s+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{f(n)}}{n^{s+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{f(n)}{n^{n(s+1)}}} \overset{C-D'A}{=}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{(n+1)^{(n+1)(s+1)}} \cdot \frac{n^{(s+1)n}}{f(n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)n^{s+1}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)(s+1)} = b\cdot e^{-(s+1)}$$

şi deci

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \frac{g(x+1)-g(x)}{x^s} = \lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \frac{g(x)}{x^s}\left(\frac{g(x+1)}{g(x)}-1\right) = \lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \frac{g(x)}{x^s}(v(x)-1)$$
$$= \lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \frac{g(x)}{x^s}\cdot\frac{v(x)-1}{\ln v(x)}\ln v(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^{s+1}}\cdot\frac{v(x)-1}{\ln v(x)}\ln(v(x))^x, \qquad (2)$$

unde

$$v(x) = \frac{g(x+1)}{g(x)} = \frac{g(x+1)}{(x+1)^{s+1}}\cdot\frac{x^{s+1}}{g(x)}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^{s+1}$$

şi deci $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} v(x) = \dfrac{b}{e^{s+1}}\cdot\dfrac{e^{s+1}}{e}\cdot 1 = 1$ şi atunci $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \dfrac{v(x)-1}{\ln v(x)} = 1$, precum şi

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} (v(x))^x &= \lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \left(\frac{g(x+1)}{g(x)}\right)^x = \lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \left(\frac{(f(x+1))^{\frac{1}{x+1}}}{(f(x))^{\frac{1}{x}}}\right)^x\\
&= \lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \frac{f(x+1)}{f(x)}\cdot\frac{1}{(f(x+1))^{\frac{1}{x+1}}}\\
&= \lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \frac{f(x+1)}{f(x)\cdot x^{s+1}}\cdot\frac{(x+1)^{s+1}}{(f(x+1))^{\frac{1}{x+1}}}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{s+1}\\
&= b\cdot\frac{e^{s+1}}{b}\cdot 1 = e^{s+1}.\end{aligned}$$

Până acum am demonstrat că funcţia g este o G-funcţie şi, pentru a demonstra că g este o L-funcţie, va trebui să demonstrăm că $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \dfrac{g(x+1)-g(x)}{x^s} \in \mathbb{R}_+^*$.

Într-adevăr, trecând la limită cu $x\to\infty$, $x\in A$ în relaţia (2), obţinem:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \frac{g(x+1)-g(x)}{x^s} = \frac{b}{e^{s+1}}\cdot 1\cdot\ln e^{s+1} = \frac{(s+1)b}{e^{s+1}},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Teoremă. *Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}_+^*$, unde A este o m-mulţime, este o G-funcţie atunci*:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^t} = c\cdot\ln d. \qquad (3)$$

Demonstraţia 1. Conform definiţiei avem:

$$d=\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x=\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\left(\left(1+\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(x+1)-f(x)}}\right)^{\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}x}$$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}x}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^t}\cdot\frac{x^{t+1}}{f(x)}}=e^{\frac{1}{c}\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^t}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{c}\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^t}=\ln d\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^t}=c\ln d\quad\text{q.e.d.}$$

Demonstraţia 2. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^t}=\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x)}{x^t}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}-1\right)=\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x)}{x^t}(w(x)-1)$$

$$=\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x)}{x^t}\cdot\frac{w(x)-1}{\ln w(x)}\ln w(x)=\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{f(x)}{x^{t+1}}\cdot\frac{w(x)-1}{\ln w(x)}\ln(w(x))^x,\quad(4)$$

unde

$$w(x)=\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{f(x+1)}{(x+1)^{t+1}}\cdot\frac{x^{t+1}}{f(x)}\cdot\frac{x^{t+1}}{f(x)}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{t+1}$$

şi deci $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}w(x)=c\cdot\frac{1}{c}\cdot 1=1$ şi rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\frac{w(x)-1}{\ln w(x)}=1$ şi

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}(w(x))^x=\lim_{\substack{x\to\infty\\x\in A}}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x=d.$$

Deci relaţia (4) prin trecere la limită cu $\substack{x\to\infty\\x\in A}$ rezultă că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^t}=c\cdot\ln d,\quad\text{q.e.d.}$$

Aplicaţii

1. Dacă $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}$ atunci, conform teoremei demonstrate, avem:

$$\lim_{x\to\infty}\left((\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x+1}}-(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x\right)=e^{-1}\ln e=e^{-1},$$

de unde, considerând $x=n\in\mathbb{N}^*$, obţinem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=e^{-1}$, adică limita şirului Lalescu.

2. Dacă $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x)=x^{\frac{x+1}{x}}$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$ şi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^{\frac{x+2}{x+1}}}{x^{\frac{x+1}{x}}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\cdot\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{x+1}}}$$
$$=e\cdot\frac{1}{1}=e$$

şi atunci, conform teoremei, avem

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\lim_{x\to\infty}\left((x+1)^{\frac{x+2}{x+1}}-x^{\frac{x+1}{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\ln\left(\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x\right)=1\cdot\ln e=1.$$

Dacă aici considerăm $x=n\in\mathbb{N}^*$, atunci obţinem

$$\lim_{x\to\infty}\left((n+1)\sqrt[n+1]{n-1}-n\sqrt[n]{n}\right)=1,$$

adică limita şirului lui Romeo T. Ianculescu.

3. Dacă $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{x^2}{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}$, atunci

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\Gamma(x+1))^{\frac{1}{x}}}=e$$

şi

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+2)}\,(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}\right)$$
$$=e^2\lim_{x\to\infty}\frac{(\Gamma(x+2))^{\frac{1}{x+1}}}{x+1}=e^2\cdot\frac{1}{e}=e,$$

atunci conform teoremei rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=e\cdot\ln e=e$.
Dacă aici cnsiderăm $x=n\in\mathbb{N}^*$, atunci obţinem

$$\lim_{n\to\infty}(f(n+1)-f(n))=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}-\frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e,$$

adică limita şirului Bătineţu-Giurgiu.
Cititorul poate găsi şi alte exemple de aplicare a celor demonstrate anterior.

Bibliografie

[1] Bătineţu, M.D., *Şiruri*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1979, pag. 3–4

[2] Bătineţu-Giurgiu, M.D., *Şiruri Lalescu*, R.M.T. Anul XX, nr. 1-2 (1989), pag. 33–36

[3] Bătineţu, M.D., Ţena, M., *Asupra unor clase de limite de şiruri*, Matematică pentru elevi, Galaţi, nr. 9 (1990), pag. 15–20

[3] Bătineţu, M.D., Muşuroia, N., *Asupra unor şiruri*, Argument nr. 18 (2016), pag. 3–10

Profesor, Bucureşti

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Generarea unor congruenţe

Tudor Caba şi Radu-Ioan Mihai

Abstract. In the following, we will see several proofs of a congruence relation related to Fibbonacci's and Luca's sequences.

În această notă vom aborda demonstraţii diferite ale unei relaţii de congruenţă legate de cunoscutele şiruri ale lui Fibonacci şi Lucas. Abordări diferite ale acesteia conduc la generalizări, deschid, pentru cititor, noi căi de studiu ale altor relaţii.

Se consideră şirurile recurente $(F_n)_{n\geq 0}$, $(L_n)_{n\geq 0}$ definite astfel:
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall\, n \geq 0$, şirul lui Fibonacci.
$L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall\, n \geq 0$, şirul lui Lucas.
Să se demonstreze congruenţa: $F_{n+1} \cdot 2^n + F_n \cdot 2^{n+1} \equiv 1 \pmod 5$.

(J.A. Maxwell, Stanford University)

Demonstraţia 1. Vom raţiona prin inducţie matematică, varianta 1.
Verificare, pentru $n = 0$. $F_1 \cdot 2^0 + F_0 \cdot 2^1 = 1 \equiv 1 \pmod 5$.
Presupunem $F_n \cdot 2^{n-1} + F_{n-1} \cdot 2^n \equiv 1 \pmod 5$, atunci

$$\begin{aligned} F_{n+1} \cdot 2^n + F_n \cdot 2^{n+1} &= (F_n + F_{n-1})2^n + F_n \cdot 2^{n+1} \\ = 2^n \cdot F_{n-1} + F_n(2^n + 2^{n+1}) &= 2^n \cdot F_{n-1} + 2^{n-1} \cdot 6 \cdot F_n \\ = 2^n \cdot F_{n-1} + F_n \cdot 2^{n-1} &+ 5 \cdot F_n \cdot 2^{n-1} \equiv 1 \pmod 5. \end{aligned}$$

Demonstraţia 2. Vom raţiona prin inducţie matematică, varianta 2.
Verificare, pentru $n = 0$. $F_1 \cdot 2^0 + F_0 \cdot 2^1 = 1 \equiv 1 \pmod 5$, apoi pentru $n = 1$, $F_2 \cdot 2^1 + F_1 \cdot 2^2 \equiv 2 + 4 = 6 \equiv 1 \pmod 5$.
Presupunem relaţiile adevărate $F_{k+1} \cdot 2^k + F_k \cdot 2^{k+1} \equiv 1 \pmod 5$, $0 \leq k \leq n-1$.

$$\begin{aligned} F_{n+1} \cdot 2^n + F_n \cdot 2^{n+1} &= (F_n + F_{n-1})2^n + (F_{n-1} + F_{n-2})2^{n+1} \\ = (2^n \cdot F_n + 2^{n+1} \cdot F_{n-1}) &+ (2^n \cdot F_{n-1} + 2^{n+1} \cdot F_{n-2}) \equiv 2 + 2^2 \equiv 1 \pmod 5. \end{aligned}$$

Demonstraţia 3. Vom folosi formula lui Binet. $F_n = \dfrac{q_1^n - q_2^n}{\sqrt{5}}$, $q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} =$ $\varphi =$ numărul de aur şi $q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} =$ conjugatul pătratic.

Analog cu determinarea formulei lui Binet, se determină $L_n = q_1^n + q_2^n$, $\forall\, n \geq 0$.

$$F_{n+1} \cdot 2^n + F_n \cdot 2^{n+1} = \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \cdot 2^n + \frac{q_1^n - q_2^n}{\sqrt{5}} \cdot 2^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2^n \cdot q_1^n (q_1 + 2) - 2^n \cdot q_2^n (q_2 + 2)\right] = 2^n (q_1^{n+1} + q_2^{n+1}) = 2^n \cdot L_{n+1},$$

deoarece $q_1 + 2 = \sqrt{5} \cdot q_1$, $q_2 + 2 = -\sqrt{5} \cdot q_2$.
Analizăm subcazurile: $n = 4k$, $2^{4k} \cdot L_{4k+1} \equiv 1 \pmod 5$.

$n = 4k+1$, $2^{4k+1} \cdot L_{4k+2} \equiv 2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 5 n = 4k+2$,
$2^{4k+2} \cdot L_{4k+3} \equiv 4 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 5$;

$n = 4k+3$, $2^{4k+3} \cdot L_{4k+4} \equiv 8 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 5$.

În demonstraţie am utilizat congruenţa modulo 5 a termenilor şirului Lucas:
$\overline{L_n} : 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, \ldots$ care este periodic de perioadă $T = 4$.

Demonstraţia 2 ne permite o generalizare.

Fie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ fixat. Ne propunem să determinăm o valoare $x \in \mathbb{N}^*$, pentru care $F_{n+1} \cdot p^n + F_n \cdot p^{n+1} \equiv 1 \pmod x$. Verificăm relaţia pentru $n = 0$, apoi pentru $n = 1$ şi raţionăm apoi prin inducţie (varianta 2).
Obţinem $p + p^2 \equiv 1 \pmod x$, deci putem alege $x = p^2 + p - 1$.

Astfel, pentru $p = 2$, se obţine relaţia dată.

Pentru $p = 3$, obţinem $F_{n+1} \cdot 3^n + F_n \cdot 3^{n+1} \equiv 1 \pmod{11}$.

Pentru $p = 5$, obţinem $F_{n+1} \cdot 5^n + F_n \cdot 5^{n+1} \equiv 1 \pmod{29}$.

Elev, Colegiul Naţional de Informatică ”Tudor Vianu”, Bucureşti
Elev, Colegiul Naţional de Informatică ”Tudor Vianu”, Bucureşti

Câteva contraexemple în algebră

Daniela Chiteş şi Costel Chiteş

Abstract. In this paper we will present some interesting counterexamples that are useful in the study of Algebra.

Rolul contraexemplelor este de a-i pune în gardă pe elevi (studenţi) în legătură cu aplicarea abuzivă a unor teoreme, de a sublinia necesitatea verificării tuturor ipotezelor acestora. În general, prin slăbirea ipotezelor se obţin afirmaţii false, care trebuie infirmate printr-un contraexemplu. Construirea de contraexemple se realizează de către aceia ce deţin şi stăpânesc atât un bogat material de exemple şi exerciţii, cât şi teoria.

Prin analiza structurii subiectelor de examen date studenţilor la masterat sau la unele examene curente, se remarcă utilizarea unor contraexemple. Rolul acestora este de a verifica atât cunoştinţele teoretice asimilate, cât şi spontaneitatea studenţilor.

Elevii noştri sunt relativ antrenaţi cu evidenţierea de contraexemple la Analiza matematică, motiv pentru care autorii s-au decis să redacteze această notă care să le furnizeze modele în alte direcţii.

1. Logică şi teoria mulţimilor

Exemplul 1. Propoziţia $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ este adevărată şi $\exists y\ \forall x\ P(x,y)$ este falsă.

Un contraexemplu: pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$, considerăm $P(x,y)$: $x \leq y$.

Exemplul 2. Propoziţia $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ este adevărată şi propoziţia $\forall (P(x)) \vee \forall (Q(x))$ este falsă.

Un contraexemplu: pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ considerăm $P(x) : x$ este par, $Q(x) : x$ este impar.

Exemplul 3. Propoziţia $\exists x(P(x)) \wedge \exists x(Q(x))$ este adevărată şi $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ este falsă.

Un contraexemplu: pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ considerăm: $P(x)$: x este par, $Q(x) : x$ este impar.

Exemplul 4. Creatorul teoriei mulţimilor, Georg Cantor (1845-1918), a debutat în memoriul său publicat în martie 1995, din Mathematische Annalen astfel: "Vom numi "mulţime" reuniunea tuturor obiectelor concepţiei noastre m, bine determinate şi distincte, pe care le vom numi "elementele" lui M".

Matematicianul şi filozoful englez Bertrand Russell (1872-1970), a enunţat în anul 1905 următorul paradox:

Considerăm mulţimea $A = \{X | X \notin X\}$. Se verifică imediat că aserţiunile: "A aparţine lui A" şi "A nu aparţine lui A" sunt simultan adevărate.

Pentru remedierea acestui paradox, a fost necesară crearea unei teorii axiomatice a teoriei mulţimilor. Matematicienii Ernst Zermelo (1908) şi Abraham Fraenkel (1922) au realizat o teorie axiomatizată, notată ZF, pe care apoi matematica s-a construit riguros. Apoi, în 1931, Kurt Gödel a demonstrat că absenţa paradoxurilor nu poate fi dovedită, adică consistenţa sistemului axiomatic nu poate fi dovedită.

Exemplul 5. Exemplul de funcţie $f : E \to F$ pentru care există $A \subset E$, $B \subset F$, pentru care $A \neq f^{-1}(f(A))$ şi $B \neq f(f^{-1}(B))$.

Considerăm funcţia $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ şi $A = \mathbb{N}$, $B = -\mathbb{N}$.

Exemplul 6. Mulţimea tuturor funcţiilor $F(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ este numărabilă?

Răspunsul este negativ. Presupunem că $F(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$. definim funcţia $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = f_n(n) + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Cum $g \in F(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, deducem că există $p \in \mathbb{N}$ a.î. $g = f_p$. Atunci $g(p) = f_p(p) = 1 + f_p(p)$, contradicţie.

Exemplul 7. Există mulţimi ordonate care au mai multe elemente minimale?

Da, există. Înzestrăm mulţimea $M = \{n \in \mathbb{N} | n \geq 2\}$ cu relaţia $|$ de divizibilitate. Această relaţie este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă, deci cuplul $(M, |)$ este o mulţime ordonată. Toate numerele prime sunt elemente minimale.

Ce se remarcă? Relaţia de ordine nu este totală, motiv pentru care se pierde unicitatea elementului minimal.

Exemplul 8. Există aplicaţii bijective şi strict crescătoare f, pentru care f^{-1} nu este strict crescătoare?

Da, există. Considerăm mulţimile ordonate $(\mathbb{N}^*, |)$, $(\mathbb{N}^*, \leq)$, dintre care prima nu este total ordonată. Funcţia identică $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ este strict crescătoare. f^{-1} nu este strict crescătoare. De exemplu $3 \leq 4$, dar $f^{-1}(3) = 3$ nu divide pe $f^{-1}(4) = 4$.

Exemplul 9. Inspirat de Teorema lui Fermat, L. Euler a propus următoarea conjectură:

Nu există soluţii naturale nenule ale ecuaţiei $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$.

Matematicianul american Noam Elkies a pus capăt conjecturii lui Euler în anul 1966, printr-un contraexemplu:

$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$.

2. Structuri algebrice

Exemplul 10. Pe o mulţime nevidă G se introduce o lege de compoziţie internă $*$ care verifică condiţiile: a) este asociativă; b) $\exists\, e \in G$ a.î. $e * x = x$, $\forall\, x \in G$; c) $\forall\, x \in G$, $\exists\, x' \in G$ a.î. $x * x' = e$.
Atunci $(G, *)$ este un grup?

Nu este adevărat. Un contraexemplu: $G = \mathbb{R}^*$, $x * y = |x| \cdot y$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^*$.

Exemplul 11. Să se dea un exemplu de grup finit pentru care centrul său este un subgrup propriu.

Fie $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ grupul cuaternionilor.
Centrul său $Z(G) = \{1, -1\} \leq G$ este un subgrup propriu al său.

Exemplul 12. Există grupuri care nu sunt ciclice, pentru care toate subgrupurile proprii sunt ciclice?

Da, există. Grupul $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ nu este ciclic. Subgrupurile sale proprii sunt: $\{(0, 0)\}$, $\mathbb{Z}_2 \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{Z}_2$, care sunt ciclice.

Exemplul 13. Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordin n. Atunci, pentru oricare $d \in \mathbb{N}$, cu $d|n$, există un subgrup $H \leq G$ cu $|H| = d$.

Este fals. Un contraexemplu: fie $G = A_4$ grupul permutărilor pare de grad patru, ce are ordinul 12. Arătăm că el nu are un subgrup de ordin 6. Presupunem că există $H \leq A_4$, $|H| = 6$. Fie $V = \{e, r_1, r_2, r_3\}$, unde

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ce sunt produse de câte două transpoziţii, deci $V \subset A_4$. Se verifică $V \leq A_4$; $r_i \circ r_j = r_k$ pentru i, j, k distincte două câte două. Atunci $H \cap V \leq A_4$ şi notăm $H' = H \cap V$. Cum $H' \leq H$, $H' \leq V$, ordinul lui H' divide 4 şi 6, deci H' va avea ordinul 1 sau 2. Grupul A_4 conţine şi cele opt permutări pare, care sunt $3-$cicluri. Într-adevăr, un $3-$ciclu este (a, b, c) şi, conform formulei lui Cauchy, numărul lor este $\dfrac{4!}{3} = 8$. Deci în H nu putem avea două permutări $r_i, r_j, i \neq j$ deoarece, în caz contrar, $V \subset H$, contradicţie. Deci H va conţine patru sau cinci cicluri de lungime 3. Dacă $t_1 = (1, 2, 3) \in H$, $t_2 = (1, 2, 4) \in H$, atunci $t_1 \circ t_2 = r_2 \in H$, $t_2 \circ t_1 = r_3 \in H$, contradicţie.
Oricare altă alegere conduce la contradicţie.
Ca o concluzie, reciproca Teoremei lui Lagrange este falsă.

Exemplul 14. Să se dea un exemplu de grup, ce conţine două elemente de ordin finit al cărui produs este de ordin infinit.

Grupul $G = GL_2(\mathbb{Z})$ al matricelor pătrate de ordinul doi, ce au elemente numere întregi şi au determinantul ± 1, împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor.

Considerăm elementele: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Avem $A^4 = I_2$, $B^3 = I_2$ şi $(AB)^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall\, n \geq 1$. Matricea $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ este de ordin infinit.

Exemplul 15. Există inele necomutative pentru care grupul multiplicativ al unităţilor este comutativ?

Da. Considerăm inelul finit $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbb{Z}_2 \right\}$. El este necomutativ, deoarece $\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$. Inelul are grupul unităţilor $U(R) = \{I_2, A\}$, $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$ care este comutativ.

Exemplul 16. Daţi un exemplu de polinom ireductibil $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, grad$(f) = 3$.

Un exemplu este: $f = X^3 + \overline{4}\,X^2 + X + \overline{1}$. Cum f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$, deducem că f este ireductibil.

Bibliografie

[1] Albu, T., Ion, D.I., *Itinerar elementar în algebra superioară*, Matrix Rom, Bucureşti, 2012

[2] Karpfinger, C., Meyberg, K., *Algebra*, Springer-Verlag, 2013

[3] Purdea, I., Pop Ioana, *Algebră*, Gil Zalău, 2003

Profesoară, Şc. generală nr. 79, Bucureşti

Lector dr., Universitatea "Dimitrie Cantemir", Bucureşti

Generalizarea unei inegalităţi algebrice

Marian Cucoaneş şi Marius Drăgan

Abstract. The purpose of this article is to give a new proof and a generalization of the inequality of Phan Hun Duc.

Pentru început vom reaminti inegalitatea Pham Huu Duc.

Teorema 1. *Fie x, y, z numere pozitive. Atunci*

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+x+y+z\geq\frac{6(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}\,. \tag{1}$$

Demonstraţie. Inegalitatea (1) se scrie echivalent

$$\sum_{cyclic}\left(\frac{x^2}{y}-2x+y\right)\geq 2\left(\frac{3x^2+3y^2+3z^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyclic}\frac{(x-y)^2}{y}\geq\frac{2\sum\limits_{cyclic}(x-y)^2}{x+y+z}\Leftrightarrow\sum_{cyclic}(x-y)^2\left(\frac{x+z}{y}-1\right)\geq 0 \tag{2}$$

Avem

$$\begin{aligned}\sum(x-y)^2\left(\frac{x+z}{y}-1\right)&=\sum_{cyclic}\left[(x-y)^2\frac{x}{y}+(x-y)^2\frac{z}{y}\right]-\sum_{cyclic}(x-y)^2\\
&=\sum_{cyclic}\left[(x-y)^2\frac{x}{y}+(z-x)^2\frac{y}{x}\right]-\sum_{cyclic}(x-y)^2\\
&=\sum_{cyclic}\left[(x-y)\sqrt{\frac{x}{y}}+(z-x)\sqrt{\frac{y}{x}}\right]^2-2\sum_{cyclic}(x-y)(z-x)-\sum_{cyclic}(x-y)^2\\
&=\sum_{cyclic}\left[(x-y)\sqrt{\frac{x}{y}}+(z-x)\sqrt{\frac{y}{x}}\right]^2\geq 0,\end{aligned}$$

de unde rezultă (2).

În continuare vom demonstra următoarea teoremă

Teorema 2. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. *Atunci*

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}. \tag{3}$$

Demonstraţie. Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$, rezultă $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = -2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.
Inegalitatea (3) este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_i} \right) x_i^2 \geq 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_j}{a_i} x_i^2 + \frac{a_i}{a_j} x_j^2 \right) \geq 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_j}{a_i} x_i^2 + \frac{a_i}{a_j} x_j^2 \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(x_i \sqrt{\frac{a_j}{a_i}} + x_j \sqrt{\frac{a_i}{a_j}} \right)^2 \geq 0,$$

ceea ce este adevărat.

Corolarul 1. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. *Atunci*

$$\sum_{cyclic} \frac{x_1^2}{a_1} \geq 2 \sum_{cyclic} \frac{x_1 x_2}{a_1} - \sum_{cyclic} \frac{x_2^2}{a_1} + \frac{4 \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{cyclic} x_1 x_2 \right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}. \tag{4}$$

Demonstraţie. Dacă înlocuim în (1)
$x_1 \to x_1 - x_2,\ x_2 \to x_2 - x_3,\ \ldots,\ x_n \to x_n - x_1$ obţinem inegalitatea (4).

Corolarul 2. (Generalizarea inegalităţii Pham Huu Duc).
Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. *Atunci*

$$\sum_{cyclic} \frac{x_1^2}{x_2} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{4 \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{cyclic} x_1 x_2 \right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Demonstraţie. Considerăm în (4) $a_1 = x_2, a_2 = x_3, \ldots, a_n = x_1$.

Corolarul 3. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. *Atunci*

$$\sum_{cyclic} \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{4 \sum\limits_{cyclic} x_1 x_2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 2 \sum_{cyclic} \frac{x_1}{x_2} + 4 - n. \tag{5}$$

Demonstraţie. Dacă în (3) înlocuim $x_1 \to x_1 - x_2$, $x_2 \to x_2 - x_3$, $\ldots$, $x_n \to x_n - x_1$ şi $a_1 = x_2^2$, $a_2 = x_3^2, \ldots, a_n = x_1^2$, obţinem

$$\sum_{cyclic} \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_2^2} \geq \frac{2 \sum\limits_{cyclic} (x_1 - x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

inegalitate echivalentă cu (5).

