CONCURSUL „ARGUMENT”
Baia Mare, 10 noiembrie 2018`

CLASA a VI-a

La problemele 1-8, scrieţi pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Dacă $\overline{abc}$ este un număr prim, atunci numărul divizorilor numărului $\overline{abcabc0}$ este:
a) 2 b) 4 c) 32 d) 64

(5p) **2.** Cel mai mic număr natural nenul care împărţit pe rând la 2; 7 şi 11 dă resturile 1; 6 respectiv 10 şi este multiplu de 5 este:
a) 615 b) 610 c) 175 d) 325

(5p) **3.** Fie numerele naturale nenule pentru care $(a,b)=5$ şi $[a,b]=1050$. Valoarea maximă a expresiei $a\cdot b+a+b$ este:
a) 5250 b) 6000 c) 6305 d) 7305

(5p) **4.** Câte numere naturale de forma $\overline{5x2y}$ sunt divizibile cu 12?
a) 10 b) 15 c) 12 d) 15

(5p) **5.** Fie mulţimea $A=\{2k \mid k\in \mathbf{N}, 1\le k\le 30\}$. Numărul elementelor din A divizibile cu 4 sau cu 6 este:
a) 25 b) 15 c) 10 d) 20

(5p) **6.** Fie n unghiuri congruente în jurul unui punct, cu măsura de x°, unde x este un număr natural impar. Valoarea minimă a lui n este:
a) 2 b) 4 c) 5 d) 8

(5p) **7.** Numărul natural n pentru care $\left(2^{3n+2}:4^n\right)^2+\left(9\cdot 5^{2n}\cdot 16^n\right):\left(25^n\cdot 2^{2n}\right)=1600$ este:
a) 1 b) 0 c) 3 d) 5

(5p) **8.** Fie punctele $A_0, A_1, A_2, ..., A_{2018}$ coliniare în acestă ordine, astfel încât $A_0A_1=1, A_1A_2=3, A_2A_3=5, ..., A_{2017}A_{2018}=4035$. Valoarea raportului $\frac{A_0A_{1009}}{A_0A_{2018}}$ este:
a) $\frac{1}{1009}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2018}$

La problemele 9 şi 10 redactaţi rezolvările complete.

9. În interiorul unghiului AOB de măsură 135°, construim 15 semidrepte distincte cu originea în O, astfel încât cele 16 unghiuri formate au măsurile exprimate prin numere naturale.

(10p) a) Arătaţi că printre cele 16 unghiuri, există cel puţin două unghiuri congruente.

(15p) b) Dacă exact 5 unghiuri din cele 16 sunt congruente, aflaţi valoarea maximă a măsurii lor. În acest caz, să se determine mulţimea valorilor posibile ale măsurilor distincte ale celorlalte 11 unghiuri.

(25p) **10.** Aflaţi cel mai mic număr natural nenul n pentru care 2n este pătrat perfect, 3n este cub perfect iar 5n este puterea a cincea a unui număr natural.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore şi 30 de minute.

SUCCES!

CONCURSUL „ARGUMENT”
10 noiembrie 2018
CLASA a VI-a
Soluţii

1	2	3	4	5	6	7	8
d	a	c	a	d	d	c	b

9. a) Dacă toate cele 16 unghiuri au măsuri diferite, atunci suma lor minimă este $1^o+2^o+3^o+...+16^o=136^o$. 5p
Cum suma acestor unghiuri nu poate depăşii 135^o, se obţine o contradicţie. Aşadar, are loc concluzia. 5p
b) Suma minimă a celorlalte 11 unghiuri (diferite de cele 5 unghiuri congruente) este $1^o+2^o+3^o+...+11^o=66^o$.
Atunci suma celor 5 unghiuri congruente este cel mult egală cu $135^o-66^o=69^o$.
Aşadar, măsura maximă a unuia dintre ele este de 13^o deoarece $69^o=5\cdot13^o+4^o$. 5p
Fie $x_1<x_2<...<x_{11}$ măsurile celor 11 unghiuri ramase si $A=\{1^\circ,2^\circ,...,12^\circ\}$.

Cazul I Daca toate cele 11 unghiuri au masuri cel mult egale cu 12°, cum acestea sunt distincte, lipseste exact un unghi din A. Deoarece $1^o+2^o+3^o+...+12^o=78^o>S=70^o$ si suma celor 11 unghiuri este $S=135^o-13^o\cdot5=70^o$, lipseste unghiul de masura 8^o, prin urmare multimea masurilor celor 11 unghuri este $A\setminus\{8^\circ\}$. 3p

Cazul II Daca am avea cel putin doua unghuri de masura mai mare decat 13^o, atunci suma minima a masurilor acestora ar fi $(1^o+2^o+3^o+...+10^o)+15^o+14^o=84^o>S$, fals 3p

Cazul III Daca exact un unghi are masura mai mare decat 13^o, atunci acesta este $x_{11}\ge14^\circ$ si lipsesc exact doua elemente din A. Fie acestea u^o si v^o cu $u<v$.
Avem $(1^o+2^o+3^o+...+12^o)-(u^o+v^o)+x_{11}=70^o \Leftrightarrow x_{11}=u^o+v^o-8^o$. 3p
Din $x_{11}\ge14^\circ$ obtinem $u^\circ+v^\circ\ge22^\circ$ deci perechea $(u^\circ,v^\circ)\in\{(10^\circ,12^\circ),(11^\circ,12^\circ)\}$.
Atunci $x_{11}\in\{14^\circ,15^\circ\}$
Solutiile sunt: $A\setminus\{8^\circ\}$, $(A\setminus\{10^\circ,12^\circ\})\cup\{14^\circ\}$ si $(A\setminus\{11^\circ,12^\circ\})\cup\{15^\circ\}$. 1p

10.
2n pătrat perfect $\Rightarrow n\,\vdots\,2$
3n cub perfect $\Rightarrow n\,\vdots\,3$
$5n=k^5, k\in\mathbf{N}^*\Rightarrow n\,\vdots\,5$ (de fapt $n\,\vdots\,5^4$) 5p
Atunci n are forma $n=2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot m$, unde a,b,c,m sunt numere naturale nenule şi $(m,30)=1$. 4p
Avem:
$2n=2^{a+1}\cdot3^b\cdot5^c\cdot m$ e pătrat perfect $\Rightarrow a+1\,\vdots\,2$; $b\,\vdots\,2$; $c\,\vdots\,2$
$3n=2^a\cdot3^{b+1}\cdot5^c\cdot m$ e cub perfect $\Rightarrow a\,\vdots\,3$; $b+1\,\vdots\,3$; $c\,\vdots\,3$
$5n=2^a\cdot3^b\cdot5^{c+1}\cdot m=k^5$ $\Rightarrow a\,\vdots\,5$; $b\,\vdots\,5$; $c+1\,\vdots\,5$ 6p
Cum $(3,5)=1$; $(2,5)=1$; $(2,3)=1$, deducem că $a\,\vdots\,15$, a impar şi $b\,\vdots\,10; b+1\,\vdots\,3$ şi $c\,\vdots\,6; c+1\,\vdots\,5$.
Cum n este minim, putem lua $m=1$ şi a,b,c numere naturale minime cu proprietăţile anterioare.

Acestea sunt a=15, b= 20 şi c=24, deci $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$ 10p

Obs. Ghicirea eventuală a rezultatului se punctează cu 3p.