Revistă de matematică editată de Catedra de matematică
a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Municipiul **Baia Mare**

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana.heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *http://www.sincaibm.ro/*

ISSN 1582– 3660

Asupra unor matrice

D.M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Abstract. In this article we will calculate products of sequences $\prod_{k=2}^{n} B(k)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ for type of matrices B from $M_n(\mathbb{C})$.

În revista Scool Science and mathematics Journal, vol. 114, nr. 8/2014, pag. 1-2, d-nul Ovidiu Furdui a propus problema 5330: *Let* $B(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ *and let* $n \geq 2$ *be an integer. Calculate the matrix product* $B(2)B(3)...B(n)$.

Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca

Ne propunem să tratăm o problemă mult mai generală şi să determinăm câteva clase de matrice, pentru care vom putea calcula produse de genul celor din problema de mai sus.

I. *Fie* $m \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, *fixat şi matricele* I_m, $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, *unde* I_m *este matricea unitate de ordinul* m, *iar* A *este o matrice involutivă, adică* $A^2 = I_m$. *Fie* $x \in \mathbb{R}$ *şi* $B(x) = x \cdot I_m + A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.
Vom calcula produsul $C_n = \prod_{k=2}^{n} B(k)$, $n \geq 2$.

Propoziţie. $C_n = \dfrac{(n-1)!}{4}\big((n^2+n+2)I_m + (n^2+n-2)A\big)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Demonstraţie. Cum $C_2 = B(2) = 2I_m + A$, vom demonstra prin inducţie că $C_n = u_n \cdot I_m + v_n \cdot A$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, unde $u_2 = 2$, $v_2 = 1$.
Avem:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n \cdot B(n+1) = (u_n \cdot I_m + v_n \cdot A)\left((n+1)I_m + A\right) = \\ &= (n+1)u_n \cdot I_m + \left((n+1)v_n + u_n\right)A + v_n \cdot I_m = \\ &= \left((n+1)u_n + v_n\right)I_m + \left(u_n + (n+1)v_n\right)A = \\ &= u_{n+1} \cdot I_m + v_{n+1} \cdot A, \end{aligned}$$

unde $\begin{cases} u_{n+1} = (n+1)u_n + v_n, & n \geq 2 \\ v_{n+1} = u_n + (n+1)v_n, & n \geq 2 \\ u_2 = 2,\ v_2 = 1 \end{cases}$.
Notăm $x_n = u_n + v_n$, $y_n = u_n - v_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Atunci $x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (n+2)u_n + (n+2)v_n = (n+2)x_n$,

iar $\quad y_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = nu_n - nv_n = ny_n$.
Deci $x_{n+1} = (n+2)x_n$ şi $y_{n+1} = ny_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Atunci, din

$$\prod_{k=2}^{n} x_{k+1} = \prod_{k=2}^{n}(k+2)\prod_{k=2}^{n} x_k \Rightarrow x_{n+1} = \frac{(n+2)!}{2}, \ n \geq 2.$$

Analog obţinem $y_{n+1} = n!$, $n \geq 2$.

Din $\begin{cases} x_n = u_n + v_n \\ y_n = u_n - v_n \end{cases}$ rezultă $\begin{cases} u_n + v_n = \dfrac{(n+1)!}{2} \\ u_n - v_n = (n-1)! \end{cases}$, $n \geq 2$. Obţinem:

$$u_n = \frac{(n-1)!}{4}(n^2+n+2); \ v_n = \frac{(n-1)!}{4}(n^2+n-2), \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2.$$

Prin urmare:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{4}\left((n^2+n+2)I_m + (n^2+n-2)A\right), \ n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Aplicaţia 1. Pentru $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ cu $A^2 = I_2$ şi $B(x) = x \cdot I_2 + A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, obţinem problema d-lui Ovidiu Furdui:

$$B(2)B(3)\ldots B(n) = \frac{(n-1)!}{4}\begin{pmatrix} n^2+n+2 & n^2+n-2 \\ n^2+n-2 & n^2+n+2 \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2.$$

Observaţie. În aceleaşi condiţii

$$B(1) \cdot B(2) \cdot B(3) \ldots B(n) = \frac{(n+1)!}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie.

$$B(1) \cdot B(2) \cdot B(3) \ldots B(n) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix} =$$
$$= 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix} = 3 \cdot 4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix} =$$
$$= 3 \cdot 4 \ldots n(n+1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{(n+1)!}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observaţie. Mulţimea matricelor involutive de ordinul doi conţine matricele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}; \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}$$

şi $\begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ pentru $b \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$.