Teorema 3. *Fie* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *astfel încât*

$$\sum_{cyclic} \frac{x_1}{\alpha_2} \geq \sum_{cyclic} \frac{x_1}{\alpha_1}.$$

Atunci

$$\sum_{cyclic} \frac{x_1^2}{\alpha_2 x_2} \geq \sum_{cyclic} \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{4\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{cyclic} x_1 x_2\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}. \tag{6}$$

Demonstraţie. Dacă în (4) înlocuim $a_1 = \alpha_2 x_2, a_2 = \alpha_3 x_3, \ldots, a_n = \alpha_1 x_1$, obţinem inegalitatea (6).

Corolarul 4. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. *Atunci*

$$\sum_{cyclic} \frac{x_1^2}{x_2^2} \geq \frac{(n+4) \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 4 \sum\limits_{cyclic} x_1 x_2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Demonstraţie. Se înlocuieşte în (6) $\alpha_i = x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Observaţie. Deoarece $2 \sum\limits_{cyclic} \frac{x_1}{x_2} + 4 - n \geq n + 4$, în consecinţă Corolarul 3 este o rafinare a Corolarului 4.

Bibliografie

[1] Cârtoaje, V., *Algebraic inequalities*, Gil Publishing House (2006), pp. 459

Profesor, Liceul Tehnologic "Eremia Grigorescu", Mărăşeşti
Profesor, Liceul "Mircea cel Bătrân", Bucureşti

Argument 19

Applications of the cubic function (part 2)

Leonard Giugiuc, Diana Trailescu şi Maria Popescu

Abstract. This note is a continuation of the paper "Applications of the cubic function", published in 2014 in the mathematical magazine RMT.

Această lucrare este o continuare a lucrării "Aplicaţii ale funcţiei cubice" susţinute în 2014 la Buşteni şi publicată în acelaşi an în revista de cultură matematică RMT.
Vom reaminti câteva rezultate esenţiale, rezultate descoperite independent de către autor şi de către profesorul Vo Quec Ba Can din Vietnam.

Teorema 1. *Fie t un număr real fixat, cu $t \geq 0$. Considerăm numerele reale a, b şi c astfel încât $a + b + c = 3s$ şi $ab + bc + ca = 3(s^2 - t^2)$, unde s este un număr real fixat. Atunci valoarea minimă a produsului abc este egală cu $(s + t)^2(s - 2t)$.*

Teorema 2. *Fie t un număr real fixat, cu $t \geq 0$. Considerăm numerele reale a, b, c astfel încât $a + b + c = 3s$ şi $ab + bc + ca = 3(s^2 - t^2)$, unde s este un număr real fixat. Atunci valoarea maximă a produsului abc este egală cu $(s - t)^2(s + 2t)$.*

Teorema 3. *Fie t un număr real fixat, cu $0 \leq t \leq s$. Considerăm numerele reale nenegative a, b şi c astfel încât $a + b + c = 3s$ şi $ab + bc + ca = 3(s^2 - t^2)$, $s > 0$ şi s fixat. Atunci valoarea minimă a produsului abc este egală cu*

$$\begin{cases} (s+t)^2(s-2t), & \text{dacă } 0 \leq t \leq \dfrac{s}{2} \\ 0, & \text{dacă } \dfrac{s}{2} \leq t \leq s \end{cases}.$$

Teorema 4. *Fie t un număr real fixat, cu $0 \leq t \leq s$. Considerăm numerele reale nenegative a, b şi c astfel încât $a+b+c = 3s$ şi $ab+bc+ca = 3(s^2-t^2)$, $s > 0$ şi s fixat. Atunci valoarea maximă a produsului abc este egală cu $(s-t)^2(s+2t)$.*

Aceste rezultate nu vor fi demonstrate aici, ele fiind deja demonstrate în lucrarea menţionată. Teoremele de mai sus sunt rezultate puternice, permiţându-ne să estimăm valoarea produsului dintre trei numere reale (sau nenegative) cu o acurateţe mult mai mare decât inegalităţile clasice de medie, care inegalităţi ne dau o aproximare sumară doar pentru produsul dintre trei numere reale pozitive (sau nenegative).

Ca element de noutate, vor fi prezentate aplicaţii mult mai dificile şi în care se va face uz de Teoremele 1 şi 2, deci se va opera cu numere reale arbitrare, nu doar cu numere pozitive.

Aplicaţia 1 (IMO 2006, problema 3)

Să se determine cel mai mic număr real M astfel încât pentru orice numere reale a, b şi c, are loc inegalitatea

$$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2) \leq M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Soluţie (Leonard Giugiuc).
Cum pentru $a=b=c=1$ obţinem $0 \leq 9M$, deducem că $M \geq 0$. De asemenea,

$$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c).$$

Fie $f(a,b,c) = ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)$ şi $g(a,b,c) = M(a^2+b^2+c^2)^2$. Cum $f(a,b,c) = -f(b,a,c)$ şi $g(a,b,c) = g(b,a,c)\ \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$, este suficient să găsim M astfel ca

$$|(ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2, \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Dacă $a+b+c=0$, atunci este evident că $(*)$ are loc $\forall\, M \geq 0$. Deci considerăm $a+b+c \neq 0$. Cum f şi g definite mai sus sunt polinoame omogene de gradul 4, putem presupune WLOG că $a+b+c=3$. Deci $(*)$ devine

$$9[(a-b)(a-c)(b-c)]^2 \leq M^2(a^2+b^2+c^2)^4,\ \forall\, a,b,c \in \mathbb{R} \text{ cu } a+b+c=3 \quad (**)$$

Dar

$$[(a-b)(a-c)(b-c)]^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}^t\right]$$
$$= \begin{vmatrix} 3 & 3 & S_2 \\ 3 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \text{ unde } S_k = a^k+b^k+c^k,\ k \in \{2,3,4\}.$$

De aici,

$$[(a-b)(a-c)(b-c)]^2 = 3S_2S_4 + 6S_2S_3 - (S_2^3 + 3S_3^2 + 9S_4).$$

Presupunem că $ab+bc+ca = 3(1-t^2)$, cu $t \geq 0$. Avem:
$S_2 = 3(1+2t^2)$, $S_3 = 3(9t^2+p)$ şi $S_4 = 3(6t^4+24t^2-3+4p)$, unde $p = abc$.
În urma calculelor, obţinem

$$[(a-b)(a-c)(b-c)]^2 = 27[4t^6 - 9t^4 + 6t^2 - 1 + 2p(1-3t^2) - p^2].$$

De aici
$$3[4t^6 - 9t^4 + 6t^2 - 1 + 2p(1 - 3t^2) - p^2] \le M^2(1 + 2t^2)^4, \ \forall\, t \ge 0$$
şi $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a + b + c = 3$ şi $ab + bc + ca = 3(1 - t^2)$.

În continuare vom maximiza expresia $2p(1 - 3t^2) - p^2$. Din Teorema 1,
$$(1 + t)^2(1 - 2t) \le p \le (1 - t)^2(1 + 2t),$$
iar
$$(1 + t)^2(1 - 2t) \le 1 - 3t^2 \le (1 - t)^2(1 + 2t), \ \forall\, t \ge 0,$$
deci valoarea maximă a expresiei $2p(1 - 3t^2) - p^2$ este egală cu $(1 - 3t^2)^2$ şi se realizează pentru $p = 1 - 3t^2$.

Fie polinomul $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3(1 - t^2)x - (1 - 3t^2)$. Observăm uşor că 1 este rădăcină a lui P şi de aici deducem imediat că celelalte două rădăcini ale lui P sunt $1 \pm \sqrt{3}\, t$. În concluzie,
$$3[4t^6 - 9t^4 + 6t^2 - 1 + 2p(1 - 3t^2) - p^2] \le 3[4t^6 - (1 - 3t^2)^2 + (1 - 3t^2)^2] = 12t^6.$$
Ultimul pas în aflarea lui M este maximizarea funcţiei $h(t) = \dfrac{12t^6}{(1 + 2t^2)^4}$ pe intervalul $[0, \infty)$.

Cum $h'(t) = \dfrac{24t^5(3 - 2t^2)}{(1 + 2t^2)^5}$, deducem că $\max h = h\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = \dfrac{3^4}{2^9}$.

Evident, $M^2 \ge \dfrac{3^4}{2^9} \Rightarrow M \ge \dfrac{9\sqrt{2}}{32}$.

Din considerentele de mai sus, deducem că pentru $a = 1 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $b = 1$, $c = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ şi $M = \dfrac{9\sqrt{2}}{32}$, avem $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) = M(a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Deci $M = \dfrac{9\sqrt{2}}{32}$.

În aplicaţia care urmează, vom folosi Teorema 1 în demonstrarea unei inegalităţi în 4 variabile.

Aplicaţia 2 (Leonard Giugiuc, Crux Mathematicorum).

Fie a, b, c şi d numere reale astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Să se arate că
$$bcd + acd + abd + abc + 4 \ge a + b + c + d.$$

Soluţie (Leonard Giugiuc).

Funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ este convexă, deci din inegalitatea lui Jensen avem $\left(\dfrac{a + b + c + d}{4}\right)^2 \le \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$ $\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Deci în cazul

nostru, $-4 \leq a+b+c+d \leq 4$.
Pe de altă parte,

$$3(a+b+c+d)^2 \geq 8(ab+bc+cd+da+ac+bd) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ab+bc+cd+da+ac+bd \leq \frac{3(a+b+c+d)^2}{8}.$$

Deci dacă notăm $a+b+c+d=4s$, atunci $-1 \leq s \leq 1$ şi

$$ab+bc+cd+da+ac+bd \leq 6s^2 \Rightarrow \exists\, t \geq 0,$$

astfel încât $ab+bc+cd+da+ac+bd = 6(s^2-t^2)$.
Vom nota $bcd+acd+abd+abc = 4q$ şi $abcd = p$. În virtutea noilor notaţii, avem de arătat că $q+1 \geq s$. Deci în continuare vom minimiza q în funcţie de s şi t fixate.

Considerăm polinomul $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Cum f are toate rădăcinile reale, în virtutea teoremei lui Rolle f' are rădăcinile reale. De asemenea,

$$f(x) = x^4 - 4sx^3 + 6(s^2-t^2)x^2 - 4qx + p \Rightarrow$$
$$f'(x) = 4[x^3 - 3sx^2 + 3(s^2-t^2)x - q].$$

În virtutea Teoremei 1, $q \geq (s+t)^2(s-2t) = -2t^3 - 3st^2 + s^3$.
De asemenea, să observăm că $q = (s+t)^2(s-2t)$ dacă şi numai dacă a, b, c şi d sunt permutări ale lui $(s+t, s+t, s+t, s-3t)$.

Dar $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4 \Rightarrow 16s^2 - 12(s^2-t^2) = 4 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{1-s^2}{3}}$. Deci este suficient să arăt că

$$-2\left(\frac{1-s^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot \frac{1-s^2}{3} s + s^3 + 1 - s \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$-2\left(\frac{1-s^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - 2s + 2s^3 + 1 \geq 0,\ \forall\, s \in [-1,1].$$

În sfârşit, considerăm funcţia

$$\varphi: [-1,1] \to \mathbb{R},\ \varphi(s) = -2\left(\frac{1-s^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - 2s + 2s^3 + 1.$$

Vom căuta punctele critice ale acestei funcţii.

$$\varphi'(s) = \left(s \cdot \sqrt{\frac{1-s^2}{3}} - 1 + 3s^2\right);\ \varphi'(s) = 0 \Leftrightarrow s \cdot \sqrt{\frac{1-s^2}{3}} = 1 - 3s^2.$$

Să observăm că $s^2 \le \frac{1}{3}$ dacă $1 \ge s \ge 0$ şi $s^2 \ge \frac{1}{3}$, dacă $-1 \le s \le 0$.

Ridicăm la pătrat şi avem $28s^4 - 19s^2 + 3 = 0 \Rightarrow s^2 \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{7}\right\}$. Dar

$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{3}{7} < 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$ şi $s = -\sqrt{\frac{3}{7}}$ sunt punctele critice ale funcţiei.

Din $\varphi'(-1) = 4 > 0$, $\varphi'(0) = -2 < 0$ şi $\varphi'(1) = 4 > 0$ deducem că

$$\min \varphi \in \left\{\varphi(-1), \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Dar $\varphi(-1) = 1$ şi $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \min \varphi = 0$. Demonstraţia este încheiată.

Observaţie. Dacă $s = \frac{1}{2}$, atunci $t = \frac{1}{2}$. Deci egalitatea are loc în permutările lui $(1, 1, 1, -1)$.

În încheiere, vom propune cititorului spre rezolvare două aplicaţii.

Aplicaţia 3 (Leonard Giugiuc).

Fie a, b, c, d şi e numere reale astfel încât

$$a + b + c + d + e = 5 \text{ şi } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = \frac{25}{4}.$$

Să se determine valorile extreme ale expresiei $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$.

Aplicaţia 4 (Michael Rozenberg (Israel) şi Leonard Giugiuc).

Fie n un număr natural cu $n \ge 3$ şi fie numerele reale a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Demonstraţi că

$$\left(\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j\right)^2 \ge \frac{3(n-1)}{2(n-2)} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \left(\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j a_k\right).$$

Profesor, C.N. "Traian", Drobeta Turnu Severin
Profesoară, Liceul Tehnologic Halinga
Profesoară, Şcoala Centrală, Bucureşti

O concurenţă remarcabilă în plan

Dana Heuberger

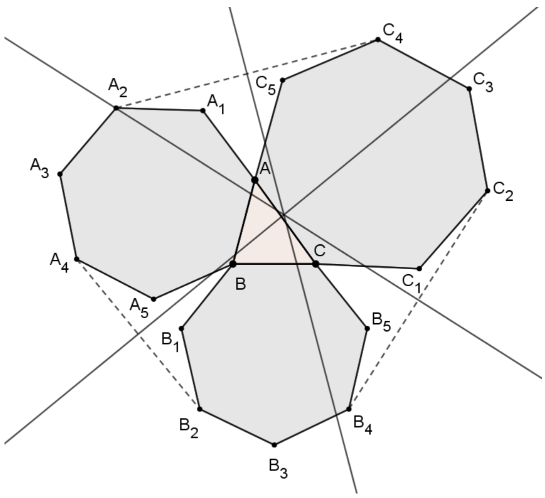
Abstract. In this paper we will see some interesting configurations that lead to concurrent lines.
Keywords: regular polygon, perpendicular bisector.

În Gazeta Matematică [2] se află următorul rezultat:

Problema 1. *Se consideră un triunghi oarecare ABC. În exteriorul acestuia se construiesc hexagoanele regulate $ABSC_1C_2M$, $BCQA_1A_2R$, $CANB_1B_2P$. Atunci, mediatoarele segmentelor MN, PQ şi SR sunt concurente.*

Iată o generalizare puternică a acestei probleme:

Propoziţia 1. *Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. În exteriorul triunghiului oarecare ABC se construiesc poligoanele regulate $AA_1A_2\ldots A_{n-2}B$, $BB_1B_2\ldots B_{n-2}C$ şi $CC_1C_2\ldots C_{n-2}A$. Atunci, pentru orice $k = \overline{1, n-2}$, mediatoarele segmentelor $[A_kC_{n-k-1}]$, $[B_kA_{n-k-1}]$ şi $[C_kB_{n-k-1}]$ sunt concurente.*



Soluţie. Considerăm că triunghiul ABC este orientat în sens trigonometric. Fie a, b, c afixele punctelor A, B, C. Pentru orice $k = \overline{1, n-2}$, notăm cu a_k, b_k, c_k afixele punctelor A_k, B_k, C_k.

Ca să fie mai uşor de urmărit desenul, am reprezentat situaţia unor heptagoane regulate, însă demonstraţia o vom face pe cazul general.

Fie $\varepsilon = \cos \dfrac{(n-2)\,\pi}{n} + i \cdot \sin \dfrac{(n-2)\,\pi}{n}$. Avem $\varepsilon^{2n} = 1$.

$$\begin{aligned}
&a_1 - a = \overline{\varepsilon}\,(b-a)\\
&a_2 - a_1 = \overline{\varepsilon}\,(a - a_1) = -\overline{\varepsilon}^2\,(b-a)\\
&a_3 - a_2 = \overline{\varepsilon}\,(a_1 - a_2) = \overline{\varepsilon}^3\,(b-a)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_k - a_{k-1} = (-1)^{k-1} \cdot \overline{\varepsilon}^k\,(b-a)
\end{aligned}$$

Adunând egalităţile precedente, obţinem:

$$a_k - a = (b-a)\,\overline{\varepsilon}\left(1 - \overline{\varepsilon} + \overline{\varepsilon}^2 - \ldots + (-1)^{k-1}\,\overline{\varepsilon}^{\,k-1}\right) = (b-a)\,\alpha_k \qquad (1)$$

unde $\alpha_k = \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{1 - \left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^k}{1 + \dfrac{1}{\varepsilon}} = \dfrac{\varepsilon^k + (-1)^{k+1}}{\varepsilon^k\,(\varepsilon+1)}$. Apoi,

$$\begin{aligned}
&c_{n-2} - a = \varepsilon\,(c-a)\\
&c_{n-3} - c_{n-2} = \varepsilon\,(a - c_{n-2}) = -\varepsilon^2\,(c-a)\\
&c_{n-4} - c_{n-3} = \varepsilon\,(c_{n-2} - c_{n-3}) = \varepsilon^3\,(c-a)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_{n-k-1} - c_{n-k} = (-1)^{k+1} \cdot \varepsilon^k\,(c-a)
\end{aligned}$$

Adunând egalităţile precedente, obţinem:

$$c_{n-k-1} - a = (c-a)\,\varepsilon\left(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \ldots + (-1)^{k+1}\,\varepsilon^{\,k-1}\right) = (c-a)\,\beta_k \qquad (2)$$

unde $\beta_k = \dfrac{\varepsilon + (-\varepsilon)^{k+1}}{1+\varepsilon}$.

La fel se deduc relaţiile analoage egalităţilor (1) şi (2).

Punctul $X(z)$ se afă pe mediatoarea lui $[A_k C_{n-k-1}]$ dacă şi numai dacă $|z - a_k| = |z - c_{n-k-1}| \;\Leftrightarrow\; (z - a_k)\,(\overline{z} - \overline{a_k}) = (z - c_{n-k-1})\,(\overline{z} - \overline{c_{n-k-1}}) \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; (\overline{c_{n-k-1}} - \overline{a_k}) \cdot z + (c_{n-k-1} - a_k) \cdot \overline{z} + |a_k|^2 - |c_{n-k-1}|^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left((\overline{c} - \overline{a})\,\overline{\beta_k} - \left(\overline{b} - \overline{a}\right)\overline{\alpha_k}\right) \cdot z + ((c-a)\,\beta_k - (b-a)\,\alpha_k) \cdot \overline{z} = |c_{n-k-1}|^2 - |a_k|^2. \qquad (3)$$

Punctul $X(z)$ se află pe mediatoarea lui $[B_k A_{n-k-1}]$ dacă şi numai dacă

$$\left(\overline{a_{n-k-1}} - \overline{b_k}\right) \cdot z + (a_{n-k-1} - b_k) \cdot \overline{z} + |b_k|^2 - |a_{n-k-1}|^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(\left(\overline{a} - \overline{b}\right)\overline{\beta_k} - \left(\overline{c} - \overline{b}\right)\overline{\alpha_k}\right) \cdot z + ((a-b)\,\beta_k - (c-b)\,\alpha_k) \cdot \overline{z} = |a_{n-k-1}|^2 - |b_k|^2. \qquad (4)$$

Punctul $X(z)$ se afă pe mediatoarea lui $[C_k B_{n-k-1}]$ dacă şi numai dacă

$$\left(\overline{b_{n-k-1}} - \overline{c_k}\right) \cdot z + \left(b_{n-k-1} - c_k\right) \cdot \overline{z} + |c_k|^2 - |b_{n-k-1}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\left(\overline{b} - \overline{c}\right) \overline{\beta_k} - \left(\overline{a} - \overline{c}\right) \overline{\alpha_k}\right) \cdot z + \left(\left(b - c\right) \beta_k - \left(a - c\right) \alpha_k\right) \cdot \overline{z} = |b_{n-k-1}|^2 - |c_k|^2. \quad (5)$$

Adunând egalităţile (3) şi (4) deducem că $X(z)$ se află la intersecţia mediatoarelor segmentelor $[A_k C_{n-k-1}]$ şi $[B_k A_{n-k-1}]$ dacă şi numai dacă

$$\left(\left(\overline{c} - \overline{b}\right) \overline{\beta_k} - \left(\overline{c} - \overline{a}\right) \overline{\alpha_k}\right) \cdot z + \left(\left(c - b\right) \beta_k - \left(c - a\right) \alpha_k\right) \cdot \overline{z}$$
$$= |a_{n-k-1}|^2 + |c_{n-k-1}|^2 - |a_k|^2 - |b_k|^2. \quad (6)$$

Din (5) şi (6) deducem că mediatoarele celor trei segmente sunt concurente dacă şi numai dacă:

$$|a_k|^2 + |b_k|^2 + |c_k|^2 = |a_{n-k-1}|^2 + |b_{n-k-1}|^2 + |c_{n-k-1}|^2. \quad (7)$$

Avem:

$$\sum |a_k|^2 = \sum \left(a + \left(b - a\right) \alpha_k\right) \left(\overline{a} + \left(\overline{b} - \overline{a}\right) \overline{\alpha_k}\right)$$
$$= \sum |a|^2 + \alpha_k \sum \left(b - a\right) \cdot \overline{a} + \overline{\alpha_k} \sum \left(\overline{b} - \overline{a}\right) \cdot a + AB^2 \sum |\alpha_k|^2$$

$$\sum |a_{n-k-1}|^2 = \sum \left(b + \left(a - b\right) \beta_k\right) \left(\overline{b} + \left(\overline{a} - \overline{b}\right) \overline{\beta_k}\right)$$
$$= \sum |b|^2 + \beta_k \sum \left(a - b\right) \cdot \overline{b} + \overline{\beta_k} \sum \left(\overline{a} - \overline{b}\right) \cdot b + AB^2 \sum |\beta_k|^2$$

Ţinând cont de faptul că $\beta_k = \overline{\alpha_k}$, obţinem că (7) este adevărată, aşadar cele trei mediatoare sunt concurente.

Bibliografie

[1] Muşuroia, N. (coord.), Boroica, Gh., Pop V., Heuberger, D. (coord.) şi Bojor, F., *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, Clasa a X-a*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2013, 146–178

[2] Braica, P. şi Mâinea, M., *Problema 27299*, Gazeta Matematică seria B, 11, 2016, 544

Profesoară, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Comentarii asupra unei probleme de algebră liniară dată la O.N.M. (Problema 2, clasa XI-a, O.N.M.– 2017)

Vasile Pop

Abstract. This article provides a few commentaries and expands on two of the math national olympiad problems.

1. Enunţul problemei

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *matrice simetrice. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\det\left(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_m^2\right) = 0.$

b) $\det(A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + \cdots A_m \cdot B_m) = 0$ *pentru orice matrice* $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.[1]

2. Istoric

• La O.N.M. 1995, problema 2 clasa a XI-a, propusă de Marina Cavachi, are următorul enunţ:

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$. *Să se arate că:*

$$\det\left(\sum_{k=1}^{m} A_k^t \cdot A_k\right) \geq 0.$$

• La O.N.M. 1998, problema 1 clasa a XI-a, propusă de Vasile Pop, are următorul enunţ:

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_2(\mathbb{R})$, astfel ca $A_0 \neq \alpha I_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $A_0 \cdot A_k = A_k \cdot A_0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Să se arate că:*

a) $\det\left(\sum\limits_{k=1}^{m} A_k^2\right) \geq 0.$

b) Dacă $\det\left(\sum\limits_{k=1}^{m} A_k^2\right) = 0$ *şi* $A_2 \neq \alpha A_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *atunci* $\sum\limits_{k=1}^{m} A_k^2 = 0.$

3. Enunţ generalizat

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$ *astfel ca* $\det\left(\sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot A_k^t\right) = 0$. *Să se arate că* $\det\left(\sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot B_k\right) = 0$ *pentru orice matrice* $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

[1] Vasile Pop, Dan Moldovan

4. Soluţii

Soluţia 1. Notând $P = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot A_k^t$ din condiţia $\det(P) = 0$ 0 rezultă că sistemul omogen de ecuaţii liniare $P \cdot X = 0$ are soluţia nebanală $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Avem:

$$P \cdot X = 0 \Rightarrow X^t \cdot P \cdot X = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} X^t \cdot A_k \cdot A_k^t \cdot X = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} Y_k^t \cdot Y_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} y_{ik}^2 = 0 \Leftrightarrow Y_k = 0, k = 1, 2, \ldots, m$$

unde $Y_k = A_k^t \cdot X$. Rezultă că pentru orice $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem $B_k^t \cdot A_k^t \cdot X = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$ deci $\sum\limits_{k=1}^{m} B_k^t \cdot A_k^t \cdot X = 0$, cu $X \neq 0$ astfel ca $\det\left(\sum\limits_{k=1}^{m} B_k^t \cdot A_k^t\right) = 0$ şi cum $\det(M) = \det(M^t)$ rezultă $\det\left(\sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot B_k\right) = 0$.

