COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare, Ediţia a X-a, 2018

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$f(F(x)) + F(F(x)) = 4x + 2018, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că F este nemărginită.
b) Daţi exemplu de astfel de funcţiei f.

Problema 2. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că funcţia

$$u(x) = e^x \cdot g(x), x \in \mathbb{R}$$

este primitiva funcţiei f şi funcţia

$$v(x) = e^{-x} \cdot f(x), x \in \mathbb{R}$$

este primitiva funcţiei g. Să se arate că există două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel ca

$$f^{(n)}(x) = a_{n-1}f(x) + a_n f'(x) \text{ şi } g^{(n)}(x) = b_{n-1}g(x) + b_n g'(x), \ \forall\ x \in \mathbb{R} \text{ şi } \forall\ n \geq 2.$$

Problema 3. Fie M o mulţime cu cel puţin două elemente şi $(M, *)$, $(M, \circ)$ două structuri de grup pe M.
a) Să se arate că operaţia "$\circ$" nu este distributivă faţă de operaţia "$*$".
b) Rămâne adevărată afirmaţia a) dacă cele două structuri sunt monoizi?

Problema 4. Fie S o mulţime finită şi nevidă pe care se defineşte o lege de compoziţie asociativă "$\cdot$" în care sunt valabile simplificările la dreapta şi la stânga.
a) Să se arate că există un element $a \in S$ astfel încât $a^2 = a$.
b) Demonstraţi că $(S, \cdot)$ este grup.
c) Rămâne adevărată afirmaţia de la b) dacă S nu este finită?

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 3 ore.

Succes!

Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”

Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai” Baia-Mare

Ediţia a X-a, 2018

CLASA A XII-A

Soluţii

Problema 1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care admite primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$f(F(x))+F(F(x))=4x+2018,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

a) Să se arate că F este nemărginită.

b) Daţi exemplu de astfel de funcţiei f.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Avem

$$((f+F)\circ F)(x)=4x+2018,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$$

iar funcţia $4x+2018$ este bijectivă, astfel că F este injectivă (iar $f+F$ este surjectivă). F fiind injectivă şi derivabilă ea este strict monotonă, deci există $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

Dacă presupunem limita finită:

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=L\in\mathbb{R}$$

atunci

$$\lim_{x\to\infty} f(F(x))+F(F(x))=\lim_{x\to\infty}(4x+2018)=\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(F(x))+F(L)=\infty$$

şi atunci

$$\lim_{x\to\infty} f(F(x))=\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to L} f(t)=\infty,$$

ceea ce arată că funcţia f nu are proprietatea lui Darboux (justificare), adică nu are primitivă (contradicţie).

b) Căutăm funcţia constantă $f=c$ şi obţinem:

$$f(x)=2,\ \forall\ x\in\mathbb{R},\quad F(x)=2x+672$$

$$f(F(x))+F(F(x))=2+2(2x+672)+672$$

$$=4x+3\cdot 672+2=4x+2018.$$

■

Problema 2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că funcţia

$$u(x)=e^x\cdot g(x), x\in\mathbb{R}$$

este primitiva funcţiei f şi funcţia

$$v(x)=e^{-x}\cdot f(x), x\in\mathbb{R}$$

este primitiva funcţiei g. Să se arate că există două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel ca

$$f^{(n)}(x)=a_{n-1}f(x)+a_nf'(x) \text{ şi } g^{(n)}(x)=b_{n-1}g(x)+b_ng'(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R} \text{ şi } \forall\ n\geq 2.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Din relaţiile $(e^xg(x))'=f(x)$ şi $(e^{-x}f(x))'=g(x)$ rezultă

$$f'(x)=(e^{-x}\cdot f(x)\cdot e^x)'=g(x)e^x+f(x) \tag{1}$$

$$g'(x)=(e^x\cdot g(x)\cdot e^{-x})'=f(x)e^{-x}-g(x) \tag{2}$$

Din (1) rezultă:

$$g(x)=(f'(x)-f(x))e^{-x} \tag{3}$$

şi apoi din (2) rezultă:

$$f(x)=(g'(x)+g(x))e^x \tag{4}$$

Din (2) şi (3) obţinem:

$$(f''(x)-f'(x))e^{-x}-(f'(x)-f(x))e^{-x}=f(x)e^{-x}-(f'(x)-f(x))e^{-x}$$

sau

$$f''(x)-f'(x)-f(x)=0,\ \forall\ x\in\mathbb{R} \tag{5}$$

Din (1) şi (4) obţinem:

$$(g''(x)+g'(x))e^x+(g'(x)+g(x))e^x=g(x)e^x+(g'(x)+g(x))e^x$$

sau

$$g''(x)+g'(x)-g(x)=0,\ \forall\ x\in\mathbb{R} \tag{6}$$

Din (5) obţinem:

$$f^{(n+1)}(x)=f^{(n)}(x)+f^{(n-1)}(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall\ n\geq 2 \tag{7}$$

