COLEGIUL NAȚIONAL
GHEORGHE ȘINCAI
BAIA MARE
Str. Gheorghe Șincai, 25 Tel: 0262 211 245 www.sincaibm.ro
430311, Baia Mare Fax: 0262 215 664 sincaibm@yahoo.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL „ARGUMENT”
Baia Mare, 10 noiembrie 2018

CLASA a VIII-a

La problemele 1-8, scrieți pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Fie $A=(-6,0]\cup[3,9)$ și $B=(-9,-3]\cup[0,6)$. Mulțimea $A\cap B\cap\mathbb{Z}$ are:

a) 7 elemente b) 6 elemente c) 8 elemente d) 4 elemente

(5p) **2.** Dacă $a^2+3a=1$, atunci $E(a)=(a-1)(a-2)(a+4)(a+5)+2018$ are valoarea:

a) 2018 b) $\dfrac{4205\pm 2\sqrt{13}}{4}$ c) 2046 d) 2045

(5p) **3.** Dacă $x>1$ și $x+\dfrac{1}{x}=6$, atunci cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ este:

a) ± 2 b) 3 c) 1 d) 2

(5p) **4.** Pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-3\}$, considerăm expresia $E(x)=1-\left(\dfrac{x+5}{x^2+7x+12}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}\right)$.

Forma cea mai simplă a expresiei este:

(5p) a) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+7x+12}$ b) $\dfrac{x}{x+3}$ c) $\dfrac{x(x+2)}{x+4}$ d) $\dfrac{x^2-8x-18}{x^2+7x+12}$

5. Dacă $E(x)$ este expresia de la exercițiul 4, atunci suma modulelor elementelor mulțimii $\{x\in\mathbb{Z}\mid E(x)\in\mathbb{Z}\}$ este:

(5p) a) -8 b) 12 c) 8 d) $\{12\}$

(5p) **6.** Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ distincte două câte două și $x=\dfrac{a}{b-c}$, $y=\dfrac{b}{c-a}$, $z=\dfrac{c}{a-b}$.

Atunci, $xy+yz+zx$ are valoarea:

a) 0 b) -1 c) 1 d) $\dfrac{2\left[(a-1)(b-2)(c-3)+1\right]}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

(5p) **7.** Dacă triunghiul ABC are $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ și

$\sqrt{a^2-8\sqrt{3}a+57}+\sqrt{b^2-14\sqrt{2}b+99}+\sqrt{c^2-10\sqrt{2}c+54}=6$, atunci triunghiul ABC este:

a) isoscel b) dreptunghic în A c) obtuzunghic d) dreptunghic în B

(5p) **8.** Un romb $ABCD$ cu latura de 4 cm și $m(A)=60^\circ$ se îndoaie în jurul dreptei BD până când $(ABD)\perp(BCD)$. După îndoire, distanța de la A la C este:

a) $2\sqrt{6}\ cm$ b) $4\sqrt{2}\ cm$ c) $4\ cm$ d) $4\sqrt{6}\ cm$

La problemele 9 și 10 redactați rezolvările complete.

5. Fie a,b,c numere reale distincte, astfel încât $\dfrac{a^2}{(b-c)^2}+\dfrac{b^2}{(c-a)^2}+\dfrac{c^2}{(a-b)^2}=11$.

(10p) a) Determinați a,b,c, în cazul în care sunt numere întregi consecutive.

(15p) b) Calculați $S=\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}$. *(Vasile Pop)*

6. Fie triunghiul ABC, cu $AB=c, BC=a, AC=b$, unde $0<a\le b\le c$. Fie punctele D,E,F de aceeași parte față de planul (ABC) astfel încât dreptele AD,BE,CF sunt perpendiculare pe (ABC) și $AD=a$, $BE=b$, $CF=c$. Fie $\{O\}=BF\cap CE$.

(10p) a) Demonstrați că triunghiul DEF nu poate fi dreptunghic.

(15p) b) Dacă $OD\perp(BCF)$, demonstrați că $b=c=2a$. *(Dana Heuberger)*

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Dana Heuberger – Colegiul Național „Gheorghe Șincai”
prof. Cristian Heuberger – Colegiul Național „Gheorghe Șincai”

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore și 30 de minute.
SUCCES!