Observaţia 1. Din implicaţia $P \cdot X = 0 \Rightarrow A_k^t \cdot X = 0$. $k = 1, 2, \ldots, m$ obţinem următoarea interpretarea:

Dacă V este un spaţiu euclidian (real sau complex) de dimensiune finită şi $T_1, T_2, \ldots, T_m : V \to V$ sunt aplicaţii liniare cu adjunctele $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_m^*$ atunci avem:

$$\ker\left(\sum_{k=1}^{m} T_k \circ T_k^*\right) = \bigcap_{k=1}^{m} \ker(T_k^*) \left(= \bigcap_{k=1}^{m} \ker(T_k \circ T_k^*)\right)$$

Soluţia 2. (după soluţia elevului Ciocan Antonie, L.I.I. Bucureşti). Considerăm matricea cu blocuri

$$M = [A_1 | A_2 | \ldots | A_m] \in \mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{R})$$

şi avem $P = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot A_k^t = M \cdot M^t$. Din formula Cauchy-Binet avem:

$$0 = \det(P) = \sum_{1 \le i_1, i_2 < \cdots < i_n \le nm} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \Delta^t_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{1 \le i_1, i_2 < \cdots < i_n \le nm} (\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n})^2$$

deci toţi minorii $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ sunt egali cu zero (în particular din condiţia $\det\left(\sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot A_k^t\right) = 0$ rezultă $\det(A_k) = 0, k = 1, 2, \ldots, m$). Astfel rangul matricei M este mai mic decât n. Pentru orice matrice $B \in \mathcal{M}_{nm,n}(\mathbb{R})$ cu blocurile

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

avem $M \cdot B = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot B_k$ şi din

$$\operatorname{rang}(M \cdot B) \leq \operatorname{rang}(M) \leq n-1$$

rezultă

$$\det(M \cdot B) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\sum_{k=1}^{m} A_k \cdot A_k^t\right) = 0.$$

Ca la soluţia 2, considerăm matricea $M = [A_1|A_2|\ldots|A_m] \in \mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{R})$ şi notăm cu $L_1, L_2, \ldots, L_n$ liniile sale. Elementele matricei $P = M \cdot M^t = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot A_k^t$ sunt $P = [p_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ unde $p_{ij} = \langle L_i, L_j \rangle$ (produsul scalar canonic în $\mathbb{R}^n$ al liniilor L_i, L_j. Astfel că matricea P este matrice Gram a vectorilor $L_1, L_2, \ldots, L_n$, adică $P = G(L_1, L_2, \ldots, L_n)$. Un criteriu pentru liniar dependenţa vectorilor $L_1, L_2, \ldots, L_n$ este $G(L_1, L_2, \ldots, L_n) = 0$. (în general orice determinant Gram este nenegativ). Astfel că liniile matricei M sunt liniar dependente (putem continua ca la soluţia 2 cu condiţia $\operatorname{rang}(M) \leq n-1$). Din liniar dependenţa liniilor $L_1, L_2, \ldots, L_n$ rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nu toţi nuli astfel ca $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k L_k = 0$. Pentru orice matrice blocuri

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

cu coloanele $B = [C_1|C_2|\cdots|C_n]$ avem: $\sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot B_k = M \cdot B = Q = [q_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ şi $q_{ij} = \langle L_i, Q_j \rangle, i, j = \overline{1,n}$. Avem:

$$Q^t = \begin{bmatrix} \langle L_1, C_1 \rangle & \langle L_2, C_1 \rangle & \cdots & \langle L_n, C_1 \rangle \\ \langle L_1, C_2 \rangle & \langle L_2, C_2 \rangle & \cdots & \langle L_n, C_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle L_1, C_n \rangle & \langle L_2, C_n \rangle & \cdots & \langle L_n, C_n \rangle \end{bmatrix}$$

şi

$$Q^t \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots \alpha_n L_n, C_1 \rangle \\ \langle \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots \alpha_n L_n, C_2 \rangle \\ \cdots \\ \langle \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots \alpha_n L_n, C_n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

şi cum $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, rezultă $\det(Q^t) = \det(Q) = 0$.

Soluţia 3. Ca la soluţia 2, considerăm matricea

$M = [A_1|A_2|\dots|A_m] \in \mathcal{M}_{nm,n}(\mathbb{R})$ şi notăm cu $L_1, L_2, \dots, L_n$ liniile sale. Elementele matricei $P = M \cdot M^t = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot A_k^t$ sunt $P = [p_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $p_{ij} = \langle L_i, L_j \rangle$ (produsul scalar canonic în $\mathbb{R}^n$ al liniilor L_i şi L_j). Astfel că matricea P este matrice Gram a vectorilor $L_1, L_2, \dots, L_n$, adică $P = G(L_1, L_2, \dots, L_n)$. Un criteriu pentru liniar dependenţa vectorilor $L_1, L_2, \dots, L_n$ este

$G(L_1, L_2, \dots, L_n) = 0$ (în general orice determinant Gram este nenegativ). Astfel că liniile matricei M sunt liniar dependente (putem continua ca la soluţia 2 cu condiţia $rang\,(M) \leq n-1$). Din liniar dependenţa liniilor $L_1, L_2, \dots, L_n$ rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ nu toţi nuli, astfel ca $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k L_k = 0$. Pentru orice matrice de blocuri $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{nm,n}(\mathbb{R})$ cu coloanele $B = [C_1|C_2|\dots|C_m]$, avem $\sum\limits_{k=1}^{m} A_k \cdot B_k = M \cdot B = Q = [q_{ij}]_{i,j} = \overline{1,n}$ şi $q_{ij} = \langle L_i, Q_j \rangle$, $i,j = \overline{1,n}$. Avem

$$Q^t = \begin{bmatrix} \langle L_1, C_1 \rangle & \langle L_2, C_1 \rangle & \dots & \langle L_n, C_1 \rangle \\ \langle L_1, C_2 \rangle & \langle L_2, C_2 \rangle & & \langle L_n, C_2 \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle L_1, C_n \rangle & \langle L_1, C_n \rangle & \dots & \langle L_1, C_n \rangle \end{bmatrix} \quad \text{şi}$$

$$Q^t \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_n L_n, C_1 \rangle \\ \langle \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_n L_n, C_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_n L_n, C_n \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{şi cum} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix},$$

rezultă

$$\det(Q^t) = 0 \quad \text{sau} \quad \det(Q) = 0.$$

Bibliografie

[1] R.M.C., 1995, pag. 13
[2] R.M.C., 1998, pag. 6
[3] Supliment G.M. 2017, pag. 11
[4] Pop, V., *Algebră liniară si geometrie analitică*, Ed. Mega, 2012 (pag. 102, Determinanţi Gram)

Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Argument 19

Some algebraic inequalities proved by using a Fermat-Torricelli's geometric configuration

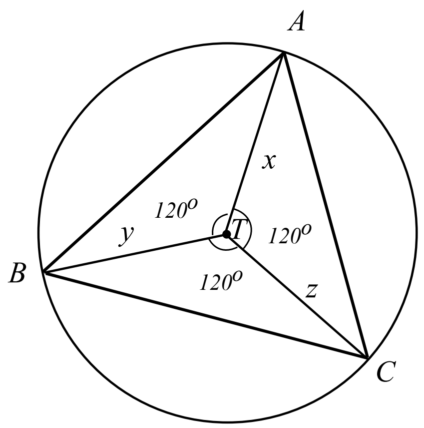
Daniel Sitaru

Abstract. In this paper it's developed a method to construct algebraic inequalities by constructing a triangle configuration. Famous inequalities are redesigned using the properties of Fermat-Torricelli point of this triangle.

1. Main results

If $x, y, z > 0$ then:

1. $\sqrt[3]{\prod(x^2+xy+y^2)} \geq xy+yz+zx$
2. $\dfrac{\sum\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\prod\sqrt{x^2+xy+y^2}} \leq \dfrac{3}{xy+yz+zx}$
3. $\prod(2x^2+x(y+z)-yz) \leq \prod(x^2+xy+y^2)$
4. $3\sum\dfrac{y^2+yz+z^2}{x^2+xz+z^2} \geq \left(2\sum x^2+\sum xy\right)\sum\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}$
5. $(xy+yz+zx)\sum\sqrt{x^2+xy+y^2} \leq 3\sqrt{\prod(x^2+xy+y^2)}$
6. $(x+y+z)^2 \leq \sum\sqrt{(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)}$
7. $\dfrac{3\left(\sum xy\right)^2}{\left(\sum\sqrt{x^2+xy+y^2}\right)^2} \leq \dfrac{\sqrt{\prod(x^2+xy+y^2)}}{\sum\sqrt{x^2+xy+y^2}} \leq \dfrac{\prod(x^2+xy+y^2)}{3\left(\sum xy\right)^2}$



Argument 19

Let T be a point in a plane and A, B, C such that $TA = x$; $TB = y$; $TC = z$ and $\sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC = \sphericalangle CTA = 120^\circ$.
T is the Fermat-Torricelli's point of $\triangle ABC$. By cosine's rule in $\triangle BTC$; $\triangle CTA$; $\triangle ATB$:

$$\begin{aligned} a = BC &= \sqrt{y^2 + yz + z^2} \\ b = CA &= \sqrt{z^2 + zx + x^2} \\ c = AB &= \sqrt{x^2 + xy + y^2} \end{aligned}$$

Area of triangle ABC:

$$\begin{aligned} S = [ABC] &= \frac{1}{2} TB \cdot TC \sin 120^\circ + \frac{1}{2} TC \cdot TA \sin 120^\circ + \frac{1}{2} TA \cdot TC \sin 120^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

Proof 1. By Carlitz's inequality (AMM-1961) in $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^2b^2c^2} &\ge \frac{4}{\sqrt{3}} S \\ \sqrt[3]{\prod (x^2 + xy + y^2)} &\ge \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx) \\ \sqrt[3]{\prod (x^2 + xy + y^2)} &\ge xy + yz + zx \end{aligned}$$

Observation. Inequality (1) it is known as Wu's inequality.

Proof 2. By Mitrinović's inequality in $\triangle ABC$:

$$s \le \frac{3\sqrt{3}}{2} R$$

$$2s \le 3\sqrt{3}R \Leftrightarrow a + b + c \le 3\sqrt{3}\frac{abc}{4S}$$

$$4S(a + b + c) \le 3\sqrt{3}abc$$

$$4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sum xy\right) \sum \sqrt{x^2 + xy + y^2} \le 3\sqrt{3} \prod \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

$$\sqrt{3}\left(\sum xy\right) \sum \sqrt{x^2 + xy + y^2} \le 3\sqrt{3} \prod \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

$$\frac{\sum \sqrt{x^2 + xy + y^2}}{\prod \sqrt{x^2 + xy + y^2}} \le \frac{3}{xy + yz + zx}$$

Proof 3.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{z^2+zx+x^2+x^2+xy+y^2-y^2-yz-z^2}{2\sqrt{(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)}} =$$

$$\cos A = \frac{2x^2+x(y+z)-yz}{2\sqrt{(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)}}$$

It is known that

$$\cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$$

$$\prod \frac{2x^2+x(y+z)-yz}{2\sqrt{(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+yz)}} \leq \frac{1}{8}$$

$$\frac{\prod(2x^2+x(y+z)-yz)}{\prod(x^2+xy+y^2)} \leq 1$$

$$\prod(2x^2+x(y+z)-yz) \leq \prod(x^2+xy+y^2)$$

Proof 4. It's known Walker's inequality in any $\triangle ABC$:

$$3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right) \geq (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$3\sum \frac{y^2+yz+z^2}{x^2+xz+z^2} \geq \sum(x^2+xy+y^2)\sum\frac{1}{x^2+xy+y^2}$$

$$3\sum \frac{y^2+yz+z^2}{x^2+xz+z^2} \geq \left(2\sum x^2+\sum xy\right)\sum\frac{1}{x^2+xy+y^2}$$

Proof 5. It's known Curry's inequality (AMM-1967).
In any triangle ABC:

$$4S\sqrt{3} \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

$$4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)\sqrt{3} \leq \frac{9\prod\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sum\sqrt{x^2+xy+y^2}}$$

$$(xy+yz+zx)\sum\sqrt{x^2+xy+y^2} \leq 3\sqrt[3]{\prod(x^2+xy+y^2)}$$

Proof 6. It's known Hadwiger-Finsler's inequality.
In any triangle ABC:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$2(ab+bc+ca) \geq 4S\sqrt{3}+a^2+b^2+c^2$$

$$2\sum\sqrt{(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)} \geq 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\sum xy+\sum(x^2+xy+y^2)$$
$$2\sum\sqrt{(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)} \geq 3\sum xy+2\sum x^2+\sum xy$$
$$\sum x^2+2\sum xy \leq \sum\sqrt{(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)}$$
$$(x+y+z)^2 \leq \sum\sqrt{(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)}$$

Proof 7. It's known Klamkin's inequality.

In any $\triangle ABC$:

$$4r^2 \leq \frac{abc}{a+b+c} \leq R^2$$
$$4\frac{S^2}{s^2} \leq \frac{abc}{a+b+c} \leq \frac{a^2b^2c^2}{16S^2}$$
$$4\cdot\frac{\frac{3}{16}\left(\sum xy\right)^2}{\frac{1}{4}\left(\sum\sqrt{x^2+xy+y^2}\right)^2} \leq \frac{\prod\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sum\sqrt{x^2+xy+y^2}} \leq \frac{\prod(x^2+xy+y^2)}{16\frac{3}{16}\left(\sum xy\right)^2}$$
$$\frac{3\left(\sum xy\right)^2}{\left(\sum\sqrt{x^2+xy+y^2}\right)^2} \leq \frac{\sqrt{\prod(x^2+xy+y^2)}}{\sum\sqrt{x^2+xy+y^2}} \leq \frac{\prod(x^2+xy+y^2)}{3\left(\sum xy\right)^2}$$

Observation. All inequalities (1-7) become equalities for $x=y=z$.

Bibliografie

[1] Daniel Sitaru, *Math Phenomenon*, Ed. Paralela 45 Publishing House, Piteşti, Romania, 2016

[2] Romanian Mathematical Magazine, www.ssmrmh.ro

Profesor, C.N. Economic "Theodor Costescu" Drobeta Turnu Severin

Argument 19

Tabăra Judeţeană de Excelenţă în Matematică Târgu Lăpuş, Maramureş 1 – 7 septembrie 2017

În perioada 1-7 septembrie 2017 s-a desfăşurat la Târgu Lăpuş, Tabăra Judeţeană de Excelenţă în Matematică.
Au participat elevi de gimnaziu şi liceu, care s-au clasat pe primele locuri la Olimpiada judeţeană de matematică.

Profesorii care au însoţit grupul şi au ţinut lecţii în tabără au fost: Gheorghe Boroica - directorul taberei, Florin Bojor, Nicolae Muşuroia, Dana Heuberger, Cristian Heuberger (C.N. "Gheorghe Şincai"), Vasile Ienuţaş (Şc. gim. "Nicolae Iorga"), Gheorghe Gherasin (Liceul "Regele Ferdinand"), Pop Radu (Sem. Teologic "Sfântul Iosif Mărturisitorul"), Indre Iulian, Gavrilaş Emilia (Lic. Teoretic "Petru Rareş") şi conf. univ. dr. de la Universitatea Tehnică Cluj-Napoca.

Clasa a VI-a

Premiul de excelenţă: *Zainea Jessica*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Pop Adrian

Premiul I: *Tămâian Lidia Alexandra*, Şc.Gim. "Nicolae Iorga", prof. Ienuţaş Vasile

Premiul al II-lea: *Şpan Teodora*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Heuberger Dana

Premiul al III-lea: *Herbil Anastasia*, C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei, prof. Mihu Amalia

Clasa a VII-a

Premiul de excelenţă: *Muntean Tudor*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Bojor Florin, *Costin Oana*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Boroica Gheorghe

Premiul I: *Tuş Traian*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Boroica Gheorghe

Premiul al II-lea: *Şpan Mihai*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Boroica Gheorghe

Premiul al III-lea: *Dumitriu Marian*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Bojor Florin, *Onea Iulian*, C.N. "Vasile Lucaciu", prof. Bretan Andrei

Menţiuni: *Giurgi Bogdan*, C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei, *Oana Cristiana*, L.T. "Bogdan Vodă" Tg. Lăpuş

Clasa a VIII-a

Premiul de excelenţă: *Lazea Darius*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Bojor Meda, *Zlampareţ George*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Muşuroia Nicolae

Premiul I: *Robu Raluca*, C.N. "Vasile Lucaciu", prof. Covaciu Traian

Premiul al II-lea: *Dragoş Andreea*, C.N. "Vasile Lucaciu", prof. Covaciu Traian

Premiul al III-lea: *Bozga Bianca*, Şc.Gim. "Ben Corlaciu", Groşii Ţibleşului, *Iliuţă Filip*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Muşuroia Nicolae

Menţiuni: *Petrenciuc Amelia*, C.N. "Vasile Lucaciu", *Giurgiu Cătălin*, L. Tehnologic "Grigore C. Moisil" Tg. Lăpuş

Clasa a IX-a

Premiul de excelenţă: *Zaharie Oana*, C.N. "Vasile Lucaciu", prof. Gabriela Boroica, *Ciceu Denis*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Gheorghe Boroica

Premiul I: *Talpoş Carina*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Dana Heuberger

Premiul al II-lea: *Giuroiu Tudor*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Boroica Gheorghe

Clasa a X-a

Premiul de excelenţă: *Becsi Paul*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Bojor Florin, *Boroica Adrian*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Bojor Florin, *Andreicuţ Teofil*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Bojor Florin

Premiul I: *Corneştean Iasmina*, C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei, prof. Giurgi Vasile

Premiul al II-lea: *Ilieş Iulia*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Bojor Florin

Clasa a XI-a

Premiul de excelenţă: *Matei Bledea Alexandru*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Muşuroia Nicolae, *Stepan Dacian*, C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei

Premiul I: *Cotârlan Codrin*, C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei, prof. Bedeoan Loredana

Premiul al II-lea: *Mureşan Alexandru*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Muşuroia Nicolae

Clasa a XII-a

Premiul de excelenţă: *Bojor Barbu*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Heuberger Cristian

Premiul I: *Sas Diana Alexandra*, L.T. "Petru Rareş" Tg. Lăpuş

Premiul al II-lea: *Pop Vlad*, C.N. "Gheorghe Şincai", prof. Heuberger Cristian

Clasa a VI-a

1. Determinaţi numerele naturale a, b, c pentru care
$$\frac{2016}{a+b} = \frac{2017}{a+c} = \frac{2018}{b+c}$$
şi
$$(b-a)^2 + 4(c-b)^2 + 9(c-a)^2 = 656.$$

S.G.M. 5/2017

2. Fie a, b, x, y numere naturale nenule astfel încât $\dfrac{a}{x} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{x}{y}$. Să se arate că:
a) $x^3 = a^2 b$.
b) x este divizor al numărului $a \cdot b$.
c) Dacă a, b sunt numere prime, atunci $a = b = x = y$.

3. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \ldots, \sphericalangle A_nOA_{n+1}$ astfel încât
$$m(\sphericalangle A_1OA_2)=1, m(\sphericalangle A_2OA_3)=2, m(\sphericalangle A_3OA_4)=4, \ldots, m(\sphericalangle A_nOA_{n+1})=(2^{n-1}).$$

a) Găsiţi cea mai mare valoare a lui n, astfel încât suma măsurilor celor n unghiuri să fie mai mică decât $360°$.
b) Fie $[OB$ semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\sphericalangle A_1OA_n$, cu n determinat la *a*). Aflaţi $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât B să aparţină interiorului unghiului $\sphericalangle A_kOA_{k+1}$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Vasile Ienuţaş, Şc.gim "Nicolae Iorga"
Prof. Radu Pop, C.N. "Vasile Lucaciu"

Clasa a VII-a

1. Numerele reale a, b, c, d, e au proprietatea că:
$$|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a|.$$
Demonstraţi că $a = b = c = d = e$.

2. Determinaţi numărul $\overline{abcd}$ cu proprietatea $\sqrt{\overline{abcd}} = 8\sqrt{\overline{ab}} + \sqrt{\overline{cd}}$.

G.M. 10/2016

3. Fie $\triangle ABC$ şi N mijlocul lui (AC). Prelungim latura AB cu segmentul $[BM]$ astfel încât $BM = \frac{1}{2} \cdot AB$. Dacă $MN \cap BC = \{P\}$, arătaţi că $4 \cdot CP = 3 \cdot CB$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Vasile Ienuţaş, Şc.gim "Nicolae Iorga"
Prof. Radu Pop, C.N. "Vasile Lucaciu"

Clasa a VIII-a

1. Pe fiecare din feţele unui cub se scrie câte un număr natural nenul. Fiecărui vârf al cubului i se asociază produsul numerelor scrise pe cele trei feţe care conţin vârful respectiv. Suma numerelor asociate celor opt vârfuri ale cubului este 2013. Care sunt valorile posibile ale sumei numerelor scrise pe cele şase feţe ale cubului?

2. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $x^3 - y! = 392$.

3. Fie punctele necoplanare V, A, B, C. Semidreptele $[AM$ şi $[AN$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle VAB$ respectiv $\sphericalangle VAC$, unde $M \in VB$ şi $N \in VC$. Dacă $AB = AC$, să se demonstreze că MN este paralelă cu una dintre liniile mijlocii ale $\triangle ABC$.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Gheorghe Gherasin, Liceul "Regele Ferdinand"

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $30|(a + b + c)$.
a) Să se demonstreze că $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ avem că $30|(x^5 - x)$.
b) Daţi un exemplu de trei numere a, b, c ca în enunţ, astfel încât $a^2+b^2+c^2$ nu este divizibil cu 30.
c) Demonstraţi că $30\big|(a^{4n+1} + b^{4n+1} + c^{4n+1})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\varphi(n)$ numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu n şi relativ prime cu n.
a) Calculaţi $\varphi(10)$ şi $\varphi(140)$.
b) Calculaţi $\varphi(p^l)$, unde p este număr prim iar $l \in \mathbb{N}^*$.
c) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

3. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{x^2}\geq x+y,\ \forall\, x,y>0.$

b) $\dfrac{(a+b)^3}{c^2}+\dfrac{(b+c)^3}{a^2}+\dfrac{(c+a)^3}{b^2}\geq 8(a+b+c),\ \forall\, a,b,c>0.$

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a X-a

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1>0$ şi raţia $r>0$. Fie numerele complexe $z_k=(1+a_ka_{k+1})+r\cdot i$, $k=\overline{1,n}$ şi $z=z_1z_2\ldots z_n$. Să se demonstreze că $Re(z)>0$ şi $Im(z)>0$.

2. Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=6$ şi

$$a_{n+1}=\frac{1}{18}\left(2a_n-1+\sqrt{8a_n+1}\right),\ \forall\, n\geq 1.$$

3. Determinaţi funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care

$$g(f(x+y))=f(x)+(2x+y)g(y),\ \forall\, x,y\in\mathbb{R}.$$

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai"
Conf.univ.dr. Vasile Pop, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Clasa a XI-a

1. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietăţile:
$\det(A-3I_2)=4$ şi $\det(A+2I_2)=9$. Să se calculeze $(A-I_2)^{2017}$.

2. Pentru $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ notăm cu $S(X)$ suma matricei X.
Fie $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

a) Să se demonstreze că $S(X\cdot A)=2S(X),\ \forall\, X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S(A^n)+S(A^{n+1})}{1+S(A^{n+2})}$.

3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $x_1>0$ şi $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4x_n+1}$, $\forall\, n\geq 1$. Să se demonstreze că şirul $(nx_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XII-a

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care verifică relaţia $f^3(x)+e^{f(x)}=x+\sin^2 x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f admite primitive.

2. Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admit primitive $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi pentru care $f(x)+F(x)=|x|$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

3. Fie $M=\mathbb{Z}_7$, mulţimea claselor de resturi modulo 7.

a) Câte legi de compoziţie $*: M\times M\to M$ există?

b) Determinaţi numărul funcţiilor bijective $f:M\to M$, ştiind că

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall\, x,y\in M.$$

c) Să se verifice dacă numărul $a=1+3^{4^n-1}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, este divizibil cu 7.

Problemele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"
Prof. Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai"

Concursul interjudeţean de matematică ”ARGUMENT” Baia Mare, 11–12 noiembrie 2016

Organizatori: Catedra de matematică a Colegiului Naţional ”Gheorghe Şincai”, în parteneriat cu Inspectoratul Şcolar Judeţean Maramureş şi Asociaţia ”Argument”.

Locul de defăşurare: Colegiul Naţional ”Gheorghe Şincai”.

Perioada: 11-12 noiembrie 2016.

Preşedintele concursului: conf. univ. Vasile Pop de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca.

Participanţi: loturile colegiilor naţionale: ”Andrei Mureşanu” Dej, ”Mihai Eminescu” Satu Mare, ”Alexandru Papiu Ilarian” Tg. Mureş, ”Unirea” Tg. Mureş, ”Silvania” Zalău, ”Dragoş Vodă” Sighetu Marmaţiei, ”Vasile Lucaciu” Baia Mare, ”Gheorghe Şincai” Baia Mare, Liceul Teologic Baptist ”Emanuel” Oradea, precum şi elevi de gimnaziu de la şcolile reprezentative din oraş.

Partenerii concursului: Consiliul Judeţean Maramureş, Inspectoratul Şcolar Judeţean Maramureş, Asociaţia ”Argument” C.N. ”Gheorghe Şincai”.

