COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare, Ediţia a X-a, 2018

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră funcţia de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 + 6x + 6,\ x \in \mathbb{R}$$

şi compunerile $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$.

Să se arate că pentru orice $n \geq 1$ ecuaţia $f^n(x) = 0$ are exact două soluţii $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Problema 2. O alee de dimensiuni $1 \times n$ este pavată folosind plăci de dimensiuni 1×1 de culori roşu şi galben şi plăci albastre de dimensiuni 1×2. Notăm cu a_n numărul total al aleilor ce pot fi făcute.

a) Să se arate că: $a_n = \sum\limits_{i+j+2k=n} \dfrac{(i+j+k)!}{i! \cdot j! \cdot k!}$.

b) Să se arate că $a_n = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]$.

Problema 3. Fie a, b numere reale şi funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(2n) = a,\ f(2n+1) = b,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f\left(\left[2^{k+\frac{1}{2}}\right]\right)}{2^k}$.

Problema 4. Fie

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine funcţiile $f : H \to \mathbb{Z}$ cu proprietatea

$$f(A \cdot B) = f(A) + f(B),\ \forall\ A, B \in H.$$

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!

COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"

Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare

Ediţia a X-a, 2018

CLASA A XI-A

Soluţii

Problema 1. Se consideră funcţia de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 + 6x + 6,\ x \in \mathbb{R}$$

şi compunerile $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$.

Să se arate că pentru orice $n \geq 1$ ecuaţia $f^n(x) = 0$ are exact două soluţii $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Avem

$$f(x) = (x+3)^2 - 3 \Leftrightarrow f(x) + 3 = (x+3)^2$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = (f(x)+3)^2 - 3 = (x+3)^2 - 3$$

Prin inducţie $f^n(x) = (x+3)^{2^n} - 3$:

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = (f^n(x)+3)^2 - 3 = ((x+3)^{2^n})^2 - 3 = (x+3)^{2^{n+1}} - 3$$

Ecuaţia

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)^{2^n} = 3 \Leftrightarrow x+3 = \pm \sqrt[2^n]{3}$$

$$\Rightarrow x_n = -3 + \sqrt[2^n]{3},\ y_n = -3 - \sqrt[2^n]{3}$$

$$x_n \to -3 + 1 = -2,\ y_n \to -3 - 1 = -4.$$

■

Problema 2. O alee de dimensiuni $1 \times n$ este pavată folosind plăci de dimensiuni 1×1 de culori roşu şi galben şi plăci albastre de dimensiuni 1×2. Notăm cu a_n numărul total al aleilor ce pot fi făcute.

a) Să se arate că: $a_n = \sum_{i+j+2k=n} \frac{(i+j+k)!}{i! \cdot j! \cdot k!}$.

b) Să se arate că $a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} \right]$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Pentru a pava o alee de lungime n alegem i plăci roşii, j plăci galbene şi k plăci albastre cu condiţia $i+j+2k=n$. Aranjarea lor se poate face în $(i+j+k)!$ moduri, dar aceeaşi aranjare se obţine prin permutarea celor i plăci roşii (în $i!$ moduri), prin permutarea între ele a celor j plăci galbene (în $j!$ moduri) şi a celor albastre (în $k!$ moduri) astfel că

$$a_n = \sum_{i+j+2k=n} \frac{(i+j+k)!}{i! \cdot j! \cdot k!}.$$

b) Notăm cu b_n numărul aleilor de lungime n în care ultima placă este roşie sau galbenă şi cu c_n numărul aleilor de lungime n în care ultima placă este albastră.

Avem relaţiile:

(1) $a_n = b_n + c_n$

(2) $b_n = 2a_{n-1}$

(3) $c_n = a_{n-2}$

((2) o alee de tip B se obţine adăugând la o alee din a_{n-1} a ultimei plăci: roşie sau galbenă)..

((3) o alee de tip C se obţine adăugând la o alee din a_{n-2} a ultimei plăci albastre).