BAREM – Concursul „Argument” 2018, clasa a VIII-a

1	2	3	4	5	6	7	8
7 elemente	2045	2	$\frac{x}{x+3}$	8	-1	dreptunghic în B	$2\sqrt{6}\ cm$
a	**d**	**d**	**b**	**c**	**b**	**d**	**a**

9. a) Dacă $a\in\mathbb{Z}, b=a+1, c=a+2$, ipoteza devine $a^2+\frac{(a+1)^2}{4}+(a+2)^2=11$ .... 4 p

cu soluțiile $a=1$ și $a=-3$ .... 2 p

$(a,b,c)\in\{(-3,-2,-1),(-1,-2,-3),(1,2,3),(3,2,1)\}$ .... 4 p

b) Notând $\frac{a}{b-c}=x,\ \frac{b}{c-a}=y,\ \frac{c}{a-b}=z$, ipoteza devine: $x^2+y^2+z^2=11$ .... 1 p

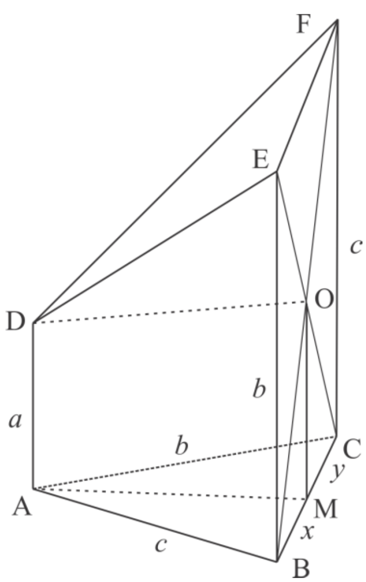
$xy+yz+zx=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ .... 5 p

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=(a-b)(b-c)(a-c)$ .... 5 p

Așadar $xy+yz+zx=-1$ 1p

Obținem $(x+y+z)^2=11+2\cdot(-1)=9$, deci $x+y+z\in\{-3,3\}$ 3p

10. a) $DE^2=c^2+(b-a)^2=a^2+b^2+c^2-2ab$, $EF^2=a^2+b^2+c^2-2bc$, $DF^2=a^2+b^2+c^2-2ac$ 3p



$a\le b\le c$, deci $ab\le ac\le bc$, adică $EF\le DF\le DE$, așadar unghiul drept poate fi doar în F. .... 1 p

Presupunem că $m(\hat{F})=90^\circ$, deci că $DF^2+EF^2=DE^2$ .... 2 p

obținem: $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca=0$, deci $(a+b-c)^2=0$, adică $a+b=c$, fals. Așadar $m(\hat{F})\ne 90^\circ$ .... 4 p

b) $BE\perp(ABC)$ și $AD\perp(ABC)$, deci $AD\parallel BE$, așadar $AD\parallel(BCFE)$ .... 1 p

Fie $M\in BC$ astfel încât $OM\parallel BE$, deci astfel încât $OM\parallel AD$ (1) .... 1 p

Deoarece $OD\perp(BCF)$, avem $m(\widehat{DOM})=90^\circ$. (2)

Din $AD\perp(ABC)$, rezultă $m(\widehat{DAM})=90^\circ$. (3)

Din (1), (2) și (3) rezultă că $AMOD$ este dreptunghi, deci $OM=AD=a$ ..... 2 p

$AM\parallel OD\perp(BCF)$, deci $AM\perp(BCF)$, așadar $AM\perp BC$ .... 1 p

Notăm $BM=x,\ CM=y$. Avem $x+y=a$.

Atunci, $AM^2=AB^2-BM^2=AC^2-CM^2 \Rightarrow c^2-x^2=b^2-y^2$ (4) .... 3 p

În triunghiul BCE, deoarece $OM\parallel BE$, rezultă $\frac{OM}{BE}=\frac{MC}{BC}$, deci $y=\frac{a^2}{b}$ (5) .... 2 p

În triunghiul BCF, deoarece $OM\parallel CF$, rezultă $\frac{OM}{CF}=\frac{MB}{BC}$, deci $x=\frac{a^2}{c}$ (6) .... 2 p

Înlocuind (5) și (6) în (4), obținem: $c^2-\frac{a^4}{c^2}=b^2-\frac{a^4}{b^2} \Leftrightarrow (c^2-b^2)\left(\frac{a^4}{b^2c^2}+1\right)=0$, deci $b=c$. .... 2 p

Atunci, $x=y=\frac{a^2}{b}$ și $x+y=a \Leftrightarrow 2\frac{a^2}{b}=a \Leftrightarrow b=2a$. .... 1 p