Clasa a V-a

1. Numărul de numere naturale de două cifre, care au suma cifrelor egală cu 9, este:
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10

2. Numărul $(4\cdot 8)^{15} : 8^{20} : 1024 + (4\cdot 3)^2 : 4$ este egal cu
a) 56 b) 68 c) 46 d) 41

3. Diferenţa dintre cel mai mare număr par de patru cifre şi cel mai mare număr impar de trei cifre este egală cu:
a) 8999 b) 9000 c) 8889 d) 9889

4. Suma cifrelor numărului $10^{200} + 9\cdot 10^{198} - 1$ este egală cu:
a) 1800 b) 1791 c) 10 d) 1782

5. Suma numerelor naturale pare, care împărţite la 17 dau restul egal cu dublul câtului, este egală cu:
a) 684 b) 304 c) 360 d) 380

6. Numărul de numere pare de trei cifre, având exact două cifre identice, este egal cu:

a) 118 b) 116 c) 135 d) 120

7. Cea mai mare valoare posibilă a sumei a două numere naturale cu produsul egal cu 24 este:

a) 11 b) 14 c) 25 d) 16

8. Numărul de zerouri în care se termină produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 29 \cdot 30$ este egal cu:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

9. a) Să se scrie numărul natural $A = 8(3^3 + 3^5 + 3^7 + 3^9) + 27$ ca putere cu baza 3.

b) Să se afle ultimele patru cifre ale numărului $B = 4^{1011} - 2^{2015} - 4^{1008}$.

10. Pe o tablă au fost scrise numerele $1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12$ şi 16. Doi copii au şters fiecare câte patru numere, astfel încât suma numerelor şterse de unul dintre copii este de trei ori mai mare decât suma numerelor şterse de celălalt. Ce număr a rămas scris pe tablă?

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Meda Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a VI-a

1. Dacă $a \cdot b = 720$ iar $[a, b] = 60$, atunci $a + b$ este:

a) 64 b) 42 c) 120 d) 72

2. Cel mai mic număr natural, care împărţit pe rând la $6, 7$ şi 8, dă resturile $5, 6$ respectiv 7 este:

a) 187 b) 167 c) 567 d) 100

3. Soluţia ecuaţiei $5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 + \cdots + 5 \cdot 6^{2016} = x^{2017} - 1$ este:

a) 6 b) 4 c) 5 d) 7

4. Dacă a şi b sunt cifre nenule şi $\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{2016} \cdot 5 = \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{2016} \cdot 4$, atunci $4a + 5b$ este:

a) 54 b) 37 c) 41 d) 40

5. Dacă a, b, c sunt cele mai mici numere naturale consecutive, două câte două prime între ele, cu suma divizibilă cu 15, atunci $a \cdot b \cdot c$ este:

a) 4450 b) 990 c) 150 d) 30

6. Dacă $AB = 100$ cm, $[CD] \subset [AB]$ astfel încât segmentele $[AB]$ şi $[CD]$ au acelaşi mijloc, iar $AC = 80$ cm, atunci lungimea segmentului $[CD]$ este:
a) 20 cm b) 80 cm c) 60 cm d) 40 cm

7. Dacă $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots 59\}$ şi $a^\circ b' c'' + b^\circ a' c''$ este un număr natural în grade, atunci $a + b + c$ este:
a) 80 b) 89 c) 98 d) 59

8. În jurul punctului O se consideră, în această ordine, semidreptele $[OA_1, [OA_2, \dots, [OA_n, \dots, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m(\measuredangle(A_1OA_2)) = 2^\circ$, $m(\measuredangle(A_2OA_3)) = 2 \cdot m(\measuredangle(A_1OA_2))$, $m(\measuredangle(A_2OA_4)) = 2 \cdot m(\measuredangle(A_2OA_3)), \dots$ şi aşa mai departe. Mulţimea valorilor lui $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care $[OA_n = [OA_1$ este:
a) $\emptyset$ b) $\{6, 7\}$ c) $\{7\}$ d) $\{6\}$

9. Se consideră fracţia $A_n = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) + 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \cdot (2n+2) + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Arătaţi că A_3 este reductibilă.
b) Arătaţi că A_{1007} este ireductibilă.
c) Arătaţi că $\dfrac{1}{2016} < A_{1007} < \dfrac{1}{2014}$.

10. Un triunghi echilateral de latură 1 poate fi acoperit cu 5 triunghiuri echilaterale de latură a.
a) Arătaţi că $a \geq \dfrac{1}{2}$.
b) Arătaţi că acelaşi triunghi poate fi acoperit cu 4 triunghiuri echilaterale de latură a.

Prof. Vasile Pop

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Crina Petruţiu, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Nicolae Muşuroia, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a VII-a

1. Dacă media aritmetică a trei numere naturale este egală cu 2, atunci cea mai mică valoare posibilă a produsului lor este:
a) 1 b) 8 c) 4 d) 0

2. Dacă $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{y}{y+2}=\dfrac{z}{z+3}$ şi $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=36$, atunci numărul $x+y+z$ este egal cu:

a) $\dfrac{2}{3}$ b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) 22

3. Suma numerelor $x\in\{1,2,\ldots,8\}$, pentru care

$\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{\overline{0,(x)}}+\dfrac{1}{\overline{0,0(x)}}-\dfrac{1}{\overline{0,00(x)}}$ e întreg, are valoarea

a) 15 b) 24 c) 18 d) 7

4. Dacă $x\in\mathbb{Z}^*$ este o soluţie a ecuaţiei $|x|-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$, atunci valoarea lui x^2-x este:

a) 2 b) 0 c) nu există x d) 6

5. Dacă pentru cifrele a,b,c, cu $a\geq 2$ şi pentru $n\in\mathbb{N}^*$ avem

$$\overline{abc}+\frac{\overline{abc}}{3}+\frac{\overline{abc}}{9}+\cdots+\frac{\overline{abc}}{3^{n-1}}=3^{n+1}-3,$$

atunci perechea $(\overline{abc},n)$ este:

a) $(162,4)$ b) $(729,5)$ c) $(486,6)$ d) $(486,5)$

6. Fie triunghiul ABC, M mijlocul lui (BC), N mijlocul lui (AM) şi $P\in BC$ cu $NP\|AB$. Dacă $m(\widehat{MAC})=m(\widehat{ACM})=30^\circ$ şi $BC=10$ cm, atunci perimetrul patrulaterului $ANPB$ este:

a) 125 mm b) 25 cm c) 15 cm d) 12 cm

7. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $AD=BC=CD=10$ cm şi $AB=20$ cm. Fie M mijlocul lui (AB). Perimetrul triunghiului CDM are valoarea:

a) 24 cm b) 3 dm c) 26 cm d) 28 cm

8. Dacă $ABCD$ şi $CEFB$ sunt două paralelograme congruente distincte, atunci:

a) $AE=DF$ b) $AE>DF$ c) $AE<DF$ d) $AE<AF$

9. *a*) Demonstraţi că, dacă numerele $p,q,x\in\mathbb{Q}_+$ sunt astfel încât $p\cdot q=x^2$, atunci $p+q\geq 2x$.

b) Dacă a,b,c,d sunt numere naturale, astfel ca $1\leq a<b<c<d\leq 100$, determinaţi valorile minime ale expresiilor $E=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}$ şi $F=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$.

Prof. Vasile Pop

10. Fie paralelogramul $ABCD$. Fie S punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{D}$, T punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$, $\{M\} = DS \cap AB$, $\{N\} = AS \cap CD$ şi $\{P\} = CS \cap BN$.

a) Demonstraţi că $ST \| AB$.

b) Dacă $AB = 2ST$, demonstraţi că $AT = 2MP$.

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Dana Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Cristian Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a VIII-a

1. Numărul $n \in \mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea

$$\frac{1}{1 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 17} + \cdots + \frac{1}{(8n-7)\cdot(8n+1)} = \frac{100}{801}$$

este:

a) 10 b) 800 c) 100 d) 99

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ verifică ecuaţia

$$\sqrt{16x^2 + 64x + 64} - |4 + 2x| + \sqrt{y^2 - 2y + 1} = 0,$$

atunci $x + y$ este:

a) 1 b) 2 sau -2 c) -1 d) 3

3. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $a^2 + b^2 + c^2 \leq 14$ iar $a + 2b + 3c = 14$, atunci $a + b + c$ este:

a) 6 b) 2 c) 14 d) nu se poate determina

4. Numerele reale a, b, c, d verifică egalitatea $\frac{1}{a+1} + \frac{2}{b+2} + \frac{3}{c+3} + \frac{4}{d+4} = 4$. Valoarea expresiei $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+3} + \frac{d}{d+4}$ este:

a) 1 b) 4 c) 2 d) 0

5. Dacă $x \in [-2, 3]$ şi $5y = x + 2$, atunci

$$E = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10}$$

este:

a) $\sqrt{26}$ b) 5 c) $\sqrt{24}$ d) 1

6. În tetraedrul $ABCD$ triunghiul BCD este echilateral şi $BC = 8$ cm. Fie $[BM$ şi $[BN$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$ respectiv $\sphericalangle ABD$, $M \in (AC)$ şi $N \in (AD)$. Dacă $AB = 16$ cm atunci triplul lungimii segmentului (MN) este:

a) 12 cm b) 64 cm c) 16 cm d) 8 cm

7. Fie prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm şi $AA' = 6$ cm. Minimul expresiei $AM + MC'$, unde $M \in [BB']$ este:

a) $\left(3\sqrt{2} + \sqrt{34}\right)$ b) $6\sqrt{2}$ cm c) 10 cm d) 14 cm

8. O prismă hexagonală regulată are muchiile egale. Dacă raza cercului înscris în hexagonul bazei este $\sqrt{3}$ cm, atunci aria totală a prismei este:

a) 24 cm b) $12\left(2 + \sqrt{3}\right)$ c) $12\left(1 + 2\sqrt{3}\right)$ cm^2 d) 48 cm^2

9. Să se determine perechile de numere întregi (x, y) care verifică relaţiile

$$x^3 = 58x + 21y, \quad y^3 = 21x + 58y.$$

Prof. Vasile Pop

10. În interiorul unui cub de muchie 12 cm se găsesc 7 puncte distincte.

a) Să se demonstreze că distanţa între două puncte este cel mult 14 cm;

b) Să se arate că, dacă distanţele între oricare două puncte sunt numere naturale, atunci cel puţin două distanţe sunt egale.

Prof. Vasile Pop

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Adrian Pop, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a IX-a

1. Fie a, b, c, d numere întregi. Să se arate că ecuaţia $x^2 + 2ax + b = y^2 + 2cy + d$ are o infinitate de soluţii $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dacă şi numai dacă $a^2 - c^2 = b - d$.

2. Fie a, b numere naturale astfel ca $(a - 1)^2 < b < a^2$ şi considerăm şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = ax_n + \left[x_n\sqrt{b}\right], \; n \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că există $p, q \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_{n+1} = px_n + qx_{n-1}, \; \forall\, n \geq 1.$$

3. *a*) Să se determine unghiul A al triunghiului ABC în care este verificată relaţia:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

b) Fie x, y, z numere pozitive care verifică relaţiile:

$$x^2 + xy + y^2 = 1,\ y^2 + yz + z^2 = 4,\ z^2 + zx + x^2 = 5.$$

Să se determine suma $S = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Fie A o mulţime de $n \geq 2$ puncte în plan şi fie M un punct fixat. Pentru orice submulţime nevidă $B \subset A$, se construieşte o dreaptă (notată cu d_B) în felul următor: notăm cu G_B centrul de greutate al mulţimii B, cu $G_{\overline{B}}$ centrul de greutate al mulţimii $\overline{B} = A \backslash B$, iar cu M_B simetricul lui M faţă de G_B; dreapta d_B este $M_B G_{\overline{B}}$.

a) Să se arate că, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n-1$, există un punct I_k în plan prin care trec toate dreptele d_B, cu $B \subset A$, $|B| = k$.

b) Să se arate că punctele $I_k (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ sunt coliniare.

Clasa a X-a

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC de lungime $n \in \mathbb{N}$. Pe ipotenuză se consideră punctele $B = A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} = C$, care o împart în n părţi egale de lungime 1, iar pe cercurile de diametre $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ se consideră punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Să se arate că, dacă

$$A_1M_1 + A_2M_2 + \cdots + A_nM_n \geq AB,$$

atunci

$$M_1A_2 + M_2A_3 + \cdots + M_nA_{n+1} \leq AC.$$

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numere complexe cu proprietatea

$$|z_i - 1| \leq \frac{1}{2},\ \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Să se arate că

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}\right| \geq \frac{3}{4}\, n^2.$$

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie neinjectivă, pentru care există o funcţie injectivă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi o funcţie $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel ca

$$f(g(x) + y) = h(f(x), y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că funcţia f este periodică.

4. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime cu cel puţin trei elemente şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \ \forall\, x, y \in A.$$

Să se arate că există o funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $g(x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$ şi $|g(x) - g(y)| = |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Clasa a XI-a

1. Fie $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ o funcţie cu proprietatea:

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = f(x) \cdot y, \ \forall\, x, y \in \mathbb{Q}^*. \tag{1}$$

a) Să se arate că f este bijectivă şi că

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{Q}^*.$$

b) Să se dea exemplu de funcţie $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ cu proprietatea (1).

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca $a^2 \neq b^2$ şi $a \cdot AB + b \cdot BA = I_2$. Să se arate că $(AB - BA)^2 = O_2$.

3. Să se determine numărul permutărilor $\sigma \in S_n (n \geq 3)$ cu proprietatea $\sigma^3 = e$, care au un număr minim de puncte fixe (e este permutarea identică: $e(k) = k$ pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se numeşte punct fix pentru o permutare $\sigma \in S_n$ dacă $\sigma(k) = k$).

4. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ fixat. Definim şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ prin $a_n = \{n\alpha\} + \{(n+1)\alpha\}$, $\forall\, n \geq 1$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x. Să se determine mulţimea punctelor limită pentru şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ ($x \in \mathbb{R}$ se numeşte punct limită pentru şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă şirul are un subşir convergent la x).

Clasa a XII-a

1. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică inegalitatea:

$$|f(x + y) - f(x - y) - 2y| \leq y^2, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă este continuă şi verifică relaţia:

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că există o infinitate de funcţii cu proprietatea (P).

b) Dacă f este o funcţie cu proprietatea (P) şi $f(2017) = 2016$, se pot deduce valorile $f(2015)$ şi $f(2018)$?

3. Pe mulţimea $(0, \infty)$ se consideră o lege de compoziţie internă " $*$ " cu proprietatea:

$$(x * y) \cdot (y * z) \cdot (z * x) = 1, \ \forall\, x, y, z \in (0, \infty).$$

Să se studieze proprietăţile acestei legi: comutativitate, asociativitate, element neutru.

4. Pornind de la funcţia

$$F_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ F_1(x) = x(\ln x - 1), \ \forall\, x > 0,$$

se defineşte şirul de funcţii $(F_n)_{n \geq 1}$, $F_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, în care F_{n+1} este o primitivă a funcţiei F_n cu proprietatea $\lim\limits_{x \to 0} F_{n+1}(x) = 0$, $\forall\, n \geq 1$.

Să se determine $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n! F_n(1)}{\ln n}$.

Premianţii concursului "Argument", ediţia a VIII-a

Clasa a V-a

Premiul I. *Robu Dacian*, *Ştirbu Andrei* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Teleptean Amalia* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Haiduc Mihaela* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare)

Menţiuni. *Breban Camelia, Ioniţă Sebastian, Şpan Teodora, Mare Teodora, Zainea Jessica*, *Botizan Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Koblicica Iulia*, *Geiger Matyas*, *Nădişan Luca* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare); *Shahzad Ahmed Rayad*, *Alexandrescu Maria Iulia* (Şc.Gim. "Lucian Blaga" Baia Mare); *Tămâian Lidia*, *Acasandrei Anna* (Şc.Gim. "Nicolae Iorga" Baia Mare); *Sugar Andrei* (Şc.Gim. "Dimitrie Cantemir" Baia Mare).

Clasa a VI-a

Premiul I. *Dumitriu Marian* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Costin Oana* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Şpan Mihai, Tuş Traian* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Menţiuni. *Rus Tudor, Muntean Tudor, Gheţe Ruxandra, Mărcuş Alezandru, Tiut Cristian, Fechete Şerban, Prună Ştefana, Paşcu Dacian, Tătaru Andrei, Naşcu Matei* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Diaconescu Răzvan, Coman David, Nagy Alin, Onea Iulian, Pop Daria, Tibil Oana* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare); *Rogozsan Robert* (Şc.Gim. "I.L. Caragiale" Baia Mare); *Hanţig*

Lorena Maria (Şc.Gim. nr. 7); *Ariciu Andrada, Marchiş Marcus* (Şc.Gim. "Dimitrie Cantemir" Baia Mare); *Giurgi Bogdan Vasil* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei); *Lucăcean Maria* (Şc.Gim. nr. 18).

Clasa a VII-a

Premiul I. *Zlampareţ George* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Iliuţă Filip* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Hosu Iulia* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Menţiuni. *Lazea Darius, Pop Ştrempel Alexandru, Gulin Tudor, Pop Radu, Borcuti Oana* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Robu Raluca, Ştirbu Silvia, Dragoş Andreea, Pop Andreea* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare); *Mujdar Milan* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei); *Ilies Andrei* (Şc.Gim. "George Coşbuc" Sighetu Marmaţiei); *Mecea Corina* (Şc.Gim. "George Coşbuc" Baia Mare); *Brăgaru Maria Daria* (Colegiul de Arte Baia Mare); *Lupşe Isabela, Pop Leona* (Şc.Gim. "Dr. Victor Babeş" Baia Mare).

Clasa a VIII-a

Premiul I. *Zaharie Oana* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Afrăsinei Cătălin* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Ciceu Denis* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Menţiuni. *Giuroiu Tudor, Nechita Florina, Biriş Erik, Turda Raul, Riglea Teodora, Maxim Sonia* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Talpoş Carina, Săsăran Tania, Stan Teodora, Vanciu Daria* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare); *Lazăr Laurenţiu, Triesta Ioana* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei); *Szkely Bianca* (Şc.Gim. "George Coşbuc" Sighetu Marmaţiei); *Şuba Giulia* (Şc.Gim. "I.L. Caragiale" Baia Mare).

Clasa a IX-a

Premiul I. *Boroica Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al II-lea. *Becsi Paul* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Premiul al III-lea. *Pop Călin* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Menţiuni. *Moldovan Nicolae, Andreicuţ Teofil, Francioli Daria, Ilieş Iulia, Dunca Alina, Mociran Eduard, Nicolaescu Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Bud Antoniu* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare); *Ţiplea Ştefan* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Clasa a X-a

Premiul I. *Tîrlişan Ioan Paul Petru* (C.N. "George Coşbuc" Năsăud).

Premiul al II-lea. *Deac Alex Claudiu* (C.N. "Liviu Rebreanu" Bistriţa).

Premiul al III-lea. *Matei Bledea Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Menţiuni. *Mercea Ioana, Mureşan Ioan Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Zelina Paul* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare); *Cotârlan Codrin, Stepan Dacian* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Clasa a XI-a

Premiul I. *Blaga Bogdan* (C.N. "Al. Papiu Ilarian" Tg. Mureş).

Premiul al II-lea. *Tenie Anda Sorana* (C.N. "Al. Papiu Ilarian" Tg. Mureş).

Premiul al III-lea. *Roatiş Iris* (C.N. "Mihai Eminescu" Satu Mare).

Menţiuni. *Lucaciu Sergiu, Pop Vlad* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare).

Clasa a XII-a

Premiul I. *Rus Raul Octavian* (L.T. "Andrei Bârseanu" Târnaveni).

Premiul al II-lea. *Totos Gyorgy* (C.N. "Silvania" Zalău).

Premiul al III-lea. *Tiutin Cristina* (Liceul Teologic Baptist "Emanuel" Oradea).

Menţiuni. *Chişcă Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare); *Zelina Mihai* (C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare).

Marele premiu "Dumitru Angheluţă", pentru cel mai mare punctaj obţinut în concurs dintre elevii de liceu, instituit în memoria marelui profesor de matematică al Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" Baia Mare, a fost câştigat de elevul *Rus Raul Octavian* de la Liceul "Andrei Bârseanu" Târnăveni.

Pentru clasele de liceu, subiectele au fost selectate şi propuse de dl. conf. univ. dr. Vasile Pop de la Universitatea Tehnică Cluj-Napoca.

Concursul "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni
Ediţia a VII-a, 13 aprilie 2017

Organizatori. Catedra de matematică a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" şi Asociaţia "Argument".

Locul de desfăşurare. Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai".

Participanţi. **114** elevi de clasa a IV-a de la şcolile gimnaziale din oraş.

1. Considerăm numerele a, b şi c, astfel încât:

$$a = 5 \times (20 - 3) - 51 \times (10 - 2 \times 3) : 3,$$

numărul b verifică relaţia $96 - 3 \times b = 9 \times [4 - 2 \times (64 - 4 \times 4 \times 4)] : 6$, iar $c = 25 \times 8 - 5 \times (2 \times n - 5) : 3$, unde n este jumătate din suma primelor cinci numere pare.

a) Aflaţi numerele a, b, c.
b) Demonstraţi că $8 \times a = 4 \times b + 16$.
c) Demonstraţi că $3 \times a + 4 = c - 4 \times b$.

2. Numărul elevilor de clasa a IV-a înscrişi la concursul "Lumea cuvântului" adunat cu numărul elevilor înscrişi la concursul "Micii matematicieni" de la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" este 248. Au fost acordate 88 de premii. Ştiind că un sfert dintre cei înscrişi la concursul "Lumea cuvântului" şi jumătate dintre cei înscrişi la concursul "Micii matematicieni" au fost premiaţi, iar 20 de elevi au fost premiaţi la ambele concursuri, aflaţi:

a) câţi elevi au participat la fiecare dintre cele două concursuri;
b) câţi elevi au luat premii numai la concursul "Micii matematicieni";
c) câţi elevi nu au obţinut niciun premiu.

3. Un număr natural format cu cifre distincte se numeşte "şincaist" dacă suma cifrelor sale este dublul numărului de cifre. (De exemplu numărul 312 este "şincaist" deoarece $3 + 2 + 1 = 2 \times 3$).

a) Aflaţi suma tuturor numerelor "şincaiste" de două cifre.
b) enumeraţi toate numerele "şincaiste" cuprinse între 1300 şi 1600.
c) Care este cel mai mare număr "şincaist"?

Subiectul a fost propus de: Prof. Cristian Heuberger şi Prof. Nicolae Muşuroia

Argument 19

Premianţii:

Premiul I. *Săsăran Şerban, Pustai Paul* (Şc.Gim. "Nichita Stănescu").

Premiul al II-lea. *Trenişan Voica* (Şc.Gim. "Nicolae Iorga"); *Mercea Alexandru* (Şc.Gim. "George Coşbuc").

Premiul al III-lea. *Chende Mihaela, Iordache Sebastian, Ignat Lorena* (Şc.Gim. "George Coşbuc"); *Silinc Alex* (Şc.Gim. "Avram Iancu").

Menţiuni. *Petruţ Mihai* (Şc.Gim. "Avram Iancu"); *Pop Tudor* (Şc.Gim. "Nicolae Iorga"); *Săcălean Ada* (Şc.Gim. "George Coşbuc"); *Şovrea Anemona* (Şc.Gim. "Lucian Blaga").

Olimpiada de matematică etapa locală Maramureş - 04 martie 2017

Clasa a IX-a M1

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $a \neq 0$. Arătaţi că, dacă diecare dintre ecuaţiile $ax^2 + b_i x + c_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ are rădăcini reale, strict pozitive, atunci ecuaţia

$$4a^2x^2 + 4a^2x + b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_nc_n = 0$$

are rădăcini reale, de semne contrare.

2. Fie a, b, c numere reale strict pozitive, cu $a + b + c = 3$. Arătaţi că:
a) $4ab \leq (3-c)^2$;
b) $\dfrac{(a+b)^7}{a^2b^2} + \dfrac{(b+c)^7}{b^2c^2} + \dfrac{(c+a)^7}{c^2a^2} \geq 384.$ (*Gazeta Matematică nr.10/2016*)

3. Fie I şi O centrul cercului înscris, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Dreptele AI, BI, CI intersectează a doua oară cercul circumscris în punctele A', B', respectiv C'.
a) Arătaţi că $AA' \perp B'C'$;
b) Arătaţi că, dacă $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{0}$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Fărcaş Natalia, Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", Baia Mare
Prof. Muşuroia Nicolae, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Prof. Pop Radu, Seminarul Teologic "Sfântul Iosif Mărturisitorul", Baia Mare

Clasa a X-a

1. Se consideră mulţimea $F = \{f : (0,\infty) \to \mathbb{R} \,|\, f(xy) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ şi $f(x) \neq 0,\ \forall\, x \in (0,\infty) \backslash \{1\}\}$.
a) Demonstraţi că mulţimea F este nevidă;
b) Dacă $f \in F$, demonstraţi că funcţia f este injectivă.

2. Să se determine numerele reale α, β pentru care

$$|z^2 + \alpha z + \beta| \leq 1,\ \forall\, z \in \mathbb{C},$$

cu proprietatea $|z| = 1$.