Aplicaţia 2. Pentru $m=2$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, cu $A^2=I_2$ şi

$$B(x)=x\cdot I_2+A=\begin{pmatrix} x+2 & 1 \\ -3 & x+2 \end{pmatrix},$$

obţinem:

$$B(2)B(3)\dots B(n)=\frac{(n-1)!}{4}\begin{pmatrix} 3n^2+4n-2 & n^2+n-2 \\ -3n^2-3n+6 & n^2-n+6 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţia 3. Pentru $m=2$, $A=\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1-i & -i \end{pmatrix}$, cu $A^2=I_2$ şi

$$B(x)=x\cdot I_2+A=\begin{pmatrix} x+i & 1+i \\ 1-i & x-i \end{pmatrix},$$

obţinem:

$$B(2)B(3)\dots B(n)=$$
$$=\frac{(n-1)!}{4}\left((n^2+n+2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(n^2+n-2)\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 1-i & -i \end{pmatrix}\right).$$

Aplicaţia 4. Pentru $m=3$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cu $A^2=I_3$ şi

$$B(x)=x\cdot I_3+A=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix},$$

obţinem:

$$B(2)B(3)\dots B(n)=\frac{(n-1)!}{4}\begin{pmatrix} n^2+n+2 & 0 & n^2+n-2 \\ 0 & 2n^2+2n & 0 \\ n^2+n-2 & 0 & n^2+n+2 \end{pmatrix}.$$

(D.M. Bătineţu-Giurgiu)

II. Fie $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$ şi $U_m=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, o matrice pătratică de ordinul m, care are pe diagonala secundară 1 şi în rest toate elementele egale cu 0. Fie $x\in\mathbb{C}$ şi $B(x)=x\cdot I_m+U_m\in\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Vom indica o nouă metodă de calcul al produsului de matrice $C_n=B(x_1)B(x_2)\dots B(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, unde

$x_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$ (în metoda prezentată în **I**, numerele x_k erau naturale). Atunci:

$$\begin{aligned} C_n &= B(x_1)B(x_2)\dots B(x_n) = \\ &= (U_m + x_1 I_m)(U_m + x_2 I_m)\dots(U_m + x_n I_m) = \\ &= U_m^n + s_1 U_m^{n-1} + \dots + s_{n-1}U_m + s_n I_m, \end{aligned}$$

unde $s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \dots,$ $s_n = x_1x_2\dots x_n$, sunt sumele lui Viète, deci $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului

$$f = (X + x_1)(X + x_2)\dots(X + x_n).$$

Cum $U_m^n = \begin{cases} I_m, & n - \text{par} \\ U_m, & n - \text{impar} \end{cases}$, obţinem

$$C_n = \begin{cases} (1 + s_2 + s_4 + \dots)I_m + (s_1 + s_3 + \dots)U_m, & n - \text{par} \\ (s_1 + s_3 + \dots)I_m + (1 + s_2 + s_4 + \dots)U_m, & n - \text{impar} \end{cases}.$$

Rezultă $C_n = \dfrac{f(1) + f(-1)}{2} I_m + \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} U_m$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Observaţie. Pentru $m = 2$ şi $x_1 = 2$, $x_2 = 3, \dots, x_{n-1} = n$, găsim rezultatul din Aplicaţia 1, adică valoarea produsului din problema d-lui Ovidiu Furdui.

Observaţie. Pentru $m = 3$ şi $x_1 = 2$, $x_2 = 3, \dots, x_{n-1} = n$, găsim rezultatul din Aplicaţia 4.

