COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare, Ediţia a X-a, 2018

Clasa a X-a

Problema 1. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, n \geq 3$ cu proprietatea $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$ şi $\sum_{1\leq i<j\leq n} |z_i - z_j|^2 = n^2$. Să se arate că $\sum\limits_{i=1}^{n} |z - z_i| \geq n$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Problema 2. Fie z_1, z_2, z_3, z_4 numere complexe cu proprietatea

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| > 0$$

şi există $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ astfel ca:

$$|az_1 + z_2 + z_3 + z_4| = |z_1 + az_2 + z_3 + z_4| = |z_1 + z_2 + az_3 + z_4|.$$

Să se arate că z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui dreptunghi în planul complex.

Problema 3. Să se arate că pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$ este verificată inegalitatea:

$$x + 4(y + z) \geq 3\left(\sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}\right).$$

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ cu proprietatea

$$(f(x) + f(y)) \cdot f\left(\frac{xy}{f(x+y)}\right) = f(x)f(y), \tag{1}$$

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^*,\ \text{cu } x + y \neq 0.$$

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!

Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”

Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai” Baia-Mare

Ediţia a X-a, 2018

CLASA A X-A

Soluţii

Problema 1. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, n \geq 3$ cu proprietatea $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$ şi $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 = n^2$. Să se arate că $\sum\limits_{i=1}^{n} |z - z_i| \geq n$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

Avem

$$n^2 = \sum_{i<j} |z_i - z_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |z_i - z_j|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (|z_i|^2 + |z_j|^2 - z_i \cdot \overline{z_j} - z_j \cdot \overline{z_i}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (2 - z_i \cdot \overline{z_j} - z_j \cdot \overline{z_i})$$

$$= \frac{1}{2}\left(2n^2 - 2\left(\sum z_i\right)\left(\sum \overline{z_i}\right)\right) = n^2 - \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2.$$

Rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i = 0$.

Mai departe avem:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |z - z_i| &= \sum_{i=1}^{n} |z_i| \cdot |z\overline{z_i} - 1| = \sum_{i=1}^{n} |z \cdot \overline{z_i} - 1| \\
&\geq \left|\sum_{i=1}^{n} (z \cdot \overline{z_i} - 1)\right| = \left|z\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} - n\right| \\
&= |0 - n| = n.
\end{aligned}$$

■

Problema 2. Fie z_1, z_2, z_3, z_4 numere complexe cu proprietatea

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| > 0$$

şi există $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ astfel ca:

$$|az_1 + z_2 + z_3 + z_4| = |z_1 + az_2 + z_3 + z_4| = |z_1 + z_2 + az_3 + z_4|.$$

Să se arate că z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui dreptunghi în planul complex.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Notăm $z_0 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ şi avem:

$$|z_0 - (1-a)z_1| = |z_0 - (1-a)z_2| = |z_0 - (1-a)z_3|$$

ceea ce arată că z_0 este egal depărtat de $(1-a)z_1$, $(1-a)z_2$, $(1-a)z_3$. Avem:

$$|(1-a)z_1| = |(1-a)z_2| = |(1-a)z_3| = |1-a| > 0$$

şi atunci centrul cercului circumscris triunghiului

$$u_1 = (1-a)z_1,\ u_2 = (1-a)z_2,\ u_3 = (1-a)z_3$$

este $O = z_0$ şi am obţinut condiţia

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

Soluţia 1. Fie în această ordine z_1, z_2, z_3, z_4 pe cercul $|z| = |z_1| = r$. Avem:

$$z_1 + z_3 = (-z_2) + (-z_4)$$

şi atunci patrulaterul cu vârfurile $z_1, -z_2, z_3, -z_4$ este paralelogram înscris în cercul de rază r, care de fapt este un dreptunghi şi atunci diagonalele $[z_1, z_3]$ şi $[-z_2, -z_4]$ trec prin centrul cercului. Astfel că $z_1 + z_3 = 0$ şi $z_2 + z_4 = 0$, deci $z_3 = -z_1$ şi $z_4 = -z_2$, ceea ce arată că z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui dreptunghi.

Soluţia 2. (Nicolae Muşuroia) Se construiesc romburile $O, z_1, z_1 + z_2, z_2$ şi $O, z_3, z_3 + z_4, z_4$. Fie $u_1 = z_1 + z_2$, $u_2 = z_3 + z_4$ şi din $u_1 = -u_2$ rezultă că $u_1, 0, u_2$ sunt coliniare şi atunci $[z_1, z_2] \perp [u_1, u_2] \perp [z_3, z_4]$, deci $[z_1, z_2] \parallel [z_3, z_4]$. Analog arătăm că $[z_1, z_4] \parallel [z_2, z_3]$ astfel că z_1, z_2, z_3, z_4 este paralelogram (înscris în cerc) adică dreptunghi. ∎

Problema 3. Să se arate că pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$ este verificată inegalitatea:

$$x + 4(y + z) \geq 3\left(\sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}\right).$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Scriem inegalitatea sub forma:

$$4(x + y + z) \geq 3\left(x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}\right)$$

şi avem:

$$\begin{aligned} 4(x+y+z) &= 3x + \frac{3}{4}(x+4y) + \frac{1}{4}(x+4y+16z) \\ &\stackrel{A-G}{\geq} 3x + \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{4xy} + \frac{1}{4}\cdot 3\sqrt[3]{4^3xyz} = 3\left(x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz}\right) \end{aligned}$$

cu egalitate dacă $x = 4y = 16z$, de exemplu pentru $x = 16,\ y = 4,\ z = 1$.

■

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ cu proprietatea

$$(f(x)+f(y)) \cdot f\left(\frac{xy}{f(x+y)}\right) = f(x)f(y), \qquad (1)$$

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^*,\ \text{cu } x+y \neq 0.$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Observăm că funcţia identică $f(x) = x$ verifică relaţia

$$(x+y) \cdot \frac{xy}{x+y} = x \cdot y.$$

Arătăm că ea este unică.

Prin absurd presupunem că există $a \in \mathbb{R}^*$ astfel ca

$$f(a) = b \neq a,\ b \neq 0.$$

Punem în relaţia (1) $x = b$ şi $y = a-b$ şi condiţia este:

$$(f(b)+f(a-b)) \cdot f\left(\frac{b(a-b)}{b}\right) = f(b) \cdot f(a-b),\ f(a-b) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (f(b)+f(a-b))f(a-b) = f(b) \cdot f(a-b)$$

$$\Leftrightarrow f(b)+f(a-b) = f(b) \Leftrightarrow f(a-b) = 0,$$

fals, căci f nu ia valoarea 0.

∎