Prof. Giurgi Vasile

3. Fie a, b, c numere reale pozitive cu $abc = a + b + c + 2$. Să se arate că
$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c}}.$$

GM 9/2016

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Gherasin Gheorghe, Liceul "Regele Ferdinand", Sighetu Marmaţiei
Prof. Giurgi Vasile, Colegiul Naţional "Dragoş Vodă", Sighetu Marmaţiei
Prof. Bojor Florin, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ două matrice care comută, cu
$$\det(A) = -2,\ \det\left(A + \sqrt{2} \cdot B\right) = 0.$$
Calculaţi $\det(A^2 + B^2)$ şi $\det(A^2 - B^2)$.

S:L16.266, GM 10/2016

2. Fie $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, notăm $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Arătaţi că $\forall\, n \geq 2$, $b_n + c_n \leq a_n + d_n$.

S:L16.268, GM 10/2016

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0, 1)$ şi $x_{n+1} = \sqrt{n - x_n}$, $\forall\, n \geq 1$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - \sqrt{n})$.

4. Fie funcţia $f : (-1, \infty) \to (-1, \infty)$ astfel încât
$$\forall\, x > -1,\ f\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) = 1 + \frac{2}{f(x) + 1}.$$

a) Dacă există $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)$, determinaţi valoarea acestei limite.

b) Dacă $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, arătaţi că $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -1$.

Dana Heuberger şi Gheorghe Boroica

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Gabriela Boroica, Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", Baia Mare
Prof. Gheorghe Boroica, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Prof. Dana Heuberger, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Clasa a XII-a

1. Care sunt elementele simetrizabile în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ faţă de operaţia $A * B = AB + BA$?

Supliment G.M. 12/2016, Aurel Doboşan, Lugoj

2. Fie $E = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{Z}^*, |n| \leq 2017 \right\}$ şi

$$M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in E \right\}.$$

a) Demonstraţi că $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$, $\forall\, x, y \in E$;

b) Este M grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor?

c) Se şterg la întâmplare două matrice din M şi se înlocuiesc cu produsul lor. Se repetă procedeul până rămâne o singură matrice. Care este acea matrice?

Prof. Longaver Ludovic

3. *Determinaţi funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinesc simultan condiţiile:*

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + \frac{x}{1+x^2}\,, \forall\, x \in \mathbb{R}^* \ \ \textit{şi} \ \ \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

Prof. Cristian Heuberger

4. Admitem cunoscut că, pentru o funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

a) Calculaţi $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x)dx$;

b) Să se arate că $\forall\, x \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2+n^2}+n+x}dx \geq \frac{4}{3n}$.

Prof. Horia Zlampareţ

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Longaver Ludovic, Liceul Teoretic "Nemeth Laszlo", Baia Mare
Prof. Cristian Heuberger, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Prof. Horia Zlampareţ, Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", Baia Mare

Argument 19

Test pentru admiterea în clasa a V-a, 17 mai 2017
Matematică

1. Numerele a, b, c satisfac următoarele egalităţi:

$$a = 515 : 5 - (15 + 20 \cdot 3) : (25 \cdot 30 - 745) - 9 \cdot 7$$

$$51 + 27 \cdot (b - 3) = 21 + 3 \cdot [(113 - 40 : 5) : (14 : 7 + 70 : 5 - 11) + 7]$$

$4 \cdot c = [162 : 9 - 3 \cdot (4 \cdot n - 20)] \cdot (5 \cdot n - 2 \cdot 3 \cdot 3) + 32$, unde n este suma cifrelor celui mai mic număr impar mai mare ca 2017, care are cifrele distincte şi care are cifra sutelor 2.

a) Calculaţi numerele a, b şi c;

b) Calculaţi suma tuturor numerelor naturale începând cu succesorul lui b şi terminând cu predecesorul lui a;

c) Pentru $c = 26$, arătaţi că $a + b \cdot b = (c : 2) \cdot 5 - 15$.

2. Elevii Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", care au obţinut locurile I, II sau III la Olimpiadele Naţionale, sunt premiaţi cu 300 lei, 200 lei, respectiv 100 lei. Numărul elevilor care au obţinut locul al II-lea este cu 2 mai mare decât dublul celor care au obţinut locul I, iar numărul celor care au obţinut locul al III-lea este jumătate din numărul total de premii. Ştiind că pentru premiile II s-au alocat 2000 lei, aflaţi:

a) câţi elevi au obţinut locul I;

b) ce sumă a fost alocată în total pentru premii.

3. Considerăm următorul tabel de numere:

0	1	2
5	1	2
5	6	2
5	6	7
....		

regula fiind că pe fiecare rând, începând cu al doilea, cel mai mic dintre numerele scrise pe rândul anterior se măreşte cu 5.

a) Să se determine suma numerelor scrise pe rândul 5 şi apoi suma numerelor scrise pe rândul 6;

b) Să se determine suma numerelor scrise pe rândul 2017;

c) Să se arate că numărul 2018 nu apare în tabel;

d) Pe ce rând al tabelului va apărea prima dată numărul 2017?

Subiectul a fost propus de: Prof. Cristian Heuberger şi Prof. Nicolae Muşuroia

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Fie $m \in [1, \infty)$ şi $[ABCD]$ un tetraedru de arie totală $2s$. Dacă S_A este aria feţei opuse vârfului A, iar S_B, S_C, S_D sunt analoagele, să se arate că*

$$\frac{S_A^m+S_B^m+S_C^m}{(s-S_D)^m}+\frac{S_B^m+S_C^m+S_D^m}{(s-S_A)^m}+\frac{S_C^m+S_D^m+S_A^m}{(s-S_B)^m}+\frac{S_D^m+S_A^m+S_B^m}{(s-S_C)^m} \geq 12.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Deoarece funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^m$ este convexă pe $\mathbb{R}_+^*$, conform inegalităţii Jensen avem

$$f(x)+f(y)+f(z) \geq 3 \cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$$

cu egalitate pentru $x = y = z$, deci

$$x^m + y^m + z^m \geq 3 \cdot \frac{(x+y+z)^m}{3^m} = \frac{(x+y+z)^m}{3^{m-1}},\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*,$$

deci

$$W = \sum_{cyclic} \frac{S_A^m + S_B^m + S_C^m}{(s-S_D)^m} \geq \frac{1}{3^{m-1}} \cdot \sum_{cyclic} \left(\frac{S_A+S_B+S_C}{s-S_D}\right)^m$$

$$= \frac{1}{3^{m-1}} \sum_{cyclic} \left(\frac{2s-S_D}{s-S_D}\right)^m$$

$$= \frac{1}{3^{m-1}} \sum_{cyclic} \left(1 + s\frac{1}{s-S_D}\right)^m \geq \frac{1}{3^{m-1}} \frac{\left(\sum_{cyclic}\left(1+s\frac{1}{s-S_D}\right)\right)^m}{4^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{12^{m-1}} \left(4 + s\sum_{cyclic} \frac{1}{s-S_D}\right)^m \overset{\text{Bergström}}{\geq} \frac{1}{12^{m-1}} \left(4 + s\frac{4^2}{\sum_{cyclic}(s-S_D)}\right)^m$$

$$= \frac{4^m}{12^{m-1}} \left(1 + \frac{4s}{4s - \sum_{cyclic} S_D}\right)^m = \frac{4}{3^{m-1}}\left(1 + \frac{4s}{2s}\right)^m$$

$$= \frac{4}{3^{m-1}}(1+2)^m = 4 \cdot \frac{3^m}{3^{m-1}} = 12.$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă tetraedrul este echicefal.

2. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care verifică relaţia*

$$f(f(x) + y^2 f^2(y)) = x + f^4(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Florin Bojor

Soluţie. Pentru $y = 0$ avem că $f(f(x)) = x + f^4(0)$. Deoarece funcţia $x \to x + f^4(0)$ este bijectivă, va rezulta că f este bijectivă.
Deci există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(t) = 0$. Pentru $y = t \Rightarrow f(f(x)) = x$ de unde rezultă că $f^4(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
Pentru $x = 0$, $y = x \Rightarrow f(x^2 f^2(x)) = f^4(x)$, de unde pentru

$$x := f(x) \Rightarrow f(f^2(x) \cdot x^2) = x^4 \Rightarrow f^4(x) = x^4 \Rightarrow f(x) = \pm x.$$

Presupunem că există $m, n \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(m) = m$, $f(n) = -n$, atunci pentru $x := n$,

$$y := m \Rightarrow f(-n + m^4) = n + m^4 \Rightarrow \pm(-n + m^4) = n + m^4 \Rightarrow n = 0$$

sau $m = 0$, deci $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sau $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sunt singurele funcţii care verifică relaţia.

3. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 = \dfrac{1}{2}$ *şi* $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$, $\forall\, n \geq 1$. *Să se calculeze partea întreagă a numărului*

$$a = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{2}{x_2 + 2} + \frac{2^2}{x_3 + 2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{x_n + 2},\ \textit{unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Florin Bojor

Soluţie. Folosind relaţia de recurenţă avem că $\forall\, n \geq 1$,

$$\frac{1}{x_n + 2} = \frac{x_n}{x_n^2 + 2x_n} = \frac{x_n^2}{x_{n+1} x_n} = \frac{x_{n+1} - 2x_n}{x_{n+1} x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{2}{x_{n+1}}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{x_k + 2} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{2}{x_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{x_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_1} - \frac{2^n}{x_{n+1}} = 2 - \frac{2^n}{x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Dar relaţia de recurenţă se scrie $x_{n+1} + 1 = (x_n + 1)^2$, $\forall\, n \geq 1$, de unde $x_2 + 1 = (x_1 + 1)^2$; $x_3 + 1 = (x_2 + 1)^2 = (x_1 + 1)^4$ şi se demonstrează prin inducţie că $x_{n+1}+1=(x_1+1)^{2^n}$, $\forall\, n \geq 1$, deci $x_{n+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2^n}-1$.

Prin urmare fracţia $\dfrac{2^n}{x_{n+1}}$ este subunitară, deci $[a]=1$.

4. *Se consideră hexagonul inscriptibil $ABCDEF$. Dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{0}$, să se arate că perpendicularele din A, B, C, D, E, F pe CE, DF, AE, BF, AC, respectiv BD, sunt concurente.*

Meda Bojor

Soluţie. Evident, înălţimile triunghiului ACE sunt concurente în H_1 şi înălţimile triunghiului BDF sunt concurente în H_2.
Fie O centrul cercului circumscris hexagonului, atunci din relaţia lui Sylvester avem că $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ şi $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}$.
Prin urmare

$$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{0},$$

de unde rezultă concluzia.

5. *Se consideră mulţimea*

$$A=\{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca|a,b,c\in\mathbb{N}, a\neq b\neq c\neq a\}.$$

Să se arate că mulţimea conţine o infinitate de cuburi perfecte.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Înmulţind egalitatea $1^2+2^2+3^2-(1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3)=3$ cu n^2, obţinem că

$$n^2+(2n)^2+(3n)^2-(n\cdot 2n+n\cdot 3n+2n\cdot 3n)=3n^2.$$

Atunci numerele de forma $3n^2$, $n\in\mathbb{N}^*$, se află în A. Alegând acum $n=3m^3$, $m\in\mathbb{N}^*$, găsim că numerele de forma $3(3m^3)^2=(3m^2)^3\in A$, $\forall\, m\in\mathbb{N}^*$.
Aşadar, are loc concluzia.

6. *Să se demonstreze că pentru orice numere strict pozitive x, y, z, t are loc inegalitatea*

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2t^2(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+t^3)(x^3+y^3)(x^3+t^3)(x^3+z^3)}$$
$$\geq \sqrt{(x^3+yzt)(y^3+xzt)(z^3+xyt)(t^3+xyz)}.$$

Petru Braica

Soluţie. Folosim lema: *Pentru orice* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *şi orice* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ *are loc*

$$(x+a)(x+b)(x+c) \geq \left(x + \sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

Demonstraţie lemă. După desfacerea parantezelor avem:

$$x^3 + 3x^2\sqrt[3]{abc} + 3x\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + abc \leq x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc,$$

inegalitate adevărată din inegalitatea mediilor, $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ respectiv $ab+ac+bc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c$. Aplicăm repetat lema şi obţinem

$$\begin{aligned}(d+a)(d+b)(d+c) &\geq \left(d+\sqrt[3]{abc}\right)^3\\ (a+b)(a+c)(a+d) &\geq \left(a+\sqrt[3]{bcd}\right)^3\\ (b+c)(b+d)(b+a) &\geq \left(b+\sqrt[3]{cda}\right)^3\\ (c+d)(c+a)(c+b) &\geq \left(c+\sqrt[3]{dab}\right)^3\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}(a+d)^2(b+d)^2(d+c)^2(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2(c+d)^2\\ \geq \left(d+\sqrt[3]{abc}\right)^3\left(a+\sqrt[3]{bcd}\right)^3\left(b+\sqrt[3]{cda}\right)^3\left(c+\sqrt[3]{dab}\right)^3 / \sqrt[6]{(....)}\\ \overset{*}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{(a+d)(a+b)(a+c)(b+c)(b+d)(c+d)}\\ \geq \sqrt{\left(d+\sqrt[3]{abc}\right)\left(a+\sqrt[3]{bcd}\right)\left(b+\sqrt[3]{cda}\right)\left(c+\sqrt[3]{dab}\right)}\end{gathered}$$

Cu notaţiile $\sqrt[3]{abc} \overset{not}{=} x$; $\sqrt[3]{bcd} \overset{not}{=} y$; $\sqrt[3]{cda} \overset{not}{=} z$; $\sqrt[3]{dab} \overset{not}{=} t$, obţinem imediat că $abcd = xyzt$ şi $a = \dfrac{xzt}{y^2}$; $b = \dfrac{xyt}{z^2}$; $c = \dfrac{xyz}{z^2}$; $d = \dfrac{yzt}{x^2}$. După înlocuiri în inegalitatea $(*)$ obţinem concluzia problemei.
Egalitatea are loc pentru $a=b=c=d$ sau

$$\frac{xzt}{y^2} = \frac{xyt}{z^2} = \frac{xyz}{t^2} = \frac{yzt}{x^2} \Leftrightarrow \frac{xyzt}{y^3} = \frac{xyzt}{z^3} = \frac{xyzt}{t^3} = \frac{xyzt}{x^3}$$

sau $x^3 = y^3 = z^3 = t^3$ şi cum funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este injectivă, obţinem $x = y = z = t$.

7. *Să se arate că în şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$, *definit prin* $a_n = n^8 + (n+1)^8$, *există o infinitate de numere compuse.*

Costel Chiteş

Soluţie. Deoarece $2^8 = 256$, vom considera congruenţa modulo $p = 257$. Dacă $n \equiv 1(\bmod 257)$, atunci obţinem $n^8 \equiv 1(\bmod 257)$, $(n+1)^8 \equiv 256(\bmod 257)$, relaţii care, prin adunare, conduc la $n^8 + (n+1)^8 \equiv 0(\bmod 257)$, adică $257|a_n$, pentru oricare $n = 257k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

8. *Să se rezolve în* $\mathbb{R}^*$ *ecuaţia*

$$\frac{1}{\sqrt{a^{1008}+b^{2016}}} + \frac{1}{\sqrt{b^{1008}+a^{2016}}} + \frac{1}{\sqrt{(ab)^{1008}+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{a^{504}} + \frac{1}{b^{504}} + \frac{1}{(ab)^{504}}\right).$$

Paul Cotan

Soluţie. Folosim inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{x+y}, \ \forall\, x, y \in (0, \infty)$$

Notăm cu E membrul stâng al ecuaţiei. Obţinem:

$$E \leq \sqrt{2}\left(\frac{1}{a^{504}+b^{1008}} + \frac{1}{b^{504}+a^{1008}} + \frac{1}{(ab)^{504}+1}\right) \overset{medii}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow E \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^{504}\cdot b^{1008}}} + \frac{1}{\sqrt{b^{504}\cdot a^{1008}}} + \frac{1}{\sqrt{(ab)^{504}}}\right)$$
$$\Leftrightarrow E \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{a^{252}\cdot b^{504}} + \frac{1}{b^{252}\cdot a^{504}} + \frac{1}{(ab)^{252}}\right)$$

Înlocuind E cu membrul drept al ecuaţiei din enunţ, rezultă:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{a^{504}} + \frac{1}{b^{504}} + \frac{1}{(ab)^{504}}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{a^{252}\cdot b^{504}} + \frac{1}{b^{252}\cdot a^{504}} + \frac{1}{(ab)^{252}}\right)$$

Înmulţind inegalitatea precedentă cu $\sqrt{2}(ab)^{504}$ deducem că ea este echivalentă cu

$$a^{504} + b^{504} + 1 \leq a^{252} + b^{252} + (ab)^{252} \tag{1}$$

Notând $a^{252} = \alpha$, $b^{252} = \beta$, (1) devine:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1^2 \leq \alpha\cdot 1 + \beta \cdot 1 + \alpha\cdot\beta \tag{2}$$

Dar $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, deci (2) are loc dacă şi numai dacă $\alpha = \beta = 1$.

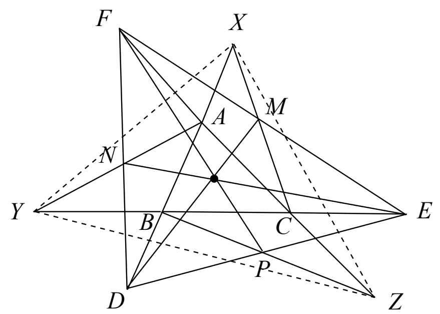
Aşadar $(a, b) \in \{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}$.

9. *Fie ABC şi punctele D, E, F astfel încât A este mijlocul lui (CF), B este mijlocul lui (AD) şi C este mijlocul lui (BE). Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ şi M, N, P, X, Y, Z cu $\{M\} = DG \cap EF$, $\{N\} = EG \cap DF$, $\{P\} = FG \cap DE$, $\{X\} = AB \cap MC$, $\{Y\} = BC \cap NA$, $\{Z\} = AC \cap PB$.*
Să se arate că:
a) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.
b) Triunghiurile ABC şi XYZ au acelaşi centru de greutate.

Dana Heuberger

Soluţie. a)

$$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CA}$$



Adunând relaţiile precedente, obţinem:
$\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
Aşadar G este centrul de greutate al triunghiului DEF. În consecinţă, M, N şi P sunt mijloacele segmentelor $[EF]$, $[DF]$ şi $[DE]$.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{0}$$

Atunci

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, deci $AMCB$ este un trapez cu baza mică AM. Aşadar dreptele AB şi CM sunt concurente, iar $[AM]$ este linie mijlocie în triunghiul XBC. Rezultă că $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AB}$. Analog obţinem $\overrightarrow{YB} = \overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{ZC} = \overrightarrow{CA}$. Deducem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XG} + \overrightarrow{YG} + \overrightarrow{ZG} &= \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{YB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{ZC} + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

10. *Fie $x, y, z \in (0, +\infty)$, cu $xyz = 1$. Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ are loc*

$$\frac{x}{1+x^{n+1}} + \frac{y}{1+y^{n+1}} + \frac{z}{1+z^{n+1}} \leq \frac{2n}{n+1}.$$

Dana Heuberger şi Ioan Şerdean
Generalizare a problemei 27244, G.M. 6-7-8/2016

Soluţie. Efectuăm substituţiile: $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $t = \frac{1}{z}$. Evident, $uvt = 1$. Inegalitatea de demonstrat devine:

$$E_n \stackrel{not}{=} \frac{u^n}{u^{n+1}+1} + \frac{v^n}{v^{n+1}+1} + \frac{t^n}{t^{n+1}+1} \leq \frac{2n}{n+1} \tag{1}$$

Avem

$$n(u^{n+1}+1) = \underbrace{u^{n+1} + u^{n+1} + \cdots + u^{n+1}}_{de\ n\ ori} + 1 + (n-1) \stackrel{medii}{\geq}$$
$$\geq (n+1)\sqrt[n+1]{(u^{n+1})^n \cdot 1} + n - 1$$

Aşadar

$$n(u^{n+1}+1) \geq (n+1) \cdot u^n + n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u^{n+1}+1} \leq \frac{n}{(n+1)u^n + n - 1}$$

şi relaţiile analoage. Obţinem:

$$E_n \leq n\left(\frac{u^n}{(n+1)u^n + n-1} + \frac{v^n}{(n+1)v^n + n-1} + \frac{t^n}{(n+1)t^n + n-1}\right) \stackrel{not}{=} F_n \tag{2}$$

În F_n facem substituţiile: $a = \frac{1}{u^n}$, $b = \frac{1}{v^n}$, $c = \frac{1}{t^n}$, pentru care avem $abc = 1$ şi obţinem

$$F_n = n\left(\frac{1}{(n-1)a+n+1} + \frac{1}{(n-1)b+n+1} + \frac{1}{(n-1)c+n+1}\right)$$

Atunci,

$$F_n \leq \frac{2n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n-1)a+n+1} + \frac{1}{(n-1)b+n+1} + \frac{1}{(n-1)c+n+1} \leq \frac{2}{n+1}$$

Amplificând fracţiile şi aducând la acelaşi numitor în inegalitatea precedentă, obţinem

$$F_n \leq \frac{2n}{n+1} \Leftrightarrow (n-1)^2(n+1)(ab+bc+ca) \geq (n+1)^3 - 2(n-1)^3. \tag{3}$$

Dar $ab+bc+ca \overset{medii}{\geq} 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$, de unde deducem:

$$(n-1)^2(n+1)(ab+bc+ca) \geq 3(n-1)^2(n+1)$$

Deoarece $3(n-1)^2(n+1) \geq (n+1)^3 - 2(n-1)^3 \Leftrightarrow n \geq 3$, deducem că (3) este adevărată. Folosind (2), deducem că $E_n \leq \dfrac{2n}{n+1}$, deci (1) este adevărată. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $n=3$ şi $x=y=z=1$.

11. *Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $(2m+1)x^2-(m^2-1)x-m^2-2m-2=0$, $m \in \mathbb{R}$. Dacă x_1 şi x_2 sunt reale, să se demonstreze că ele au modulul mai mare sau egal cu 1.*

Ludovic Longaver

Soluţie. Pentru $m=-\dfrac{1}{2}$, ecuaţia devine $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}=0$, cu rădăcina $x=\dfrac{5}{3}\geq 1$.
Dacă $m \neq -\dfrac{1}{2}$, atunci ecuaţia poate fi adusă la forma

$$(x+1)m^2-2(x^2-1)m-x^2-x+2=0.$$

Condiţia ca pentru x real şi valorile lui m să fie reale este ca

$$\Delta=(x^2-1)(x^2+x+1)\geq 0.$$

Obţinem $x^2-1\geq 0$, adică $|x_k|\geq 1$, $k=\overline{1,2}$.

12. *Pe laturile triunghiului ABC considerăm, în această ordine, punctele $M,N \in (AB)$; $P,Q \in (BC)$; $R,S \in (AC)$ astfel încât $MN^2+RS^2=PQ^2$. Dacă $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{0}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Există $\alpha \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin\alpha=\dfrac{MN}{PQ}$ şi $\cos\alpha=\dfrac{RS}{PQ}$.
Din $\dfrac{MN}{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{PQ}{BC}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{RS}{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ rezultă

$$\frac{MN}{PQ}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}+\frac{RS}{PQ}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}=\overrightarrow{0} \Rightarrow \sin\alpha\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}+\cos\alpha\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}=\overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\frac{\cos\alpha}{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{\sin\alpha}{AB}-\frac{1}{BC}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{BC}-\frac{\cos\alpha}{AC}\right)\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$$
$$\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{AB}=\frac{1}{BC}\quad\text{şi}\quad\frac{\cos\alpha}{AC}=\frac{1}{BC}.$$

Deci $\sin\alpha=\dfrac{AB}{BC}$ şi $\cos\alpha=\dfrac{AC}{BC}$. Cum $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, rezultă

$$BC^2=AB^2+AC^2.$$

13. *Demonstraţi că dacă* $0<a\leq b$, *atunci*

$$\left(\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{a+b}{2ab}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right)\leq\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Vom demonstra că

$$\begin{cases}\dfrac{2ab}{a+b}\leq\dfrac{a+b}{2}\\[2mm]\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4ab\leq(a+b)^2\\(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq a^2-2ab+b^2\\a^2+2ab+b^2\leq 2a^2+2b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq(a-b)^2\\0\leq(a-b)^2\end{cases}$$

Deci

$$0<a\leq\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leq b$$

Din inegalitatea lui Schweitzer, pentru $n=2$ şi $x_1,x_2\in[a,b]$ avem

$$(x_1+x_2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\leq\frac{(a+b)^2}{ab}$$

Fie $x_1=\dfrac{2ab}{a_b}$; $x_2=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. În consecinţă,

$$\left(\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)\left(\frac{a+b}{2ab}+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\right)\leq\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

(Inegalitatea lui Schweitzer:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \le \frac{(m+M)^2 n^2}{4mM}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in [m, M]$; $0 < m \le x_k \le M$; $k \in \overline{1, n}$; $n \in \mathbb{N}^*$)

14. *Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că cel puţin una dintre ecuaţiile:*

$x^2 - 6x(a-b) + \overline{ab} = \overline{ba}$, $x^2 - 6x(b-c) + \overline{bc} = \overline{cb}$ *şi* $x^2 - 6x(c-a) + \overline{ca} = \overline{ac}$ *are soluţii reale.*

Mihai Vijdeluc

În legătură cu problema S:L 15.201 din G.M. 9/2015

Soluţie. Fie $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ discriminanţii celor trei ecuaţii. Presupunem că nicio ecuaţie nu are rădăcini reale, atunci $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0 \Rightarrow$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 0 \tag{*}$$

Dar

$$\begin{aligned}\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 &= 36(a-b)^2 - 4(\overline{ab} - \overline{ba}) + 36(b-c)^2 - 4(\overline{bc} - \overline{cb}) \\ &\quad + 36(c-a)^2 - 4(\overline{ca} - \overline{ac}) \\ &= 36\left[(a-b)^2 - (a-b)\right] + 36\left[(b-c)^2 - (b-c)\right] \\ &\quad + 36\left[(c-a)^2 - (c-a)\right] \ge 0 \qquad (**)\end{aligned}$$

Vreau să arăt că

$$(a-b)^2 - (a-b) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge a - b \tag{***}$$

Dacă $a = b$, avem egalitate în $(***)$.
Dacă $a < b \Rightarrow a - b < 0$ şi $(a-b)^2 > 0$, deci $(***)$ este adevărată.
Dacă $a > b \Rightarrow a - b > 0$, atunci putem împărţi în $(***)$ cu $a - b$ şi obţinem $a - b \ge 1 \Leftrightarrow a \ge b + 1$ adevărată pentru că $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Atunci $(**)$ contrazice $(*)$, rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci cel puţin una dintre ecuaţii are soluţii reale.