III. Fie $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ şi $A(x) = E_m + xI_m$, $x \in \mathbb{C}$. Considerăm matricea $C_n = A(x_1)A(x_2)\dots A(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, unde $x_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$. Atunci

$$\begin{aligned} C_n &= (E_n + x_1 I_m)(E_n + x_2 I_m)\dots(E_n + x_n I_m) = \\ &= E_m^n + s_1 E_m^{n-1} + s_2 E_m^{n-2} + \dots + s_{n-1}E_m + s_n I_m = \\ &= (m^{n-1} + s_1 m^{n-2} + s_2 m^{n-3} + \dots + s_{n-1})E_m + s_n I_m = \\ &= \frac{1}{m}(m^n + s_1 m^{n-1} + s_2 m^{n-2} + \dots + m s_{n-1} + s_n)E_m - \frac{1}{m} s_n E_m + s_n I_m = \\ &= \frac{1}{m} f(m) E_m - s_n \left(\frac{1}{m} E_m - I_m\right), \end{aligned}$$

unde $f = (X + x_1)(X + x_2)\dots(X + x_n)$, iar

$$s_1 = x_1 + x_2 \dots x_n,\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,\ \dots,\ s_n = x_1x_2\dots x_n.$$

Aplicaţia 5. Dacă $m = 3$; $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ sunt rădăcinile de ordin n ale unităţii, $n \geq 2$, iar $A(\varepsilon_k) = E_3 + \varepsilon_k I_3$, $k = \overline{0, n-1}$, atunci

$$A(\varepsilon_0)A(\varepsilon_1)\ldots A(\varepsilon_{n-1}) = 3^{n-1} \cdot E_3 + (-1)^n I_3.$$

Bibliografie

[1] Bătineţu D.M. şi colectiv, *Exerciţii şi probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[2] Bătineţu-Giurgiu D.M., *Şiruri*, Ed. Albatros, Bucureşti

[3] Bătineţu-Giurgiu D.M., *Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1979

[4] Heuberger Dana, Muşuroia N. şi colab., *Matematica de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, clasa a X-a*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2013

[5] Pop Vasile şi Heuberger Dana, *Matematica de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, clasa a XI-a, Algebră*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2013

[6] Pop Vasile, *Algebra liniară - matrice şi determinanţi - pentru elevi, studenţi, şi concursuri*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2007

Profesor, Bucureşti

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Argument 17

De la matematicianul Liu Hui la metoda lui Gauss-Jordan

Costel Chiteş şi Daniela Chiteş

Abstract. The aim of this paper is to enlighten the link between actual and ancient mathematics, concerning the study of linear systems. We will illustrate this fact presenting the actual method of solving such a system, using Gauss's pivot element, which is close to Liu Hui's "fangcheng" method.

Scopul articolului este de a evidenţia arcul ce leagă matematica actuală de matematica descoperită în trecut. Vom ilustra acest fapt, prezentând metoda de rezolvare utilizată în zilele noastre de programatori în rezolvarea sistemelor liniare, care se apropie de cea folosită în secolul al III-lea de matematicianul chinez Liu Hui.

Introducere

Pe la 2000 î.Hr., babilonienii semitici au invadat Mesopotamia, absorbindu-i pe sumerieni şi pe akkadieni şi instalându-şi apoi capitala în Babilon. Au adoptat de la sumerieni sistemul de numeraţie poziţional în baza 60 şi scrierea cuneiformă pe tăbliţe de lut umede şi care erau apoi coapte la soare. Ne-au parvenit sute de mii de astfel de tăbliţe, care conţin calcule, acte comerciale şi de administraţie. Primele au fost descifrate de F. Thureau-Dangin şi O. Neugebauer, în anul 1916.

Printre problemele concrete descoperite la babilonieni, cam prin 1800 î.Hr., se numără rezolvarea unor sisteme liniare de două ecuaţii având două necunoscute.

De exemplu: $\begin{cases} x - y & = 10 \\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2}y & = 8 + \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Mai târziu, matematicienii chinezi se remarcă prin metodele folosite pentru rezolvarea sistemelor liniare.

Matematicianul Liu Hui (250-300 d.Hr.) scrie o celebră lucrare *Jiuzhang suanshu* (Nouă capitole asupra ştiinţei calculului), care a influenţat matematica în Orient, aşa cum *Elementele* lui Euclid (300 î.Hr.) au influenţat matematica Occidentului.