Din (6) rezultă:

$$g^{(n+1)}(x)=-g^{(n)}(x)+g^{(n-1)}(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall\ n\geq 2 \tag{8}$$

Din (7) şi (8) prin inducţie rezultă:

$$f^{(n)}(x)=F_{n-1}\cdot f(x)+F_n\cdot f'(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall\ n\geq 2$$

unde $(F_n)_{n\geq 1}$ este şirul lui Fibonacci:

$$F_1=F_2=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$$

iar

$$g^{(n)}(x) = b_{n-1} \cdot g(x) + b_n \cdot g'(x),$$

unde şirul $(b_n)_n$ este definit prin relaţia de recurenţă:

$$b_1 = -1,\ b_2 = 1 \text{ şi } b_{n+1} = b_n - b_{n-1},\ n \geq 2.$$

Observaţie. $f(x) = c_1 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$,

$$g(x) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\left(c_1 e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x}\right),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

Problema 3. Fie M o mulţime cu cel puţin două elemente şi $(M,*)$, $(M,\circ)$ două structuri de grup pe M.

a) Să se arate că operaţia " $\circ$ " nu este distributivă faţă de operaţia " $*$ ".

b) Rămâne adevărată afirmaţia a) dacă cele două structuri sunt monoizi?

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Fie e_* elementul neutru în grupul $(M,*)$ şi $e_\circ$ elementul neutru în grupul $(M,\circ)$.

Prin absurd presupunem că operaţia " $\circ$ " este distributivă faţă de " $*$ ", deci:

$$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\ \forall\ x,y,z\in M.$$

Pentru $x=y=e_*$ şi $z=e_\circ$ obţinem:

$$e_*\circ e_0=(e_*\circ e_*)*e_*\Leftrightarrow e_*\circ e_0=e_*\circ e_*.$$

Înmulţind cu e_*^{-1} în $(M,\circ)$ rezultă $e_*=e_0\overset{not}{=}e$ (acelaşi element neutru în ambele structuri).

Acum pentru $y=z=e$ rezultă: $x=x*x$ şi înmulţind cu x^{-1} în $(M,*)$ rezultă $x=e$, $\forall\ x\in M$, deci $|M|=1$ fals.

b) Nu rămâne afirmaţia adevărată.

Exemplu: $([0,\infty),+)$ şi $([0,\infty),\cdot)$ sunt monoizi cu elementele neutre $e_+=0$ şi $e_\cdot=1$ iar operaţia " $\cdot$ " este distributivă faţă de " $+$ ".

■

Problema 4. Fie S o mulţime finită şi nevidă pe care se defineşte o lege de compoziţie asociativă "$\cdot$" în care sunt valabile simplificările la dreapta şi la stânga.
a) Să se arate că există un element $a \in S$ astfel încât $a^2 = a$.
b) Demonstraţi că $(S, \cdot)$ este grup.
c) Rămâne adevărată afirmaţia de la b) dacă S nu este finită?

Vlad Mihaly, Cluj-Napoca

Soluţie. a) Cum $x \in S$, avem $x^k \in S$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Dar cum S este finită, există $k \neq l \in \mathbb{N}$ cu $x^k = x^l$. De aici, $x^{k+p} = x^{l+p}$, oricare ar fi $l \in \mathbb{N}$. Dacă $l = 2k$ sau $k = 2l$, luăm $x^k = a$ sau $x^l = a$. Dacă $l < 2k$, considerăm $p = 2k - l$ şi $x^{2(k-l)} = a$ sau analog celelalte cazuri. Deci, existenţa lui a este dovedită.

b) Cum are loc simplificarea la dreapta şi la stânga, funcţiile $s_a : S \to S$, $s_a(x) = ax$ şi $d_a : S \to S$, $d_a(x) = xa$, sunt injective şi, cum S este finită, sunt bijective.
De aici, $\forall b, c \in S$ $\exists! x_1, x_2 \in S$ cu $cx_1 = b$ şi $x_2 c = b$. Luând ecuaţia $ax = b$, aceasta va avea soluţia x şi ax, de unde $ax = a$.
Dar, cum pentru valori diferite ale lui b sunt valori diferite ale lui x, relaţia $ax = a$ este valabilă $\forall x \in S$. Analog, $xa = a$, $\forall x \in S$, deci a este element neutru.
Acum, pentru ecuaţia $xy = a$, avem că orice $x \in S$ are un invers la dreapta şi la stânga, care va fi unic, deci este simetrizabil.
c) Răspunsul este negativ. Considerăm $S = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ cu operaţia de înmulţire. Evident aceasta verifică proprietăţile, dar nu este grup.

$\blacksquare$