15. *Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Arătaţi că:*

$$\frac{a^2 + \sqrt{bc}}{a(b+c)} + \frac{b^2 + \sqrt{ac}}{b(c+a)} + \frac{c^2 + \sqrt{ab}}{c(a+b)} \ge \frac{9}{a+b+c}$$

Mihai Vijdeluc

Soluţie. Desfacem inegalitatea noastră în două inegalităţi şi anume:

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq\frac{9}{2(a+b+c)},\ \text{pentru } a^2+b^2+c^2=3. \qquad (*)$$

$$\frac{\sqrt{bc}}{a(b+c)}+\frac{\sqrt{ac}}{b(a+c)}+\frac{\sqrt{ab}}{c(a+b)}\geq\frac{9}{2(a+b+c)},\ \text{pentru orice } a,b,c>0. \qquad (**)$$

Demonstrez a 2-a inegalitate

Aplicăm inegalitatea mediilor şi avem:

$$\frac{\sqrt{bc}}{a(b+c)}+\frac{\sqrt{ac}}{b(a+c)}+\frac{\sqrt{ab}}{c(a+b)}\geq 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac}\cdot\sqrt{ab}}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}$$
$$=3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$
$$\geq\frac{3}{\dfrac{a+b+b+c+c+a}{3}}=\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Demonstrez prima inegalitate

Aplicăm inegalitatea lui Bergström (Cauchy-Schwarz) şi avem:

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

şi trebuie să arăt că

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}\Leftrightarrow(a+b+c)^3\geq 9(ab+bc+ca) \qquad (***)$$

Avem

$$3=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca,\ S=a+b+c.$$

Inegalitatea $(***)$ este echivalentă cu

$$S^3\geq\frac{9(S^2-3)}{2}\Leftrightarrow 2S^3\geq 9(S^2-3)\Leftrightarrow 2S^3\geq 9S^2-27\Leftrightarrow 2S^3-9S^2+27\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2S^3-12S^2+18S+3S^2-18S+27\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (S^2-6S+9)(2S+3)\geq 0\Leftrightarrow (S-3)^2(2S+3)\geq 0\ \text{ adevărată.}$$

Din $(*)$ şi $(**)$ rezultă

$$\frac{a^2+\sqrt{bc}}{a(b+c)}+\frac{b^2+\sqrt{ac}}{b(c+a)}+\frac{c^2+\sqrt{ab}}{c(a+b)}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Clasa a X-a

1. *Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ şi $x + y + z = s$, atunci*

$$\frac{1}{\sqrt{sx+yz}} + \frac{1}{\sqrt{sy+zx}} + \frac{1}{\sqrt{sz+xy}} \geq \frac{9}{2s}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Avem: $sx+yz = (x+y+z)x+yz = x^2+xy+zx+yz = (x+y)(x+z)$ şi analoagele.

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{\sqrt{sx+yz}} &= \sum \frac{1}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \overset{\text{medii}}{\geq} 2\sum \frac{1}{x+y+x+z} \\ &= 2\sum \frac{1}{(x+y+z)+x} = 2\sum \frac{1}{s+x} \overset{\text{Bergström}}{\geq} \\ &\geq 2 \cdot \frac{(1+1+1)^2}{\sum s+x} = 2 \cdot \frac{9}{3s+x+y+z} = 2 \cdot \frac{9}{4s} = \frac{9}{2s},\end{aligned}$$

cu egalitate dacă $x = y = z = \dfrac{s}{3}$.

2. *Dacă $(L_n)_{n\geq 0}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $n \in \mathbb{N}$, este şirul lui Lucas, iar $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} L_k$, atunci*

$$\frac{1}{n \cdot p_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} L_k^m + \frac{m \cdot n \sqrt[m]{p_n}}{L_{n+2}-3} > m+1, \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Se ştie că $\sum\limits_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Din inegalitatea lui Jensen, $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \geq nf\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$ pentru funcţia convexă $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, deducem

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^m \geq n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k\right)^m = \frac{(L_{n+2}-3)^n}{n^{m-1}}.$$

Atunci

$$\frac{1}{np_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}L_k^m+\frac{m\cdot n\sqrt[m]{p_n}}{L_{n+2}-3}$$

$$\geq\frac{1}{n\cdot p_n}\cdot\frac{(L_{n+2}-3)^m}{n^{m-1}}+\frac{n\sqrt[m]{p_n}}{L_{n+2}-3}+\frac{n\sqrt[m]{p_n}}{L_{n+2}-3}+\cdots+\frac{n\sqrt[m]{p_n}}{L_{n+2}-3}$$

$$\geq(m+1)\sqrt{\frac{(L_{n+2}-3)^m}{n^m\cdot p_n}\cdot\left(\frac{n\sqrt[m]{p_n}}{L_{n+2}-3}\right)^m}=m+1.$$

Inegalitatea este stridtă deoarece $L_n\neq L_m$, $\forall\, n,m\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

3. *Dacă $x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$, $m\in\mathbb{R}_+$, iar*
$A=\dfrac{x+y+z}{3}$, $G=\sqrt[3]{xyz}$, $H=\dfrac{3xyz}{xy+yz+zx}$, *atunci:*

$$\frac{x^{2m+2}}{(y+z+M)^{m+1}}+\frac{y^{2m+2}}{(z+x+M)^{m+1}}+\frac{z^{2m+2}}{(x+y+M)^{m+1}}\geq\frac{(x+y+z)^{m+1}}{3^{2m+1}},$$

unde $M\in\{A,G,H\}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Fie $X=x+y+z$, atunci

$$W=\sum\frac{x^{2m+2}}{(X+M-x)^{m+1}}=\sum\left(\frac{x^2}{X+M-x}\right)^{m+1}\overset{Radon}{\geq}$$

$$\geq\frac{1}{3^m}\left(\sum\frac{x^2}{X+M-x}\right)^{m+1}.$$

Deoarece $A\geq G\geq H$ rezultă:

$$W\geq\frac{1}{3^m}\left(\sum\frac{x^2}{X+A-x}\right)^{m+1}=\frac{1}{3^m}\left(\sum\frac{x^2}{X+\frac{X}{3}-x}\right)^{m+1}$$

$$=\frac{1}{3^m}\left(3\sum\frac{x^2}{4X-3x}\right)^{m+1}=3\left(\sum\frac{x^2}{4X-3x}\right)^{m+1}\overset{\text{Bergström}}{\geq}$$

$$\geq3\left(\frac{(x+y+z)^2}{12X-3(x+y+z)}\right)^{m+1}=3\frac{X^{2m+2}}{(12X-3X)^{m+1}}=\frac{X^{m+1}}{3^{2m+1}}.$$

4. *Să se demonstreze că, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, are loc inegalitatea:*

$$(2^x+2^y+2^z)(4-2^{x-y}-2^{y-z}-2^{z-x})\leq3\cdot2^{\frac{x+y+z}{3}}.$$

Meda Bojor

Soluţie. Notăm $2^x = a$, $2^y = b$, $2^z = c$. Atunci inegalitatea devine

$$(a+b+c)\left(4-\frac{a}{b}-\frac{b}{c}-\frac{c}{a}\right) \le 3\sqrt[3]{abc}.$$

Dar $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$ şi analoagele, deci

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Prin urmare rămâne să demonstrăm că

$$\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\left(4-\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \le 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-3\right) \ge 0(A),$$

deoarece $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$.

5. *Se consideră p şi q două numere prime distincte şi n un număr natural nenul. Să se determine numărul funcţiilor $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{p, q\}$, pentru care numărul $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$ este cub perfect.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Pentru a exista o funcţie ca şi în enunţ, este necesar ca un număr multiplu de 3 de elemente din domeniu să aibă ca imagine pe p şi analog pentru q.

Aşadar, dacă $n \equiv 1 \pmod 3$ sau $n \equiv 2 \pmod 3$, atunci numărul cerut este egal cu 0.

Dacă $n \equiv 0 \pmod 3$, atunci un număr de $3k$ elemente din domeniu vor avea ca imagine pe p (restul au ca imagine pe q), unde $k \in \mathbb{N}$, astfel $3k \le n$. Atunci numărul cerut este

$$x_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{3}} C_n^{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n\right).$$

6. *Să se arate că dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci cel puţin unul din numerele $a+\sqrt{2}$ şi $a^4+\sqrt{2}$ este iraţional.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Presupunem contrariul, deci $x = a + \sqrt{2}$ şi $y = a^4 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Atunci

$$\begin{aligned} y &= \left(x - \sqrt{2}\right)^4 + \sqrt{2} = x^4 - 4x^3 \cdot \sqrt{2} + 12x^2 - 8\sqrt{2}x + 4 + \sqrt{2} \\ &= x^4 + 12x^2 + 4 - \sqrt{2}(4x^3 + 8x + 1) \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Aşadar $4x^3 + 8x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$. Atunci $x \in \left\{\pm 1, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{4}\right\}$ ar fi soluţie a ecuaţiei $4x^3 + 8x + 1 = 0$, contradicţie.

7. *Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi punctele $M \in AC$, $N \in AB$, $P \in BC$ astfel încât $MB \perp BC$, $NC \perp CA$, $PA \perp AB$. Să se arate că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.*

Dana Heuberger

Soluţie. Notăm $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $MB = x$, $CN = y$, $AP = z$.
$AP \perp AB$, deci $\dfrac{z_P - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{z}{c} \cdot i$, adică

$$z_P = \frac{z}{c}(z_B - z_A) \cdot i + z_A.$$

Analog obţinem:

$$z_M = \frac{x}{a}(z_C - z_B) \cdot i + z_B$$

$$z_N = \frac{y}{b}(z_A - z_C) \cdot i + z_C.$$

$$\begin{aligned} \frac{z_P + z_M + z_N}{3} &= \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{c}(z_C - z_A) + \frac{x}{a}(z_C - z_B) + \frac{y}{b}(z_A - z_C) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_A - z_B)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + (z_B - z_C)\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Fie $D(z_A - z_B)$, $E(z_B - z_C)$ şi O originea sistemului de axe.
Deoarece $\widehat{DOE} \equiv \widehat{ABC}$, din (1) rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{x}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Leftrightarrow \triangle MBC \sim \triangle NCA \sim \triangle PAB$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BCM} \equiv \widehat{CAN} \equiv \widehat{ABP} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ este echilateral.}$$

8. *În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile* $BMC \sim CNA \sim APB$. *Fie* $l = \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{BP}{AB}$.

a) Să se arate că $\triangle MNP \sim \triangle ABC \Leftrightarrow \triangle ABC$ *este echilateral.*

b) Să se arate că $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Fie $t = \mu(\widehat{NAC}) = \mu(\widehat{PBA}) = \mu(\widehat{MCB})$. Notăm $\alpha = \cos t + i \cdot \sin t$. Atunci $\alpha \notin \mathbb{R}$, deoarece $t \in (0, \pi)$. Obţinem

$$z_M = \ell \cdot \alpha(z_B - z_C) + z_C,\ z_N = \ell \cdot \alpha(z_C - z_A) + z_A,\ z_P = \ell \cdot \alpha(z_A - a_B) + z_B.$$

$$\triangle MNP \sim \triangle ABC \Leftrightarrow z_A(z_N - z_P) + z_B(z_P - z_M) + z_C(z_M - z_N) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 - 2\ell\alpha)\left(z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 - a_A z_B - z_B z_C - z_C z_A\right) = 0.$$

Deoarece $\alpha \notin \mathbb{R}$, relaţia anterioară este echivalentă cu

$$z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A,$$

adică este echivalentă cu faptul că $\triangle ABC$ este echilateral.

b) Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Fie $\{X\} = AN \cap BP$, $\{Y\} = BP \cap CM$ şi $\{Z\} = AN \cap CM$. Atunci, $\mu(\widehat{YXZ}) = \mu(\widehat{A})$, $\mu(\widehat{XYZ}) = \mu(\widehat{B})$, deci $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$. Fie $\overrightarrow{i} = \dfrac{1}{AN} \cdot \overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{CM} \cdot \overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{k} = \dfrac{1}{BP} \cdot \overrightarrow{BP}$.
Avem $\overrightarrow{AN} = AN \cdot \overrightarrow{i} = \ell \cdot b \cdot \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{CM} = CM \cdot \overrightarrow{j} = \ell \cdot a \cdot \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{BP} = BP \cdot \overrightarrow{k} = \ell \cdot c \cdot \overrightarrow{k}$.
Rezultă

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} = \ell\left(b \cdot \overrightarrow{i} + a \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}\right).$$

Fie $S \in XZ$ astfel încât $\overrightarrow{XS} = b \cdot \overrightarrow{i}$ şi fie R astfel încât $\overrightarrow{SR} = a \cdot \overrightarrow{j}$.
Deoarece $\widehat{S} \equiv \widehat{Z} \equiv \widehat{C}$, obţinem că $\triangle XRS \equiv \triangle ABC$, deci $\overrightarrow{RX} = c \cdot \overrightarrow{k}$.
Deoarece $\widehat{SXR} \equiv \widehat{ZXY}$, rezultă că $R \in XY$.
Avem $\overrightarrow{XS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RX} = \overrightarrow{0}$, deci $b \cdot \overrightarrow{i} + a \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$.

9. *Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \leq m_a^2 \cdot \frac{l_a}{h_a} + m_b^2 \cdot \frac{l_b}{h_b} + m_c^2 \cdot \frac{l_c}{h_c},$$

unde l_a, m_a *şi* h_a *sunt lungimile bisectoarei, medianei şi respectiv a înălţimii din vârful A.*

Vasile Ienuţaş şi Mihai Vijdeluc

Soluţie. Avem cunoscute inegalităţile $m_a l_a \geq p(p-a)$ şi

$$\frac{m_a}{h_a} \geq \frac{b^2+c^2}{2bc} \Rightarrow m_a^2 \cdot \frac{l_a}{h_a} \geq \frac{b^2+c^2}{2} \cdot \frac{p(p-a)}{bc} \geq bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2}\,.$$

Analog găsim $m_b^2 \cdot \dfrac{l_b}{h_b} \geq ac \cdot \cos^2 \dfrac{B}{2}$ şi $m_c^2 \cdot \dfrac{l_c}{h_c} \geq ab \cdot \cos^2 \dfrac{C}{2}$.
Dacă le adunăm membru cu membru obţinem:

$$bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \leq m_a^2 \cdot \frac{l_a}{h_a} + m_b^2 \cdot \frac{l_b}{h_b} + m_c^2 \cdot \frac{l_c}{h_c}\,.$$

10. *Pe laturile hexagonului convex $ABCDEF$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABM, CDN, EFP spre exterior şi BCS, DER, FAT spre interior. Să se arate că triunghiurile MNP şi SRT au acelaşi centru de greutate.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Notăm cu literele mici corespunzătoare afixele vârfurilor. Punctul M este transformatul prin rotaţia de centru B şi unghi $\dfrac{\pi}{3}$ a punctului A. Atunci:

$$m = b + (a-b)\varepsilon, \text{ unde } \varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\,.$$

Analog $n = d + (c-d)\varepsilon$ şi $p = f + (e-f)\varepsilon$, respectiv $s = b + (c-b)\varepsilon$, $r = d + (e-d)\varepsilon$, $t = f + (a-f)\varepsilon$. Obţinem $m+n+p = s+r+t$, deci triunghiurile MNP şi RST au acelaşi centru de greutate.

11. *Să se arate că, dacă $w, z \in \mathbb{C}$ cu $|w| = r > 0$ şi $|z| = 1$, atunci:*

$$|rz+w| + |z^2+r| + |z^3+w| \geq 2r.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie.

$$\begin{aligned} &|rz+w| + |z^2+r| + |z^3+w| \\ &= \big(|z^3+w| + |rz+w|\big) + |z^2+r| \geq |z^3-rz| + |z^2+r| \\ &= |z|\cdot|z^2-r| + |z^2+r| = |z^2-r| + |z^2+r| \geq 2r. \end{aligned}$$

12. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2^x + 3^x + 2\cdot 4^x = 6^x + 7^x + x - 1.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Din $2^x + 3^x + 2\cdot 4^x - 6^x - 7^x = x - 1$ rezultă

$$6^x\left[\left(\frac{2}{6}\right)^x - \left(\frac{3}{6}\right)^x + 2\left(\frac{4}{6}\right)^x - 1 - \left(\frac{7}{6}\right)^x\right] = x - 1. \qquad (1)$$

Dacă $x > 1$, membrul stâng din (1) este negativ iar membrul drept strict pozitiv, deci nu putem avea egalitate.
Analog, dacă $x < 1$, membrul stâng este pozitiv iar membrul drept strict negativ, deci nu putem avea egalitate. Rămâne $x = 1$, care verifică ecuaţia.

13. *Să se arate că*

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \geq \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} I_m(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1),\ \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} |z_1 - i\alpha\,\overline{z}_2|^2 &= (z_1 - i\alpha\,\overline{z}_2)(\overline{z}_1 + i\alpha\, z_2) = |z_1|^2 + \alpha^2|z_2|^2 + i\alpha(z_1z_2 - \overline{z_1z_2}) \\ &= |z_1|^2 + \alpha^2|z_2|^2 - 2\alpha I_m(z_1z_2). \end{aligned}$$

Analog

$$|z_2 - i\alpha\,\overline{z}_3|^2 = |z_2|^2 + \alpha^2|z_3|^2 - 2\alpha\, I_m(z_2z_3)$$

şi

$$|z_3 - i\alpha\,\overline{z}_1|^2 = |z_3|^2 + \alpha^2|z_1|^2 - 2\alpha\, I_m(z_1z_3).$$

Însumând cele trei relaţii obţinem:

$$\begin{aligned} &(1+\alpha^2)\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right) - 2\alpha\left[I_m(z_1z_2) + I_m(z_2z_3) + I_m(z_3z_1)\right] \\ &= |z_1 - i\alpha\,\overline{z}_2|^2 + |z_2 - i\alpha\,\overline{z}_3|^2 + |z_3 - i\alpha\,\overline{z}_1|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

şi de aici deducem relaţia cerută.

14. *a) Aduceţi la o formă mai simplă expresia:*

$$1 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + \cdots + (n+1)C_n^nx^n;\ n \geq 1, x \in \mathbb{R}.$$

b) Arătaţi că:

$$1 + 2(n-1)C_n^1 + 3(n-1)^2C_n^2 + \cdots + (n+1)(n-1)^nC_n^n = n^{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ionel Tudor

Soluţie. a) Notăm cu $f(x)$ expresia din enunţ. Atunci

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n}(1+k)C_n^kx^k = \sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k + \sum_{k=0}^{n}kC_n^kx^k \\ &= (1+x)^n + \sum_{k=1}^{n}nx\cdot C_{n-1}^{k-1}x^{k-1} = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Deci $\quad f(x) = (1+x)^{n-1}(1+x+nx).$

b) Pentru $x = n-1$, $n \in \mathbb{N}^*$, din relaţia de la punctul a) obţinem:

$$\begin{aligned} f(n-1) &= 1 + 2(n-1)C_n^1 + 3(n-1)C_n^2 + \ldots (n+1)(n-1)^n C_n^n \\ &= n^{n-1}(1+n-1+n^2-n) = n^{n+1}. \end{aligned}$$

15. *Fie S aria triunghiului ABC şi a, b, c lungimile laturilor sale. Să se demonstreze că:*

$$bc \cdot \cos\frac{A}{2} + ac \cdot \cos\frac{B}{2} + ab \cdot \cos\frac{C}{2} \geq 6S.$$

Mihai Vijdeluc

Soluţie. Avem $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ şi

$$8 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \leq 1 \qquad (*)$$

Înlocuim în inegalitatea de demonstrat şi obţinem:

$$\begin{aligned} &\sqrt{bcp(p-a)} + \sqrt{acp(p-b)} + \sqrt{abp(p-c)} \geq 6\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \,|\, : S \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}} + \sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}} + \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}} \geq 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geq 6. \end{aligned}$$

Ultima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor şi inegalitatea $(*)$

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geq 3\sqrt{\frac{1}{\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Clasa a XI-a

1. *Dacă $(F_n)_{n \geq 0}$, $(L_N)_{n \geq 0}$, $F_0 = 0$, $L_0 = 2$, $F_1 = L_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, sunt respectiv şirurile lui Fibonacci şi Lucas, să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{L_n^2}\right)^{F_n^2}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Se ştie că $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, $L_n = \alpha^n + \beta^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{L_n^2}\right)^{F_n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{L_n^2}\right)^{L_n^2}\right)^{\left(\frac{F_n}{L_n}\right)^2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n^2}{L_n^2}} \quad (1)$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{L_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}(\alpha^n+\beta^n)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n^2}{L_n^2} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{L_n}\right)^2 = \frac{1}{5}$ şi atunci din (1) obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{L_n^2}\right)^{F_n^2} = e^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{e}.$$

2. *Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ o matrice neinversabilă. Dacă $\det(A^2 - 4\cdot I_3) = -36$, demonstraţi că $\det(A - n\cdot I_3)$ este un număr întreg divizibil cu 6, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.*

Florin Bojor

Soluţie. Fie $f_A = -\det(A - xI_3)$ polinomul caracteristic al matricei A, atunci $f_A = X^3 - aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$, unde $a = Tr(A)$, $b = Tr(A^*)$ şi $c = \det(A) = 0$.
Dar $\det(A^2 - 4I_3) = \det(A - 2I_3)\det(A + 2I_3) = f_A(2)f_A(-2)$ deci

$$f_A(2)f_A(-2) = -36.$$

Dar $f_A(2)$ este un număr divizibil cu 2 şi $f_A(2) + f_A(-2) = -8a$, prin urmare $(f_A(2), f_A(-2)) \in \{(6,-6); (-6,6)\}$.
Analizând aceste cazuri, vom obţine polinoamele $f_A = X^3 - X$ şi $f_A = X^3 - 7X$.
Dar $\det(A - nI_3) = f_A(n) = (n-1)n(n+1)$ sau

$$\det(A - nI_3) = f_A(n) = (n-1)n(n+1) - 6n,$$

de unde rezultă concluzia.

3. *Se consideră şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 0}$*, definit prin* $x_0 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^3 + x_n}{x_n + 2}}$, $\forall\, n \geq 0$*. Să se demonstreze că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.*

Meda Bojor

Soluţie. Evident $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{\frac{x_n^3 + x_n}{x_n + 2}} - x_n = \frac{\dfrac{x_n^3 + x_n}{x_n + 2} - x_n^2}{\sqrt{\dfrac{x_n^3 + x_n}{x_n + 2}} + x_n}$$

$$= \frac{x_n(1 - 2x_n)}{(x_n + 2)\left(\sqrt{\dfrac{x_n^3 + x_n}{x_n + 2}} + x_n\right)}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Cazul 1. Dacă $x_0 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, atunci se demonstrează prin inducţie că $x_n < \dfrac{1}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, unde pasul de inducţie este

$$x_{k+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_k^3 + x_k}{x_k + 2} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x_k^3 + 3x_k - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x_k - \frac{1}{2}\right)(4x_k^2 + 2x_k + 4) < 0(A).$$

Prin urmare, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit şi din (1) rezultă că şirul este strict crescător, prin urmare convergent. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, rezultă că $\ell = \sqrt{\dfrac{\ell^3 + \ell}{\ell + 2}} \Leftrightarrow 2\ell^2 = \ell \Leftrightarrow \ell \in \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$, unde $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dar şirul este strict crescător şi cu termeni pozitivi, deci $\ell \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

Cazul 2. Dacă $x_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ şi se demonstrează prin inducţie că $x_n = \dfrac{1}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

Cazul 3. Dacă $x_0 > \dfrac{1}{2}$, analog cu cazul 1 se demonstrează că şirul are termeni mai mari ca $\dfrac{1}{2}$ şi este strict descrescător. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

În consecinţă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi limita sa este $\dfrac{1}{2}$.