Lucrarea lui Liu Hui conţine 246 de probleme şi a fost editată în Franţa de către Karine Chemla şi Guo Shunchun (Dunod, 2004) printr-o carte cu 1100 de pagini.

În capitolul 8 din lucrarea sa, Liu Hui rezolvă sisteme de ecuaţii liniare având până la 6 necunoscute, prin utilizarea metodei *fangcheng*, pe care o numim azi *metoda pivotului* a lui Gauss.

Argument 17

O problemă practică l-a condus pe Liu Hui la rezolvarea sistemului liniar:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ \quad\quad 5y + z = 24 \\ \quad\quad 4y + 8z = 39 \end{cases} \tag{1}$$

în care $l_2' = 3l_2 - 2l_1$ şi $l_3' = 3l_3 - l_1$.

Deduce apoi sistemul echivalent: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ \quad\quad 5y + z = 24 \\ \quad\quad 36z = 99 \end{cases}$, în care $l_3'' = 5l_3' - 4l_2'$.

Procedeul de rezolvare este necunoscut savanţilor occidentali, până la începutul secolului XIX, când este decoperit de matematicianul german Carl Friederich Gauss (1777-1855). Inginerul german Wilhelm Jordan (1842-1899) răspândeşte celebrul algoritm într-un articol de geodezie publicat în anul 1888.
De aici provine denumirea sa actuală: metoda pivotului a lui Gauss sau metoda eliminării Gauss-Jordan.

Metoda pivotului a lui Gauss

Strategia rezolvării unui sistem liniar constă în a-l înlocui cu un sistem echivalent (adică cu unul care are aceleaşi soluţii) şi care este mai uşor de rezolvat.

Ne vom referi la rezolvarea sistemelor liniare ai căror coeficienţi sunt numere reale, sau complexe, sau într-un corp comutativ oarecare.

Studiind operaţiile care se aplică unui sistem liniar, s-au degajat următoarele trei operaţii elementare pe linii:

1) Schimbarea a două linii;

2) Multiplicarea tuturor coeficienţilor unei linii printr-o constantă nenulă;

3) Înlocuirea unei linii cu linia obţinută din aceasta, la care adăugăm o altă linie amplificată cu o constantă.

Pentru simplificarea rezolvării unui sistem liniar, s-a adoptat scrierea sa sub o formă matriceală. De exemplu, sistemul (1) de mai sus are următoarea formă matriceală:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \tag{2}$$

numită matricea extinsă a sistemului (1).

Definiţie. O matrice dreptunghiulară se numeşte *matrice eşalon* dacă se verifică următoarele proprietăţi:

1) Toate liniile nenule se află deasupra tuturor liniilor nule.

2) Coeficientul principal al fiecărei linii nenule (primul care este diferit de zero) se află într-o coloană situată la dreapta coloanei al cărei coeficient principal este situat pe linia de deasupra ei.

3) Toţi coeficienţii de pe o coloană situaţi sub coeficientul principal sunt nuli.

O matrice eşalon se numeşte *matrice eşalon redusă* dacă verifică condiţiile:

4) Coeficientul principal al fiecărei linii nenule este egal cu 1;

5) Coeficienţii principali (egali cu 1) sunt singurele elemente nenule ale coloanelor în care se situează.

Remarcă. a) Toate matricele nenule pot fi reduse pe linii (cu ajutorul operaţiilor elementare pe linii) sub forma unei matrice eşalon, reprezentarea nefiind unică.

b) Reprezentarea unei matrice sub forma unei matrice eşalon redusă este unică.

Calculatoarele posedă funcţii matriceale, utilizând abrevierea (RREF-Reduced Row Echelon Form).

Prezentăm câteva matrice eşalon în care coeficienţii principali (ce au orice valoare nenulă) sunt notaţi cu $\bullet$ iar ceilalţi coeficienţi ai matricei de pe liniile nenule (pot fi nuli sau nu) sunt evidenţiaţi prin $*$

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un exemplu de matrice eşalon redusă este: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Definiţie. Se numeşte *poziţie pivot* a unei matrice A, poziţia corespunzătoare unui coeficient principal (egal cu 1) din forma eşalon redusă a lui A. O coloană ce conţine o poziţie pivot se numeşte coloană pivot.

