COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE

Concursul Interjudeţean de Matematică "Argument"
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia-Mare, Ediţia a X-a, 2018

Clasa a IX-a

Problema 1. a) Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 1$ există numere naturale distincte $k_1, k_2, \ldots, k_n$ astfel ca numerele $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$ să fie în progresie aritmetică.

b) Să se arate că nu există un şir infinit de numere naturale distincte $(k_n)_{n\geq 1}$ astfel ca şirul $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}, \ldots$ să fie o progresie aritmetică infinită.

Problema 2. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1 \text{ şi } x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1},\ n \geq 1.$$

Să se arate că există o infinitate de perechi $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care au loc relaţiile:

$$P(n):\ x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n-1} = x_n^2,\ \forall\, n \geq 2 \tag{1}$$

$$Q(n):\ x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n} = x_n \cdot x_{n+1},\ \forall\, n \geq 2. \tag{2}$$

Problema 3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ numere reale astfel ca şirul $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} [a_k n + b_k]$$

să fie o progresie aritmetică. Să se arate că numărul $\sum_{k=1}^{m} a_k$ este număr întreg.

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu H_A, H_B, H_C, H_D ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB respectiv ABC şi cu $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C, \mathcal{C}_D$ cercurile ce trec prin mijloacele laturilor triunghiurilor de mai sus.

Să se arate că dreptele AH_A, BH_B, CH_C, DH_D şi cercurile $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B, \mathcal{C}_C, \mathcal{C}_D$ au un punct comun.

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Succes!

Concursul Interjudeţean de Matematică “Argument”

Colegiul Naţional “Gheorghe Şincai” Baia-Mare

Ediţia a X-a, 2018

CLASA A IX-A

Soluţii

Problema 1. a) Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 1$ există numere naturale distincte $k_1, k_2, \ldots, k_n$ astfel ca numerele $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$ să fie în progresie aritmetică.

b) Să se arate că nu există un şir infinit de numere naturale distincte $(k_n)_{n\geq 1}$ astfel ca şirul $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}, \ldots$ să fie o progresie aritmetică infinită.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. a) Definim $k_i = \frac{n!}{i}$, $i = \overline{1, n}$ şi avem

$$\frac{1}{k_{i+1}} - \frac{1}{k_i} = \frac{i+1}{n!} - \frac{i}{n!} = \frac{1}{n!}$$

care este raţia progresiei.

b) Dacă prin absurd şirul $\left(\frac{1}{k_n}\right)_{n\geq 1}$ ar fi o progresie cu raţia r am avea:

$$\frac{1}{k_n} = \frac{1}{k_1} + (n-1)r \Rightarrow k_n = \frac{k_1}{1+(n-1)k_1 r}.$$

Pentru n suficient de mare numărul $\left|\frac{k_1}{1+(n-1)k_1 r}\right|$ este subunitar, deci $k_n \notin \mathbb{N}$, contradicţie. ∎

Problema 2. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1 \text{ şi } x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1},\ n \geq 1.$$

Să se arate că există o infinitate de perechi $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care au loc relaţiile:

$$P(n):\ x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n-1} = x_n^2,\ \forall\ n \geq 2 \tag{1}$$

$$Q(n):\ x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n} = x_n \cdot x_{n+1},\ \forall\ n \geq 2. \tag{2}$$

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie. Primii termeni ai şirului sunt:

$$x_1 = 1,\ x_2 = a,\ x_3 = a^2 + b,\ x_4 = a^3 + ab + ab = a^3 + 2ab.$$

Pentru $n = 2$, relaţia (1) devine:

$$x_1 + x_3 = x_2^2 \Leftrightarrow 1 + a^2 + b = a^2,\ \text{deci } b = -1$$

şi vom arăta că orice pereche $(a, -1)$ verifică (1) şi (2).

Avem deci şirul $(x_n)_n$ care verifică relaţia

$$x_{n+1} = ax_n - x_{n-1},\ n \geq 2,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1 \tag{$*$}$$

$$x_2 = a,\ x_3 = a^2 - 1,\ x_4 = a^3 - 2a$$

$$(x_2 + x_4 = a^3 - a = a(a^2 - 1) = x_2x_3)$$

Vom demonstra relaţiile (1) şi (2) prin inducţie.