4. *Să se arate că ecuaţia* $\log_3 x - x^2 - x + 11 = 0$ *are exact două soluţii reale* x_1 *şi* x_2*, iar* $0 < x_1 \cdot x_2 < \dfrac{1}{3^9}$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log x - x^2 - x + 11$ este strict concavă ca şi o sumă de funcţii strict concave. Aşadar, ecuaţia $f(x)=0$ are cel mult două soluţii reale. Se observă că $f(3)=0$, deci $x_1 = 3$ e soluţie. Cum

$$f\left(\frac{1}{3^1}\right)\cdot f\left(\frac{1}{3^{11}}\right) = \left(1-\frac{1}{3^{20}}-\frac{1}{3^{10}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3^{22}}-\frac{1}{3^{11}}\right) < 0$$

şi f e continuă, rezultă că $x_2 \in \left(\dfrac{1}{3^{11}},\dfrac{1}{3^{10}}\right)$, deci $x_1\cdot x_2 = 3\cdot x_2 \in \left(\dfrac{1}{3^{10}},\dfrac{1}{3^{9}}\right)$. Aşadar, are loc concluzia problemei.

5. *Se consideră funcţia* $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2+4X+3I_3-{}^tX$. *Arătaţi că există o infinitate de perechi de matrice* $(A,B)\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *astfel încât* $f(A)=f(B)$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Căutăm $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\alpha_1\neq\alpha_2$, astfel încât $f(\alpha_1\cdot I_3)=f(\alpha_2\cdot I_3)$. Relaţia

$$\begin{aligned} f(\alpha_1\cdot I_3)=f(\alpha_2\cdot I_3) &\Leftrightarrow (\alpha_1^2+3\alpha_1+3)I_3=(\alpha_2^2+3\alpha_2+3)I_3\\ &\Leftrightarrow \alpha_1^2+3\alpha_1+3=\alpha_2^2+3\alpha_2+3\\ &\Leftrightarrow (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+3)=0 \overset{\alpha_1\neq\alpha_2}{\Leftrightarrow}\\ &\Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2+3=0\Leftrightarrow \alpha_2=-\alpha_1-3. \end{aligned}$$

Aşadar, perechea $(A,B)=(\alpha_1\cdot I_3,(-\alpha_1-3)I_3)$, unde α_1 este număr real arbitrar, verifică relaţia $f(A)=f(B)$, deci are loc concluzia.

6. *Fie* $n,m\in\mathbb{N}^*$, *matricea inversabilă* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *cu* $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{i_j}^2|=1$. *Să se arate că* $\det(A^m-I_n)\neq 0$.

Dana Heuberger

Soluţie. Vom folosi următoarea

Propoziţie (Schur). *Fie matricea* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, *cu valorile proprii* $\lambda_1,\lambda 2,\ldots,\lambda_n$. *Atunci,* $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|\lambda_i|^2\leq\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$.

Deoarece $\det(A) \neq 0$, valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ale lui A sunt nenule. Folosind Propoziţia precedentă deducem că

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1$$

Deoarece niciunul dintre numerele reale $|\lambda_k|^2$ nu este 0, deducem că

$$\forall\, k = \overline{1,n},\ |\lambda_k| < 1.$$

Aşadar $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ cu $|\alpha| \geq 1$, $det(I_n - \alpha A) \neq 0$.
Pentru $k = \overline{1,m}$, fie ε_k o rădăcină de ordinul m a unităţii. Atunci, $|\varepsilon_k| = 1$, deci $\det(A - \varepsilon_k \cdot I_n) \neq 0$. Obţinem

$$\det(A^m - I_n) = \det(A - \varepsilon_0 \cdot I_n) \cdot \det(A - \varepsilon_1 \cdot I_n) \cdot \ldots \cdot \det(A - \varepsilon_{m-1} \cdot I_n) \neq 0.$$

7. *Fie $\sigma, \varepsilon \in S_n$. Să se arate că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{\sigma(k)}}{\varepsilon(k)}$ este mărginit.*

Dana Heuberger

Soluţie. Vom folosi următoarea

Propoziţie (inegalitatea rearanjărilor). *Fie numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n$ şi $y_1, y_2, \dots, y_n$ cu $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ şi $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. Atunci, pentru orice $\alpha \in S_n$*

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n &\leq x_1y_{\alpha(1)} + x_2y_{\alpha(2)} + \dots + x_ny_{\alpha(n)} \\ &\leq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1. \end{aligned}$$

Revenim la soluţia problemei.

Dacă $\varepsilon(k) = j$, atunci $\dfrac{\sqrt{\sigma(k)}}{\varepsilon(k)} = \dfrac{\sqrt{\sigma\varepsilon^{-1}(j)}}{j}$, deci $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\sqrt{\alpha(j)}}{j}$, unde $\alpha = \sigma\varepsilon^{-1}$.
Alegem şirurile invers ordonate

$$\begin{aligned} &x_1 = \frac{1}{1},\ x_2 = \frac{1}{2}, \dots, x_n = \frac{1}{n} \\ &y_1 = \sqrt{1},\ y_2 = \sqrt{2}, \dots, y_n = \sqrt{n} \end{aligned}$$

Folosind partea din dreapta a inegalităţii rearanjărilor, obţinem:

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n} \cdot \beta_n, \text{ unde } \beta_n = \frac{\sqrt{n}}{1} + \frac{\sqrt{n-1}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{1}}{n}.$$

Avem

$$\beta_n^2 = \left(\frac{\sqrt{n}}{1} + \frac{\sqrt{n-1}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{1}}{n}\right)^2 \overset{CBS}{<} (1+2+\cdots+n)\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

Apoi,

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n} \cdot \beta_n < \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{12}},$$

rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

8. *Fie $k \in (1, \infty)$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ o funcţie cu proprietatea că* $\lim\limits_{x\to\infty} x^k f(x^{k-1}) = a \in \mathbb{R}$.

Fie $a_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este convergent.

Dana Heuberger şi Cristian Heuberger

Soluţie. a) Făcând substituţia $y = x^{\frac{1}{k-1}}$ în limita din ipoteză, obţinem:

$$\lim_{y\to\infty} y^{\frac{k}{k-1}} \cdot f(y) = a \tag{1}$$

Aşadar

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{x}{k-1}} \cdot f(x)}{x^{\frac{x}{k-1}}} \overset{(1)}{=} \frac{a}{\infty} = 0.$$

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Arătăm că şirul $(x_n)n \geq 1$ este convergent, folosind teorema Cesaro-Stolz.

Fie $\varepsilon > 0$. există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice $x > \delta_\varepsilon$, $\left|x^{\frac{x}{k-1}} \cdot f(x) - a\right| < \varepsilon$.

Atunci,

$$\forall\, x > \delta_\varepsilon,\ \frac{a-\varepsilon}{x^{\frac{k}{k-1}}} < f(x) < \frac{a+\varepsilon}{x^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Fie $n_\varepsilon = [\delta_\varepsilon] + 1$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_\varepsilon$, obţinem

$$(a-\varepsilon)\left(\frac{1}{n_\varepsilon^{\frac{k}{k-1}}} + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{k}{k-1}}}\right) < f(n_\varepsilon) + \cdots + f(n) < (a+\varepsilon)\left(\frac{1}{n_\varepsilon^{\frac{k}{k-1}}} + \cdots + \frac{1}{n^{\frac{k}{k-1}}}\right).$$

Fie $\alpha_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^{\frac{k}{k-1}}}+\cdots+\frac{1}{n^{\frac{k}{k-1}}}$. Deoarece $\frac{k}{k-1}>1$, avem $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha_n=\alpha\in(1,\infty)$. Obţinem

$$(a-\varepsilon)(\alpha_n-\alpha_{n_\varepsilon-1})<a_n-a_{n_\varepsilon-1}<(a+\varepsilon)(\alpha_n-\alpha_{n_\varepsilon-1}).$$

Aşadar,

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \forall\,n\geq n_\varepsilon,\ a-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n_\varepsilon-1}}{\alpha_n-\alpha_{n_\varepsilon-1}}<a+\varepsilon.$$

Rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_n-a_{n_\varepsilon-1}}{\alpha_n-\alpha_{n_\varepsilon-1}}=a$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}(a_n-a_{n_\varepsilon-1})=a(\alpha-\alpha_{n_\varepsilon-1})$, adică

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a_{n_\varepsilon-1}+a(\alpha-\alpha_{n_\varepsilon-1})\overset{not}{=}\beta>0.$$

Atunci, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{(n+1)-n}=\lim\limits_{x\to\infty}a_{n+1}=\beta$ şi din teorema Cesaro-Stolz rezultă că şirul $(x_n)_{n>1}$ este convergent la β.

9. *Se consideră şirul* $(a_n)_{n\geq1}$ *cu* $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+n!n\,a_n},\ n\geq1.$ *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. $\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}=(k+1)!-k!$, $\forall\,k\in\mathbb{N}^*$, deci

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)!-k!\right).$$

Obţinem $\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)!$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e-1.$$

10. *Se consideră matricea* $A=\begin{pmatrix}a+1&2a&5a\\-a&-2a+1&-5a\\2a&4a&10a+1\end{pmatrix}$, *unde* $a\in\mathbb{R}$. *Să se calculeze* A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Adrian Pop

Soluţie. $A(a)=I_3+a\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & -2 & -5\\ 2 & 4 & 10\end{pmatrix}}_{B}=I_3+a\cdot B$; $B^2=9B$;

$$A(a)\cdot B(b)=A(a+b+9ab)=A\left(9\left(a+\frac{1}{9}\right)\left(b+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}\right).$$

Se demonstrează prin inducţie matematică:

$$A^n(a)=A\left(9^{n-1}\left(a+\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{9}\right).$$

11. *Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc relaţia:*

$$\frac{1}{r^3}\sum a^3\cos B\cos C\geq 16\left(\sum\sin A\right)\left(\sum\cos^2 A\right).$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Fie

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\cos C & c\cos B\\ b & c\cos A & a\cos C\\ c & a\cos B & b\cos A\end{vmatrix}=8R^3\begin{vmatrix}\sin A & \sin B\cos C & \sin C\cos B\\ \sin B & \sin C\cos A & \sin A\cos C\\ \sin C & \sin A\cos B & \sin B\cos A\end{vmatrix}^{C_2+C_3}$$

$$=8R^3\begin{vmatrix}\sin A & \sin(B+C) & \sin C\cos B\\ \sin B & \sin(A+C) & \sin A\cos C\\ \sin C & \sin(A+B) & \sin B\cos A\end{vmatrix}$$

$$=8R^3\begin{vmatrix}\sin A & \sin(\pi-A) & \sin C\cos B\\ \sin B & \sin(\pi-B) & \sin A\cos C\\ \sin C & \sin(\pi-C) & \sin B\cos A\end{vmatrix}$$

$$=8R^3\begin{vmatrix}\sin A & \sin A & \sin C\cos B\\ \sin B & \sin B & \sin A\cos C\\ \sin C & \sin C & \sin B\cos A\end{vmatrix}=0.$$

Pe de altă parte

$$0=\Delta=\begin{vmatrix}a & b\cos C & c\cos B\\ b & c\cos A & a\cos C\\ c & a\cos B & b\cos A\end{vmatrix}=abc\cos^2 A+abc\cos^2 C+abc\cos^2 A$$

$$-c^3\cos A\cos B-a^3\cos B\cos C-b^3\cos A\cos C$$

$$=abc\sum\cos^2 A-\sum a^3\cos B\cos C$$

$$=4RS\sum\cos^2 A-\sum a^3\cos B\cos C$$

Rezultă

$$\sum a^3 \cos B \cos C = 4RS \sum \cos^2 A = 4Rrp \sum \cos^2 A$$
$$= 4Rr \cdot \frac{a+b+c}{2} \sum \cos^2 A$$
$$\frac{\sum a^3 \cos B \cos C}{\sum \cos^2 A} = 2Rr(a+b+c) = 2Rr \cdot 2R \sum \sin A = 8R^2 r \sum \sin A$$

Pe de altă parte, din inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$,

$$\frac{\sum a^3 \cos B \cos C}{\left(\sum \sin A\right)\left(\sum \cos^2 A\right)} = 8R^2 r \geq 8 \cdot (2r)^2 \cdot r = 16r^3$$
$$\frac{1}{r^3} \sum a^3 \cos B \cos C \geq 16 \left(\sum \sin A\right)\left(\sum \cos^2 A\right)$$

12. *Demonstraţi că, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci*

$$\frac{a \cdot e^a + b \cdot e^b + c \cdot e^c + b}{e^a + e^b + e^c} \geq 1 + \ln 2.$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc

Soluţie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x > 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ convexă $\Rightarrow$

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$
$$e^x \geq e^a + e^a(x - a);\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fie $x = \ln 2 \Rightarrow e^{\ln 2} \geq e^a + e^a(\ln 2 - a)$

$$2 \geq e^a + e^a \ln 2 - ae^a \Rightarrow 2 \geq e^a(1 + \ln 2) - ae^a$$
$$ae^a + 2 \geq e^a(1 + \ln 2)$$

Prin analogie

$$be^b + 2 \geq e^b(1 + \ln 2);$$
$$ce^c + 2 \geq e^c(1 + \ln 2)$$

Prin adunare

$$ae^a + be^b + ce^c + 6 \geq (1 + \ln 2)(e^a + e^b + e^c)$$
$$\frac{ae^a + be^b + ce^c + 6}{e^a + e^b + e^c} \geq 1 + \ln 2.$$

13. *Demonstraţi că, dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, atunci*

$$\Delta=\begin{vmatrix} s & \frac{a^2b}{a^3+b} & \frac{b^2c}{b^3+c} & \frac{c^2a}{c^3+a}\\ \frac{a^2b}{a^3+b} & s & \frac{c^2a}{c^3+a} & \frac{b^2c}{b^3+c}\\ \frac{b^2c}{b^3+c} & \frac{c^2a}{c^3+a} & s & \frac{a^2b}{a^3+b}\\ \frac{c^2a}{c^3+a} & \frac{b^2c}{b^3+c} & \frac{a^2b}{a^3+b} & s \end{vmatrix}>0,\quad \textit{unde } s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc

Soluţie.

$$a^3+b\ge 2a\sqrt{ab}\Rightarrow a^3-2a\sqrt{ab}+b\ge 0\Rightarrow \left(a\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$$

$$\frac{a^2b}{a^3+b}\le\frac{a^2b}{2a\sqrt{ab}}=\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{2}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{4}$$

Analog, $\dfrac{b^2c}{b^3+c}\le\dfrac{b+c}{4}$; $\dfrac{c^2a}{c^3+a}\le\dfrac{c+a}{4}$.

Prin adunare, $\sum\dfrac{a^2b}{a^3+b}\le\dfrac{a+b+c}{2}=s$

$$\Rightarrow p\ge\sum\frac{a^2b}{a^3+b}. \tag{1}$$

Lemă. Dacă $x,y,z,t\in\mathbb{R}$, atunci

$$\Delta'=\begin{vmatrix} x & y & z & t\\ y & x & t & z\\ z & t & x & y\\ t & z & y & x\end{vmatrix}=(x+y+z+t)(x-y+z-t)(x+y-z-t)(x-y-z+t)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t\\ y & x & t & z\\ z & t & x & y\\ t & z & y & x\end{vmatrix}^{L_1+L_2+L_3+L_4}=(x+y+z+t)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ y & x & t & z\\ z & t & x & y\\ t & z & y & x\end{vmatrix}^{C_4-C_3+C_2-C_1}$$

$$=(x+y+z+t)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ y & x & t & z-t+x-y\\ z & t & x & -(z-t+x-y)\\ t & z & y & z-t+x-y\end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z+t)(x-y+z-t)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ y & x & t & 1 \\ z & t & x & -1 \\ t & z & y & 1 \end{vmatrix}^{C_2-C_1}_{C_3-C_1}$$

$$= (x+y+z+t)(x-y+z-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & x-y & t-z & 1 \\ z & t-z & x-z & -1 \\ t & z-t & y-t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z+t)(x-y+z-t)\begin{vmatrix} x-y & t-z & 1 \\ t-z & x-z & -1 \\ z-t & y-t & 1 \end{vmatrix}^{L_1+L_2}_{L_3+L_2}$$

$$= (x+y+z+t)(x-y+z-t)\begin{vmatrix} x-y+t-z & x-y-z+t \\ 0 & x-z+y-t \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z+t)(x-y+z-t)(x-y+t-z)(x+y-z-t).$$

Dacă $x, y, z, t > 0$; $x > y+z+t$, atunci $\Delta' > 0$

$$\begin{aligned} x-y+z-t > y+z+t-y+z-t = 2z > 0 \\ x+y-z-t > y+z+t+y-z-t = 2y > 0 \\ x-y-z+t > y+z+t-y-z+t = 2t > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Fie $x = \dfrac{a^2b}{a^3+b}$; $y = \dfrac{b^2c}{b^3+c}$; $z = \dfrac{c^2a}{c^3+a}$. Din (1) şi (2) rezultă $\Delta = \Delta' > 0$.

14. *Demonstraţi că, dacă $a, b, c \in [0, \infty)$, atunci*

$$2(a+b+c)(a+2b+3c) \geq \left(\sqrt{b(a+b)} + 2\sqrt{c(b+c)} + \sqrt{a(a+c)}\right)^2$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} \sqrt{a+b} & \sqrt{b+c} & \sqrt{a} & \sqrt{c} \\ \sqrt{b} & \sqrt{c} & \sqrt{a+c} & \sqrt{b+c} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$

$$T_A = \begin{pmatrix} \sqrt{a+b} & \sqrt{b} \\ \sqrt{b+c} & \sqrt{c} \\ \sqrt{a} & \sqrt{a+c} \\ \sqrt{c} & \sqrt{b+c} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

$$A\cdot {}^TA = \begin{pmatrix} \sqrt{a+b} & \sqrt{b+c} & \sqrt{a} & \sqrt{c} \\ \sqrt{b} & \sqrt{c} & \sqrt{a+c} & \sqrt{b+c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a+b} & \sqrt{b} \\ \sqrt{b+c} & \sqrt{c} \\ \sqrt{a} & \sqrt{a+c} \\ \sqrt{c} & \sqrt{b+c} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Din Teorema Binet-Cauchy $\det(A\cdot {}^TA) \geq 0$

$$A\cdot {}^TA = \begin{pmatrix} a+b+b+c+a+c & \sqrt{b(a+b)}+2\sqrt{c(b+c)}+\sqrt{a(a+c)} \\ \sqrt{b(a+b)}+2\sqrt{c(b+c)}+\sqrt{(a+c)a} & b+c+a+c+b+c \end{pmatrix}$$

$$A\cdot {}^TA = \begin{pmatrix} 2a+2b+2c & \sqrt{b(a+b)}+2\sqrt{c(b+c)}+\sqrt{a(a+c)} \\ \sqrt{b(a+b)}+2\sqrt{c(b+c)}+\sqrt{a(a+c)} & a+2b+3c \end{pmatrix}$$

$$\det(A\cdot {}^TA) \geq 0 \Rightarrow (2a+2b+2c)(a+2b+3c) \geq \left(\sqrt{b(a+b)}+2\sqrt{c(b+c)}+\sqrt{a(a+c)}\right)^2$$

$$2(a+b+c)(a+2b+3c) \geq \left(\sqrt{b(a+b)}+2\sqrt{c(b+c)}+\sqrt{a(a+c)}\right)^2.$$

15. *Fie matricea* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *astfel încât* $\det(A+I_2) = \det(A+2I_2)$. *Să se arate că* $3\det A = 2\det(A+I_2) + \det(A-I_2)$.

Mihai Vijdeluc

Soluţie. Fie $P(X) = \det(A+X\cdot I_2) = X^2 + a\cdot X + b$, unde $b = P(0) = \det(A)$. Din problemă avem $P(1) = P(2) \Rightarrow 1+a+b = 4+2a+b \Rightarrow a = -3$. Atunci

$$\begin{aligned} 2\cdot P(1) + P(-1) &= 2(1+a+b) + (1-a+b) = 2+2a+2b+1-a+b \\ &= a+3b+3 = -3+3b+3 = 3\cdot\det(A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3\cdot\det(A) = 2\cdot\det(A+I_2) + \det(A-I_2). \end{aligned}$$

Clasa a XII-a

1. *Fie* $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $b^2 < (a+c)^2$. *Calculaţi*

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{ax^{2n}+bx^n+c}{(x^2+1)\left[(a+c)x^{2n}+2bx^n+(a+c)\right]}\,dx.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$ şi obţinem

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\dfrac{a}{t^{2n}} + \dfrac{b}{t^n} + c}{\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)\left[\dfrac{a+c}{t^{2n}} + \dfrac{2b}{t^n} + (a+c)\right]} \, \frac{-1}{t^2}\, dt$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{a + bt^n + ct^{2n}}{(t^2+1)\left[(a+c) + 2bt^n + (a+c)t^{2n}\right]}\, dt = J.$$

Din $I = J$ şi $I + J = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt = \operatorname{arctg} t \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, rezultă $I = \dfrac{\pi}{12}$.

2. *Să se calculeze primitivele funcţiei*

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x) - x}{(x + e^x)^2}.$$

Florin Bojor

Soluţie. Scriem funcţia f sub forma $f(x) = x\dfrac{e^x(x-2)-1}{(x+e^x)^2}$ şi determinăm funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de forma $g(x) = ae^x + bx + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\left(\frac{g(x)}{x+e^x}\right)' = \frac{e^x(x-2)-1}{(x+e^x)}, \; \forall\, x > 0.$$

Efectuând calculele şi identificând coeficienţii se obţine $c = 1$ şi $a - b = 1$. Deci putem alege $a = 2$, $b = 1$ şi avem

$$\int f(x)dx = \int x\left(\frac{2e^x + x + 1}{x + e^x}\right)' dx = x \cdot \frac{2e^x + x + 1}{x+e^x} - \int \frac{2e^x + x + 1}{x + e^x}\, dx$$
$$= x \cdot \frac{2e^x + x + 1}{x + e^x} - \int dx - \int \frac{e^x + 1}{e^x + x}\, dx$$
$$= \frac{x(e^x + 1)}{x + e^x} - \ln(e^x + x) + C.$$

3. *Fie* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă care verifică relaţia* $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt \geq 2 - x$, $\forall\, x \in [0, 1]$. *Să se demonstreze că* $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{27}{4}$.

Florin Bojor

Soluţie. Deoarece funcţia f este continuă va admite primitive. Dacă F e o primitivă a sa, atunci

$$\int_x^1 f(t)dt \geq 2-x,\ \forall\, x\in[0,1] \Rightarrow \int_0^1 (F(1)-F(x))dx \geq \int_0^1 (2-x)dx \Leftrightarrow$$

$$F(1)-\int_0^1 x'F(x)dx \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow F(1)-F(1)+\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{3}{2}.$$

Pentru orice $k>0$ avem

$$\int_0^1 (f(x)-kx)^2 dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq 2k\int_0^1 xf(x)dx - k^2\int_0^1 x^2dx \geq 3k-\frac{k^2}{3}.$$

Dar maximul funcţiei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(k)=3k-\dfrac{k^2}{3}$ este $\dfrac{27}{4}$ şi se obţine pentru $k=\dfrac{9}{2}$.

4. *Să se determine mulţimea*

$$A=\{\widehat{r}\in\mathbb{Z}_{168}\,|\,\exists\, a,n\in\mathbb{N}^* \text{ astfel încât } a=5^{25^n-1} \text{ şi } \widehat{a}=\widehat{r}\}.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Cum 25^n-1 este par, avem că $a=5^{25^n-1}=5^{2k}=25^k=M+1$, deci

$$a\equiv 1 \pmod{24} \tag{1}$$

Pe de altă parte, $5^6\equiv 1 \pmod 7$.
Cum $a=5^{25^n-1}=5^{(25-1)(25^{n-1}+25^{n-2}+\cdots+25+1)}=5^{24\cdot m}$ şi $5^{24}\equiv 1 \pmod 7$, găsim că

$$a\equiv 1 \pmod 7 \tag{2}$$

Din (1) şi (2), cum $(24,7)=1$, obţinem că $(a-1)\,\vdots\,168$, deci $a\equiv 1 \pmod{168}$, adică $\widehat{a}=\widehat{1}$. Aşadar, $A=\{\widehat{1}\}$.

5. *a) Să se arate că există o infinitate de funcţii $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ astfel încât*

$$\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{9}.$$

b) Să se arate că, dacă $f:[0,1]\to[0,\infty)$ este o funcţie continuă cu proprietatea că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{9}$, atunci există $a\in[0,1]$ astfel încât $f(a)=a^2$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. *a*) Se observă că $\int_0^1 \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{x^3}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9}$, deci $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ este soluţie. Pentru fiecare mulţime $A \subset [0,1]$, considerăm funcţia

$$f_A : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_A(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{3}}, & x \in A \\ \frac{-x}{\sqrt{3}}, & x \in [0,1]\backslash A. \end{cases}$$

Atunci $f_A^2(x) = \frac{x^2}{3}$ şi f_A este soluţie. Aşadar are loc concluzia.

b) Aplicând inegalitatea $C - B - S$, obţinem:

$$1 = 9\int_0^1 f^2(x)dx \geq 9\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2, \text{ deci } \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx.$$

Atunci $\int_0^1 \big(f(x) - x^2\big)\, dx \leq 0$ şi, folosind eventual teorema de medie, deducem că există $c \in [0,1]$ astfel încât

$$f(c) - c^2 \leq 0.$$

Funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x^2$ este continuă şi

$$g(0) \cdot g(c) = f(0) \cdot \big(f(c) - c^2\big) \leq 0,$$

deci există $a \in [0,c]$ aşa încât $g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = a^2$.