Astfel că avem relaţia de recurenţă:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ \forall\ n \geq 3,\ a_1 = 2\ (R \text{ sau } G),$$

$$a_3 = 5\ (RR, GG, RG, GR, A)$$

Ecuaţia caracteristică a recurenţei liniare de ordin 2 este

$$r^2 - 2r - 1 = 0$$

cu rădăcinile $r_1 = 1+\sqrt{2}$, $r_2 = 1-\sqrt{2}$, astfel că

$$a_n = A\left(1+\sqrt{2}\right)^n + B\left(1-\sqrt{2}\right)^n,\ n \geq 1.$$

Din condiţiile iniţiale $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ obţinem:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right),\ B = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)$$

şi atunci

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} \right].$$

■

Problema 3. Fie a, b numere reale şi funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(2n) = a,\ f(2n+1) = b,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f\left(\left[2^{k+\frac{1}{2}}\right]\right)}{2^k}$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Vom arăta că limita este

$$L = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(a\sqrt{2}+4\right).$$

Fie $\sqrt{2} = 1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{a_i}{2^i}$, scrierea în baza 2 a lui $\sqrt{2}$, unde $a_i \in \{0,1\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Avem

$$2^{k+\frac{1}{2}} = 2^k\sqrt{2} = 2^k + a_1 2^{k-1} + \ldots + a_k + a_{k+1}\cdot\frac{1}{2} + a_{k+2}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots$$

$$\left[2^{k+\frac{1}{2}}\right] = 2^k + a_1 2^{k-1} + \ldots + 2a_{k-1} + a_k$$

şi

$$f\left(\left[2^{k+\frac{1}{2}}\right]\right) = a \text{ dacă } a_k = 0 \text{ şi } f\left(\left[2^{k+\frac{1}{2}}\right]\right) = b \text{ dacă } a_k = 1$$

adică

$$f\left(\left[2^{k+\frac{1}{2}}\right]\right) = b\cdot a_k + a(1-a_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(2^{k+\frac{1}{2}}\right)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)a_k}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{2^k}$$

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(2^{k+\frac{1}{2}}\right)}{2^k} &= \lim(b-a)\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k} + a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \\ &= (b-a)\left(\sqrt{2}-1\right) + a = a\left(2-\sqrt{2}\right) + b\left(\sqrt{2}-1\right) \\ &= \left(\sqrt{2}-1\right)\left(a\sqrt{2}+b\right) \end{aligned}$$

■

Problema 4. Fie

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{Z}\right\}\subset\mathscr{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine funcţiile $f: H\to\mathbb{Z}$ cu proprietatea

$$f(A\cdot B)=f(A)+f(B),\ \forall\ A,B\in H. \tag{1}$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Observăm că o matrice arbitrară

$$A=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in H$$

se scrie sub forma

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & y\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Considerăm matricele

$$J_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ J_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ J_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

şi se verifică prin inducţie că

$$J_1^k=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ J_2^k=\begin{pmatrix}1 & 0 & k\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ J_3^k=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N},$$

$$J_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ J_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ J_3^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

astfel că

$$A=J_2^y\cdot J_3^z\cdot J_1^x,\ x,y,z\in\mathbb{Z}$$

şi din relaţia (1):

$$f(A)=yf(J_2)+zf(J_3)+xf(J_1),\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{Z}.$$

Dacă notăm $f(J_1)=a,\ f(J_2)=b,\ f(J_3)=c,\ a,b,c\in\mathbb{Z}$ atunci

$$f(A)=ax+by+cz,\ \forall\ x,y,z\in\mathbb{Z}.$$

Dacă

$$B=\begin{pmatrix}1 & u & v\\ 0 & 1 & w\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

avem

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & x+u & y+v+xw \\ 0 & 1 & z+w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(B) = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w, \; f(A \cdot B) = a(x+y) + b(y+v+xw) + c(z+w)$$

şi din relaţia $f(A \cdot B) = f(A) + f(b)$ rezultă

$$b \cdot x \cdot v = 0, \; \forall \; x, v \in \mathbb{Z}$$

şi am obţinut funcţiile de forma

$$f\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot x + c \cdot z, \; \forall \; x, y, z \in \mathbb{Z},$$

unde a, c sunt numere întregi arbitrar fixate. ■