CONCURSUL „ARGUMENT”
CLASA a VII-a
10 noiembrie 2018

La problemele 1 – 8 se scriu pe foaia de concurs doar literele corespunzătoare răspunsului considerat corect. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

(5p) **1.** Cel mai mic produs a trei numere distincte din mulțimea $\{-8,-6,-1,0,3,7\}$ este:

a) -336 b) 0 c) -168 d) -48

(5p) **2.** Valoarea sumei $S=\frac{1}{5\cdot 4}+\frac{1}{10\cdot 6}+\frac{1}{15\cdot 8}+\frac{1}{20\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{120\cdot 50}$ este:

a) $\frac{29}{120}$ b) $\frac{23}{240}$ c) $\frac{13}{120}$ d) $\frac{12}{125}$

(5p) **3.** Suma soluțiilor ecuației $\left|x+|2x+3|\right|=1$ este :

a) -8 b) 0 c) $-3,5$ d) -3

(5p) **4.** Dacă $a=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$ și $b=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{102}{101}$ atunci cel mai mare număr întreg mai mic decât $200a:b$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

(5p) **5.** În ΔABC măsurile unghiurilor A, B și C sunt direct proproționale cu $2, 3$ și 4. Dacă bisectoarea $AA', A'\in BC$ a unghiului BAC intersectează bisectoarea unghiului BCA în I atunci $m(\sphericalangle CIA')$ este:

a) 60° b) 120° c) 50° d) 40°

(5p) **6.** În paralelogramul $ABCD$ de centru O, M și N sunt mijloacele laturilor AB respectiv BC. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului BMN atunci $\frac{BG}{BD}$ este:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$

(5p) **7.** În rombul $ABCD$, $m(\sphericalangle ABC)=144^\circ$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABD$ formează cu AD un unghi de:

a) 64° b) 72° c) 108° d) 144°

(5p) **8.** În pătratul $ABCD$, $M\in[BC]$ astfel încât $AM=6cm$ și $m(\sphericalangle BMA)=60^\circ$. Ducem $BN\perp AM, N\in DC$. Lungimea segmentului NC este:

a) $3cm$ b) $2cm$ c) $1cm$ d) $3mm$

La următoarele probleme se cer soluțiile complete.

9. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, notăm cu S_n mulțimea numerelor naturale care au exact n divizori naturali.

(5p) a) Să se determine numerele naturale de trei cifre care aparțin mulțimii S_3;

(15p) b) Să se determine $a\in S_2$ și $b\in S_3$ astfel încât $a+b\in S_5$;

(10p) c) Aflați cel mai mic element al mulțimii S_{165}.

10. În interiorul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele O și K astfel încât $m(\sphericalangle OAB)=m(\sphericalangle KAD)=\frac{1}{3}m(\sphericalangle BAD)$ și $m(\sphericalangle OBA)=m(\sphericalangle KBC)=\frac{1}{3}m(\sphericalangle ABC)$.

(10p) a) Demonstraţi că $m(\sphericalangle AOB)=120^\circ$ și calculați $m(\sphericalangle AKB)$;

(10p) b) Demonstrați că $MO\perp A_1B_1$, unde $\{A_1\}=AO\cap BK, \{B_1\}=BO\cap AK$ iar M este mijlocul $[A_1B_1]$.

Notă: Timpul de lucru : 2 ore și 30 minute. Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES !***

Barem - Clasa a VII-a

1.

1	2	3	4	5	6	7	8
c	d	a	c	a	d	b	a

9. a) Un număr $a \in S_3$ dacă are exact trei divizori...1p

Deoarece 3 este număr prim atunci $a = p^2, p$ număr prim. 1p

Deci numerele de trei cifre cu exact 3 divizori sunt $11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2$ ...3p

b) Dacă $a \in S_2 \Rightarrow a = p, p$ număr prim, $b \in S_3 \Rightarrow b = q^2, q$ număr prim, iar $a + b \in S_5 \Rightarrow a + b = r^4, r$ număr prim.

Atunci avem $p + q^2 = r^4$ și vom discuta pe cazuri:...5p

I. Dacă r este par atunci $r = 2 \Rightarrow p + q^2 = 16 \Rightarrow q \le 3$ și verificând obținem $q = 3, p = 7$ iar pentru $q = 2 \Rightarrow p = 12(F)$...3p

II. Dacă r este impar atunci unul dintre numerele p și q este par deci egal cu 2.

i. Dacă $p = 2 \Rightarrow 2 + q^2 = r^4 \Rightarrow (r^2 - q)(r^2 + q) = 2, r^2 - q < r^2 + q \Rightarrow r^2 - q = 1, r^2 + q = 2 \Rightarrow 2r^2 = 3(F)$...3p

ii. Dacă $q = 2 \Rightarrow p = r^4 - 4 \Rightarrow p = (r^2 - 2)(r^2 + 2)$ care este număr prim deci

$r^2 - 2 = 1 \Rightarrow r^2 = 3(F)$. 3p

În consecință avem doar $7 \in S_2, 9 \in S_3$..1p

c) Deoarece $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ atunci numărul căutat are cel mult 3 factori primi distincți în descompunerea sa...3p

I. Dacă numărul are un singur factor prim în descompunere atunci el este p^{164}, p prim deci cel mai mic în acest caz este 2^{164} 2p

II. Dacă numărul are doi factori primi în descompunere atunci el este de forma $p^m \cdot q^n$, unde p, q sunt numere prime și $(m+1)(n+1) = 165$, deci cele mai mici numere de această formă sunt $2^{54} \cdot 3^2, 2^{32} \cdot 3^4, 2^{10} \cdot 3^{14}$. Dar $2^{54} \cdot 3^2 > 2^{32} \cdot 3^4 \Leftrightarrow 2^{22} > 9(A)$ iar $2^{32} \cdot 3^4 > 2^{10} \cdot 3^{14} \Leftrightarrow 2^{22} > 3^{10} \Leftrightarrow 2048^2 > 243^2\,(A)$, deci cel mai mic în acest caz este $2^{32} \cdot 3^4$ 2p

III. Dacă numărul are trei factori primi în descompunere atunci el este de forma $p^m \cdot q^n \cdot r^l$, unde p, q, r sunt numere prime și $(m+1)(n+1)(p+1) = 165$, deci cele mai mic număr de această formă este $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2$. 2p

Comparând cele trei numere cel mai mic este $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2$ 1p

10. a) $m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ - \frac{1}{3}\left(m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)\right) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 5p

$m(\sphericalangle AKB) = 180^\circ - \frac{2}{3}\left(m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)\right) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 5p

b) $[AA_1, [BB_1$ sunt bisectoare în $\Delta KAB \Rightarrow [KO$ este bisectoare $\Rightarrow m(\sphericalangle AKO) = m(\sphericalangle BKO) = 30^\circ$. Atunci $OM \perp A_1B_1 \Leftrightarrow OA_1 = OB_1$. Ducem $OR \perp KB, R \in KB, OS \perp KA, S \in KA$, deci $OS = OR$ și $m(\sphericalangle SOR) = 120^\circ = m(\sphericalangle A_1OB_1)$...5p

Dacă $S \in [AB_1] \Rightarrow R \in [KA_1)$ și dacă $S \in (B_1K) \Rightarrow R \in (A_1B)$ prin urmare $\sphericalangle B_1OS \equiv \sphericalangle A_1OR \Rightarrow \Delta OB_1S \equiv \Delta OA_1R \Rightarrow OA_1 = OB_1 \Rightarrow OM \perp A_1B_1$ 5p