6. *Fie K un corp finit cu cel puţin 5 elemente. Să se arate că oricum am alege elementele distincte $a, b, c \in K\backslash\{0,1\}$, cel puţin unul dintre a, b, c, ab, ac, bc, abc este un cub perfect.*

Dana Heuberger

Soluţie. Fie $a, b, c \in K\backslash\{0,1\}$. Atunci a, b şi c sunt inversabile în K. Fie α un generator al grupului ciclic $(K^*, \cdot)$. Atunci, există $i, j, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = \alpha^i$, $b = \alpha^j$, $c = \alpha^k$. Obţinem $ab = \alpha^{i+j}$, $bc = \alpha^{j+k}$, $ac = \alpha^{i+k}$, $abc = \alpha^{i+j+k}$. Deoarece cel puţin unul dintre numerele $i, j, k, i+j, j+k, i+k, i+j+k$ este divizibil cu 3, rezultă că cel puţin unul dintre a, b, c, ab, ac, bc, abc este un cub perfect.

7. *Fie inelul $(A, +, \cdot)$. Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice $a, b \in A$ avem $(a+b)^{2k+1} = a^{2k} + b^{2k}$ şi $(a+b)^{2k+3} = a^{2k+2} + b^{2k+2}$, arătaţi că inelul este comutativ.*

Dana Heuberger

Soluţie. Notăm cu (1) şi (2) egalităţile din ipoteză.
Pentru $a = b = 1$ în (1), obţinem că $2^{2k+1} = 2$. Pentru $a = 2$, $b = 0$ în (1), avem $2^{2k+1} = 2^{2k}$. Rezultă $2 = 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k} = 2 \cdot 2$, adică $2 = 0$, deci inelul are caracteristica 2. Aşadar,

$$\forall\, \alpha \in A,\ \alpha = -\alpha \tag{3}$$

Pentru $a = 1$, $b = x \in A$, din (2) obţinem: $(1+x)^{2k+1} \cdot (1+x)^2 = 1 + x^{2k+2} \overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow (1 + x^{2k})(1 + x^2) = 1 + x^{2k+2} \Leftrightarrow x^{2k} + x^2 = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x^{2k} = x^2 \Leftrightarrow \forall\, x \in A$, $x^{2k+1} = x^3$.
Înlocuind x cu $x + 1$ în egalitatea precedentă şi folosind (1), deducem:

$$\forall\, x \in A,\ (1 + x)^3 = (1 + x)^{2k+1} = 1 + x^{2k} = 1 + x^2 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 1 + x + x^2 + x^3$$
$$= 1 + x^2 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x^3 = x.$$

Înlocuind x cu $x + 1$ în egalitatea precedentă şi folosind (1), rezultă:

$$\forall\, x \in A,\ (1 + x)^3 = 1 + x \Leftrightarrow \forall\, x \in A,\ 1 + x + x^2 + x^3$$
$$= 1 + x \Leftrightarrow \forall\, x \in A,\ x^2 = x.$$

Aşadar inelul este boolean, deci este comutativ.

8. *Să se arate că nu există nicio funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabilă, pentru care*

$$f'(f(x)) \cdot f'(x) + x^2 = 0, \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. Presupunem că există o funcţie f cu proprietatea cerută.

$f'(f(x)) \cdot f'(x) + x^2 = 0, \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (f \circ f)'(x) = -\left(\dfrac{x^3}{3}\right)', \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ f)(x) = -\dfrac{x^3}{3} + c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\dfrac{x^3}{3} + c$ este bijectivă. Deducem că funcţia f este injectivă şi are proprietatea lui Darboux. Astfel ea este strict monotonă. Rezultă că funcţia $f \circ f = g$ este strict crescătoare, ceea ce vine în contradicţie cu faptul că funcţia g este strict descrescătoare.

9. *Să se calculeze* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos^2 \dfrac{(kn+1)\pi}{4n^2}}$.

Ludovic Longaver

Soluţie. Întrucât $\frac{k\pi}{4n} \leq \frac{(kn+1)\pi}{4n^2} \leq \frac{(k+1)\pi}{4n}$, $k = \overline{1,n}$, şirul din enunţ reprezintă suma Riemann pentru funcţia continuă

$$f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi \cos^2 x}.$$

Astfel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos^2 \frac{(k\cdot n+1)\pi}{4n^2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{\pi}\, \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\pi}.$$

10. *Să se calculeze* $\displaystyle\int \frac{dx}{242\cdot x^5 - (x-1)^5 - (x+1)^5}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Ludovic Longaver

Soluţie. Aplicăm formula
$(a+b+c)^5 - (a^5+b^5+c^5) = 5(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\cdot(a^2+b^2+c^2+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)$ valabilă pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pentru $a = x-1$, $b = x$, $c = x+1$ obţinem

$$242x^5 - (x-1)^5 - (x+1)^5 = 10\cdot x(2x-1)\cdot(2x+1)\cdot(6x^2+1).$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{10\cdot x(2x-1)\cdot(2x+1)\cdot(6x^2+1)} \\ &= \left(\frac{1}{10x} + \frac{1}{25(2x-1)} + \frac{1}{25(2x+1)} + \frac{9x}{25(6x^2+1)}\right) dx \\ &= \frac{1}{10}\ln x + \frac{1}{50}\ln(2x-1) + \frac{1}{50}\ln(2x+1) + \frac{3}{100}\ln(6x^2+1) + C. \end{aligned}$$

11. *Să se arate că, dacă funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *verifică relaţia*

$$f(x) + \sqrt[3]{f(x)} = x^3 + x,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

atunci f *are primitive.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + \sqrt[3]{x}$ este bijectivă şi continuă; funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + x$ este continuă. Relaţia dată se scrie $(g \circ f)(x) = h(x)$ şi de aici rezultă $f(x) = (g^{-1} \circ h)(x)$, deci f este o funcţie continuă şi atunci f are primitive.

12. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup pentru care există* $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$, *astfel încât* $x^m y^n = yx$, $\forall\, x, y \in G$. *Să se arate că grupul* G *este abelian.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Pentru $x = e$ rezultă $y^n = y$, deci $y^{n-1} = e$. Pentru $y = e$ rezultă $x^m = x$, deci $x^{m-1} = e$. Din $x^m y^n = yx$ rezultă $x^{m-1} \cdot xy^{n-1} \cdot y = yx$, deci $xy = yx$.

13. *Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu f' continuă pe $[0,1]$ şi cu proprietatea că, pentru orice $\alpha, \beta \in [0,1]$ cu $\alpha < \beta$, există $x, y \in [\alpha, \beta]$ astfel încât $xf'(x) + yf'(y) = 2b$. Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx = a - b$, unde $a = f(1)$.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Cum f este continuă pe $[0,1]$, rezultă că este integrabilă.
Fie $\Delta_n = [0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Din ipoteză rezultă că pe $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$, există $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ astfel încât

$$\xi_k f'(\xi_k) + \eta_k f('(\eta_k) = 2b,\ k = \overline{1,n}.$$

Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \eta_k f'(\eta_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= 2b \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 2b.$$

Trecând la limită, obţinem $2\int_0^1 xf'(x)dx = 2b$, deci $xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = b$ şi cum $f(1) = a$, obţinem $\int_0^1 f(x)dx = a - b$.

14. *Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [0,1] \to [a,b]$ o funcţie integrabilă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = 0$ şi $\int_0^1 f^2(x)dx = 1$. Să se arate că*

$$\int_0^1 f^3(x)dx \le a^2 b + 2a + b.$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Din

$$a \le f(x) \le b \Rightarrow (f(x) - a)^2 (f(x) - b) \le 0$$
$$\Rightarrow (f^2(x) - 2af(x) + a^2)(f(x) - b) \le 0$$
$$\Rightarrow f^3(x) - bf^2(x) - 2af^2(x) + 2abf(x) + a^2 f(x) - a^2 b \le 0.$$

Integrând pe $[0,1]$ obţinem:

$$\int_0^1 f^3(x)dx - (b+2a)\int_0^1 f^2(x)dx + (2ab+a^2)\int_0^1 f(x)dx \le a^2b$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 f^3(x)dx - (b+2a) \le a^2b \Leftrightarrow \int_0^1 f^3(x)dx \le a^2b+2a+b.$$

15. *Arătaţi că, dacă $a,b,c \in [0,\infty)$, atunci:*

$$25\sum a^2\cdot\sqrt[5]{a} + 11\sum ab^6 \ge 33\sum a^2b.$$

Daniel Sitaru

Soluţie. Utilizăm inegalitatea lui Young:

$$p\cdot x^q + q\cdot y^p \ge p\cdot q\cdot x\cdot y, \text{ unde } p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ x,y\ge 0.$$

Atunci $\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p} \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$. Inegalitatea anterioară devine:

$$p\cdot x^{\frac{p}{p-1}} + \frac{p}{p-1}\cdot y^p \ge \frac{p^2}{p-1}\cdot xy.$$

Integrăm pe $[0,x]$, $x\ge 0$ şi obţinem:

$$p\int_0^x x^{\frac{p}{p-1}}dx + \frac{p}{p-1}\cdot y^p\cdot\int_0^x dx \ge \frac{p^2}{p-1}\,y\cdot\int_0^x x\,dx$$
$$\Leftrightarrow p\frac{x^{\frac{2p-1}{p-1}}}{\frac{2p-1}{p-1}} + \frac{p}{p-1}\,y^p\cdot x \ge \frac{p^2}{p-1}\,y\cdot\frac{x^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2p-1}\,x^{\frac{2p-1}{p-1}} + \frac{1}{p-1}\,x\cdot y^p \ge \frac{p}{2(p-1)}\,x^2y \qquad (1)$$

Alegând $p=6$, $x=a$ şi $y=b$ în (1) găsim că

$$\frac{5}{11}\,a^2\cdot\sqrt[5]{a} + \frac{1}{5}\cdot a\cdot b^6 \ge \frac{3}{5}\,a^2\cdot b \Leftrightarrow 25a^2\cdot\sqrt[5]{a} + 11ab^6 \ge 33a^2b.$$

Analog

$$25b^2\sqrt[5]{b} + 11bc^6 \ge 33b^2c \quad \text{şi}$$
$$25c^2\sqrt[5]{c} + 11ca^6 \ge 33c^2a.$$

Însumând ultimele trei inegalităţi obţinem:

$$25\sum a^2\cdot\sqrt{a} + 11\sum ab^6 \ge 33\sum a^2b.$$

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci

$$(ab + bc + ca)(a^3 + b^3 + c^3) \geq abc(a + b + c)^2$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Se consideră triunghiul ABC, H ortocentrul şi O centrul cercului circumscris triunghiului. Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HAC, respectiv HAB.

a) Să se demonstreze că O_1 este simetricul lui O faţă de dreapta BC.

b) Să se demonstreze că $\triangle ABC$ şi $\triangle O_1O_2O_3$ au acelaşi centru de greutate, dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

Florin Bojor

3. Să se determine şirurile $(a_n)_{n \geq 0}$ de numere naturale care verifică relaţia

$$a_{a_n} + a_n^2 = n^2 + 5n + 8, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Meda Bojor

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ astfel încât $b^2 < ac$. Să se arate că, dacă $4a + 4b + c > 0$, atunci $a + 2b + c > 0$.

Gheorghe Boroica

5. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $m \in (0, 1]$, să se arate că ecuaţia

$$mx^2 + (a + b + c + d)x + ab + bc + cd + da = 0$$

are rădăcini reale.

Gheorghe Boroica

6. Fie şirul $(d_n)_{n \geq 1}$ definit prin $d_n = p_{n+1} - 2p_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, unde p_n este al n-lea număr prim. Arătaţi că $(d_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit superior.

Gheorghe Boroica

7. Să se rezolve ecuaţia $\{x\}^2 - \{x\} \cdot [x] + [x]^2 = 0$.

Dana Heuberger

8. Fie triunghiul ABC, I centrul cercului înscris şi D, E, F punctele de contact ale acestuia cu laturile BC, CA, AB. Fie D', E', F' intersecţiile semidreptelor $(DI, (EI, (FI$ cu cercul înscris şi H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor $D'EF$, $E'FD$, respectiv $F'DE$. Să se arate că:

a) $\overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \overrightarrow{0}$.

b) Triunghiurile $H_1H_2H_3$ şi DEF au acelaşi centru de greutate.

Dana Heuberger

9. Fie triunghiul ABC şi punctele M, N, P cu $M \in (BC)$, $A \in (PN)$, $PC \cap BN = \{T\}$ şi $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AN}{AP}$. Să se arate că dreptele AM, BN, CP sunt concurente, dacă şi numai dacă $PN \| BC$.

Dana Heuberger

10. Fie triunghiul ABC şi $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ picioarele bisectoarelor din A, respectiv B. Fie punctele A', B', astfel încât D este mijlocul lui (AA') şi E mijlocul lui (BB'). Să se arate că există o infinitate de triunghiuri neisoscele ABC pentru care punctele A', B', C' sunt coliniare.

Dana Heuberger

11. Să se arate că, dacă $ABCD$ este un patrulater convex, iar $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $P \in (DA)$, $Q \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NC}{ND} = \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{QA}{QB}$ şi $AM = CP$, $BN = DQ$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Nicolae Muşuroia

12. Fie $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ un poligon convex cu $2n$ vârfuri, $n \geq 3$. Notăm cu $G_1, G_2, \ldots, G_{2n}$ centrele de greutate ale poligoanelor

$A_1A_2 \ldots A_n,\ A_2A_3 \ldots A_{n+1}, \ldots, A_{n+1}A_{n+2} \ldots A_{2n}, \ldots, A_{2n}A_1 \ldots A_{n-1}$.

Să se arate că dreptele $G_1G_{n+1}, G_2G_{n+2}, \ldots, G_nG_{2n}$ sunt concurente.

Nicolae Muşuroia

13. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci

$$\sum a\sqrt{\frac{b^4 + c^4}{2}} \leq a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) - 3abc.$$

Daniel Sitaru

14. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $m^2 - 22m + 40 = 3^n$.

Ionel Tudor

15. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Arătaţi că

$$2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^4-1}{a-1} \cdot \frac{b^4-1}{b-1} \cdot \frac{c^4-1}{c-1}}$$
$$\geq \left(a+\sqrt{b}+a\sqrt{b}-1\right)\left(b+\sqrt{c}+b\sqrt{c}-1\right)\left(c+\sqrt{a}+c\sqrt{a}-1\right).$$

Mihai Vijdeluc

Clasa a X-a

1. În orice triunghi ABC, cu notaţiile obişnuite, avem:

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4} + \frac{b^2+c^2}{(b+c)^4} + \frac{c^2+a^2}{(c+a)^4} \geq \frac{1}{32R^2}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Gheorghe Boroica

2. Dacă $m \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, iar ABC este un triunghi de semiperimetru s, atunci:

$$3^m \left(\left(a \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^{m+1} + \left(b \operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^{m+1} + \left(c \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^{m+1}\right) \geq 6^{m+1} r^{m+1}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

3. Se consideră punctele A, B, C, D pe un cerc de centru O astfel încât $AB \cap CD = \{M\}$. Tangentele în A şi B la cerc se intersectează în E, iar tangentele în C şi D la cerc se intersectează în F. Dacă $EO \cap CD = \{G\}$ şi $FO \cap AB = \{H\}$, demonstraţi că $HG \| EF$.

Florin Bojor

4. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu b impar. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ şi $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n+1}^2 + b}{ax_n}$, $\forall\, n \geq 0$. Să se demonstreze că toţi termenii şirului sunt numere naturale dacă şi numai dacă a îl divide pe b.

Florin Bojor

5. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia

$$16^x + 3 \cdot 16^{[x]} + 2 \cdot 16^{\{x\}} = 1284$$

Gheorghe Boroica

6. Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci $\quad n^2(n^2+n+1)/C_{n^3}^n$.

Gheorghe Boroica

7. Să se rezolve ecuaţia $\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} = 0$

Andrei Eckstein

8. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to [0,1)$, $g(x) = \left\{ \{x\} + \left\{ \frac{x+1}{2} \right\} \right\}$.

a) Să se arate că funcţia g este surjectivă.

b) Să se arate că funcţia g este periodică. Să se determine perioada principală a acesteia.

Dana Heuberger

9. Fie triunghiul ABC şi D, E, F punctele de contact ale cercului înscris în acesta cu laturile BC, CA, AB. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AEF, BDF, respectiv CDE.

a) Să se determine măsura unghiului dintre dreptele AG_1 şi BG_2.

b) Să se arate că $AG_1 = BG_2 = CG_3$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Dana Heuberger

10. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3^{\log_2 x} - 3\log_2 y = 2 - x \\ 3^{\log_2 y} - 3\log_2 z = 2 - y \\ 3^{\log_2 z} - 3\log_2 x = 2 - z \end{cases}$$

Nicolae Muşuroia

11. Să se rezolve ecuaţia:

$$(\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot (\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{16}$$

Daniel Sitaru

12. Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$ şi $\lambda \in [0,1]$. Să se arate că dacă:

a) f este funcţie convexă şi descrescătoare, atunci

$$f\left(2\sqrt{xy}\right) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

b) f este funcţie concavă şi crescătoare, atunci:

$$f\left(2\sqrt{xy}\right) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Daniel Sitaru

13. Să se arate că
$$\frac{\sin^2 x}{1+4\cos^4 x}+\frac{\cos^2 x}{1+4\sin^4 x}\geq\frac{1}{2}\,,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Ionel Tudor

14. Fie ABC un triunghi în care $A=2B$. Arătaţi că $a<2b$.

Mihai Vijdeluc şi Vasile Ienuţaş

15. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ cu $a+b+c=1$. Arătaţi că
$$\frac{\log_a^3 b}{3a+2}+\frac{\log_b^3 c}{3b+2}+\frac{\log_c^3 a}{3c+2}\geq 1$$

Mihai Vijdeluc

Clasa a XI-a

1. Fie $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui a şi b ecuaţia $a^x=bx+1$ are soluţie unică reală?

Dan Bărbosu

2. Calculaţi $f'(0)$ în fiecare din cazurile

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[2n+1]{x^{2n-1}-\sin^{2n-1}x},\quad n\in\mathbb{N}^*$;

(ii) $f:\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi+\dfrac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)\ \sqrt[2n+1]{x^{2n-1}-\mathrm{tg}^{2n-1}x},\quad n\in\mathbb{N}^*$.

Dan Bărbosu

3. Fie $a>0$, $a\neq 1$. Calculaţi limita
$$l(a)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left((a+x)^x-a^x\right)^x$$

Dan Bărbosu

4. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $a_n,b_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ şi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}=a\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n!}=b\in\mathbb{R}_+^*$, să se arate că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{a_n\cdot b_n}\right)=\frac{1}{e}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

5. Să se arate că pentru orice număr natural n, există numerele raţionale strict pozitive $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ cu proprietăţile:

a) $\dfrac{a_0}{0!^2} + \dfrac{a_1}{1!^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n!^2} = \dfrac{1}{n!^4}$;

b) $\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} < \dfrac{3}{\sqrt{(2n)!}}$.

Gheorghe Boroica

6. Să se determine funcţiile derivabile $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $f(0) = 0$ şi $f'(x^3) = f(x)$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

Gheorghe Boroica

7. Fie n un număr natural nenul şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$\ln(1 + x_1) \cdot \ln(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot \ln(1 + x_n) \le \ln^n \left(1 + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Gheorghe Boroica

8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm cu $S(A)$ suma elementelor sale.

a) Arătaţi că există o infinitate de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $S(A^k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

b) Fie $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $\det A = 0$, astfel încât $S(A^k) = \alpha^{k-1}$, $\forall\, k = \overline{1, n}$. Demonstraţi că $S(A^k) = \alpha^{k-1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

c) Pentru $\alpha = \dfrac{1}{n}$, daţi un exemplu de matrice cu proprietăţile de la punctul *b)*.

Dana Heuberger

9. Fie $M = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \,|\, tr(X^3) = tr(X) = 0\}$.

a) Arătaţi că mulţimea $\mathcal{M}$ este infinită.

b) Daţi un exemplu de matrice $A, B \in \mathcal{M}$, cu $AB \ne BA$.

c) Dacă $A \in \mathcal{M}$, $A^3 \ne O_3$, arătaţi că, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} \notin \mathcal{M}$ şi $A^{2k+1} \in \mathcal{M}$.

Dana Heuberger

10. Fie $b > 1$. Să se arate că şirul $(a_n)_{n \ge 1}$ cu $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n \cdot b^n}{a_n + b^n}$ este convergent şi să se determine limita sa.

Nicolae Muşuroia

11. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care are exact două puncte fixe a şi b cu $a < b$. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(a) = b$ şi $f(f(x)) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, nu este continuă.

Nicolae Muşuroia

12. Fie $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $A^{p+q} + A^{2q} + A^q = O_n$, iar $B = A^p + A^q + I_n$. Să se arate că matricea $I_n - AB$ este inversabilă.

Nicolae Muşuroia

13. Fie $p \in \mathbb{R}_+^*$ fixat şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 \in (0, p+1)$ şi $x_{n+1} = \sqrt{px_n + p + 1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se studieze dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi, în caz afirmativ, să se calculeze limita sa.

Adrian Pop

14. Să se arate că, dacă $a, b \in [0, 2]$, atunci
$$\frac{a^2}{b+2} + \frac{b^3}{a+2} + (2-a)\cdot b^2 \leq 12$$

Daniel Sitaru

15. *i*) Aflaţi două matrice pătratice x şi y, cu elemente reale, ştiind că $x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

ii) Arătaţi că oricare ar fi matricele x şi y, cu elemente reale, cu proprietatea $x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, atunci $xy \neq yx$.

Mihai Vijdeluc

Clasa a XII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Calculaţi limita
$$l = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt[n]{(x-a)^n + (b-x)^n}\,dx$$

Dan Bărbosu

2. *i*) Dacă $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ iar $n \in \mathbb{N}^*$, arătaţi că
$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(4+3i)^n + (4-3i)^n}{2} & \dfrac{(4-3i)^n - (4+3i)^n}{2i} \\ \dfrac{(4+3i)^n - (4-3i)^n}{2i} & \dfrac{(4+3i)^n + (4-3i)^n}{2} \end{pmatrix}$$

ii) Deduceţi identităţile:

$$5^n \cdot \cos\left(n \operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left((4+3i)^n + (4-3i)^n\right),$$
$$5^n \cdot \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2i}\left((4+3i)^n - (4-3i)^n\right)$$

Dan Bărbosu

3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu elementul unitate $1 \in A$. Dacă $a, b \in A$ sunt elemente inversabile astfel încât $ab^{-1} + a^{-1}b = 1$, atunci arătaţi că

$$(a-b)^2 \cdot (a^{-2} + b^{-2}) = -1$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

4. Fie funcţiile $f, g : [0,1] \to (0, \infty)$ cu f derivabilă, f' continuă şi pozitivă, g continuă. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f'(x)}{1 + f(x) + x^n \cdot g(x)}\, dx = \ln \frac{1+f(1)}{1+f(0)}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

5. Pentru o mulţime finită M de numere naturale nenule, scrise în ordine crescătoare, notăm cu a_M numărul format prin alăturarea tuturor numerelor din mulţime. De exemplu, pentru $M = \{2, 30, 41\}$ avem că $a_M = 23041$. Considerăm mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Să se determine câte numere de forma a_M sunt divizibile cu 3, unde M parcurge toate submulţimile nevide ale lui A.

Florin Bojor

6. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ şi $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x^k} = \ell \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$.

Florin Bojor

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, periodică şi neconstantă. Să se arate că, pentru orice primitivă F a funcţiei f, funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x^2 + \sin x)$ nu este o funcţie periodică.

Gheorghe Boroica

8. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = C_n^0 + \dfrac{C_n^1}{4} + \dfrac{C_n^2}{7} + \cdots + \dfrac{C_n^n}{3n+1}$.

Să se arate că $\dfrac{2^{n+1}}{5n+2} < a_n < \dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

Gheorghe Boroica

9. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel astfel încât

$$(ab)^3 = a^2b^2,\ \forall\, a, b \in A \qquad (1)$$

$$(a+b)^3 = a^2 + b^2,\ \forall\, a, b \in A \qquad (2)$$

Să se arate că inelul este comutativ.

Dana Heuberger

10. Fie n un număr natural impar, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru care $f^n(x) = x + \operatorname{arctg} f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia f admite primitive.

Ludovic Longaver

11. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pentru

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+8}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2-1}},\ n \geq 1.$$

Ludovic Longaver

12. Fie $0 \leq a < b$ şi $f, g : [a, b] \to (0, \infty)$ două funcţii continue şi de aceeaşi monotonie pe $[a, b]$. Să se arate că există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \int_a^c g(t)dt + g(c) \int_c^b f(t)dt.$$

Nicolae Muşuroia

13. Determinaţi funcţiile derivabile cu derivatele continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $\left\{ \int_0^x f(t)dt \right\} = \{f(x)\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Nicolae Muşuroia

14. Să se demonstreze că, dacă $x \in (1, 3)$, atunci

$$\frac{2}{x-1} \int_1^x \operatorname{arctg} x\, dx \leq \int_1^3 \operatorname{arctg} x\, dx \leq \frac{2}{3-x} \int_x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$$

Daniel Sitaru

15. Să se calculeze

$$I = \int \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)} dx, \quad \text{unde } x \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{24} \right)$$

Daniel Sitaru