Presupunem $P(k)$ adevărată pentru $k \leq n$. Din $P(n)$ şi $P(n-1)$ rezultă

$$x_{2n-1} = x_n^2 - x_{n-1}^2 :\ R(n).$$

Presupunem $Q(k)$ adevărată pentru $k \leq n$. Din $Q(n)$ şi $Q(n-1)$ rezultă

$$x_{2n} = x_n \cdot x_{n+1} - x_{n-1} \cdot x_n :\ S(n).$$

Este suficient să demonstrăm $R(n+1)$ şi $S(n+1)$.

$$R(n+1):\ x_{2n+1} = x_{n+1}^2 - x_n^2 \Leftrightarrow ax_{2n} - x_{2n-1} = x_{n+1}^2 - x_n^2$$

$$R(n), S(n) \Leftrightarrow a(x_n \cdot x_{n+1} - x_{n-1} \cdot x_n) - x_n^2 + x_{n-1}^2 = x_{n+1}^2 - x_n^2$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}(ax_n - x_{n+1}) = x_{n-1}(ax_n - x_{n-1})$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} x_{n+1} \cdot x_{n-1} = x_{n-1} \cdot x_{n+1} \text{ (adevărată)}$$

$$S(n+1):\ x_{2n+2} = x_{n+1} \cdot x_{n+2} - x_n \cdot x_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow ax_{2n+1} - x_{2n} = x_{n+1} \cdot x_{n+2} - x_n \cdot x_{n+1}$$

$$\overset{R(n),S(n)}{\Leftrightarrow} a(x_{n+1}^2 - x_n^2) - x_n \cdot x_{n+1} + x_{n-1} \cdot x_n = x_{n+1} \cdot x_{n+2} - x_n \cdot x_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}(ax_{n+1} - x_{n+2}) = x_n(ax_n - x_{n-1})$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} x_{n+1} \cdot x_n = x_n \cdot x_{n+1} \text{ (adevărată).}$$

■

Problema 3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ numere reale astfel ca şirul $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} [a_k n + b_k]$$

să fie o progresie aritmetică. Să se arate că numărul $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ este număr întreg.

*****

Soluţie. Avem

$$a_k n + b_k - 1 < [a_k n + b_k] \leq a_k n + b_k,\ k = \overline{1, m}.$$

Sumând obţinem

$$An + B - m < x_n \leq An + B,$$

unde $A = \sum a_i$, $B = \sum b_i$.

Dacă $(x_n)_n$ este o progresie aritmetică de raţie r, atunci

$$x_{n+1} - x_1 = nr,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ şi } A + B - m < x_1 \leq A + B.$$

Deci

$$x_{n+1} = x_1 + nr,\ r \in \mathbb{Z},$$

$$(n+1)A + B - m < x_1 + nr \leq (n+1)A + B$$

$$\Leftrightarrow (n+1)A + B - m - x_1 < nr < (n+1)A + B - x_1$$

$$\Rightarrow nA - m < nr < nA$$

$$\Leftrightarrow A - \frac{m}{n} < r < A,\ \forall\ n$$

$$\Leftrightarrow -\frac{m}{n} < r - A < 0,\ \forall\ n$$

şi cum $\frac{m}{n}$ poate fi oricât de mic, rezultă $r = A \in \mathbb{Z}$.

■

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu H_A, H_B, H_C, H_D ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB respectiv ABC şi cu $\mathscr{C}_A, \mathscr{C}_B, \mathscr{C}_C, \mathscr{C}_D$ cercurile ce trec prin mijloacele laturilor triunghiurilor de mai sus.

Să se arate că dreptele AH_A, BH_B, CH_C, DH_D şi cercurile $\mathscr{C}_A, \mathscr{C}_B, \mathscr{C}_C, \mathscr{C}_D$ au un punct comun.

Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Soluţie.

Alegem originea vectorilor în O, centrul cercului circumscris patrulaterului şi notăm

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}, \ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}, \ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{d},$$

$$\overrightarrow{OH_A} = \overrightarrow{h_A}, \ \overrightarrow{OH_B} = \overrightarrow{h_B}, \ \overrightarrow{OH_C} = \overrightarrow{h_C}, \ \overrightarrow{OH_D} = \overrightarrow{h_D}.$$

Deoarece $|\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{d}|$ rezultă $\overrightarrow{h_A} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$ şi analoagele

$$\overrightarrow{h_B} = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} + \overrightarrow{a}, \overrightarrow{h_C} = \overrightarrow{d} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \ \overrightarrow{h_D} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}.$$

Avem:

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{h_A}}{2} = \frac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{h_B}}{2} = \frac{\overrightarrow{c} + \overrightarrow{h_C}}{2} = \frac{\overrightarrow{d} + \overrightarrow{h_D}}{2} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{2}$$

ceea ce arată că punctul E definit prin

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{2}$$

este mijlocul fiecăruia dintre segmentele AH_A, BH_B, CH_C şi DH_D.

Cercul $\mathscr{C}_A$ circumscris mijloacelor laturilor triunghiului BCD (cercul celor 9 puncte ale acestuia) are centrul în mijlocul segmentului $[OH_A]$ pe care îl notăm cu A' şi avem

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{h_A} = \frac{\overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{2}$$

şi raza

$$R_A = \left| \frac{\overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{2} - \frac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{2} \right| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{d}|.$$

Pentru punctul E definit mai sus avem:

$$\overrightarrow{A'E} = |\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA'}| = \left| \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{2} - \frac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{2} \right| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}| = R_1,$$

astfel că punctul E se află pe cercul $\mathscr{C}_A$ şi analog E se află pe $\mathscr{C}_B, \mathscr{C}_C, \mathscr{C}_D$.

■