Vom aduce la forma eşalon matricea A, apoi vom rezolva sistemul (1).

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & -1 & -5 & -18 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{71}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

Deducem că sistemul (1) este compatibil determinat şi are unica soluţie:

$$\begin{cases} x = \frac{37}{4} \\ y = \frac{17}{4} \\ z = \frac{11}{4} \end{cases}.$$

Exemplu de sistem liniar rezolvat prin metoda pivotului lui Gauss

$$\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases} \quad \text{unde } x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 5. \tag{3}$$

Vom scrie matricea extinsă a sistemului (3) sub forma eşalon redusă:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deducem că necunoscutele principale sunt: x_1, x_2, x_5 iar x_3, x_4 sunt necunoscute secundare.

Sistemul (3) este compatibil nedeterminat. Soluţiile sunt date prin relaţiile:

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha - 3\beta - 24 \\ x_2 = 2\alpha - 2\beta - 7 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = 4 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Bibliografie

[1] Chiteş Costel, Petriceanu Daniel şi Vernescu Andrei, *Manual pentru clasa a XI-a* Editura GIL, 2006

[2] Escofier Jean-Pierre, *Toute l'algèbre de la Licence*, Dunod, Paris, 2011

[3] Pop Vasile şi Corovei Ilie, *Algebră pentru ingineri, Probleme*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2003

[4] Pop Vasile, *Algebră liniară*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2003

[5] Ştefănescu Mirela, *15 lecţii de istoria matematicii*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2008

Lector dr., Bucureşti

Profesoară, Bucureşti

Argument 17

Interferenţe stranii între algebră şi trigonometrie

Leonard Giugiuc şi Daniel Sitaru

Abstract. An algebraic inequality proved by geometrical and trigonometrical methods.

Autorii acestui articol au descoperit următorul rezultat:

Dacă a, b *şi* c *sunt numere reale strict pozitive care satisfac relaţia* $ab + bc + ca = 3$*, atunci*

$$\frac{3-a^2}{3+a^2} + \frac{3-b^2}{3+b^2} + \frac{3-c^2}{3+c^2} \geq 12\sqrt{\frac{abc}{(3+a^2)(3+b^2)(3+c^2)}}.$$

Deşi, în aparenţă, este un rezultat descurajant prin forma sa, el ne-a ajutat să punem la punct o metodă nouă şi interesantă, prin interferenţa sa cu trigonometria triunghiului.
Vom vedea în continuare cum o problemă pur algebrică ne va pune în contact cu anumite formule trigonometrice într-un mod neaşteptat, dar destul de firesc.

Notăm $\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = x$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = y$ şi $\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right) = z$. Evident că $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$; mai mult, $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x = 1$, deci numerele $2x, 2y$ şi $2z$ sunt măsurile unghiurilor unui triunghi.
Observăm că

$$\frac{3-a^2}{3+a^2} = \frac{3-3(\operatorname{tg} x)^2}{3+3(\operatorname{tg} x)^2} = \frac{1-(\operatorname{tg} x)^2}{1+(\operatorname{tg} x)^2} = \cos 2x$$

şi analog $\frac{3-b^2}{3+b^2} = \cos 2y$ şi $\frac{3-c^2}{3+c^2} = \cos 2z$.
Avem

$$\frac{3-a^2}{3+a^2} + \frac{3-b^2}{3+b^2} + \frac{3-c^2}{3+c^2} = \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = \\ = 1 + 4\sin x \sin y \sin z.$$

În altă ordine de idei,

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+(\operatorname{tg} x)^2}} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{3+a^2}}.$$

Analog deducem că $\sin y = \dfrac{b}{\sqrt{3+b^2}}$ şi $\sin z = \dfrac{c}{\sqrt{3+c^2}}$.
Deci am obţinut într-un mod neaşteptat şi elegant identitatea

$$\frac{3-a^2}{3+a^2} + \frac{3-b^2}{3+b^2} + \frac{3-c^2}{3+c^2} = 1 + \frac{4abc}{\sqrt{(3+a^2)(3+b^2)(3+c^2)}}.$$

În cele ce urmează vom nota $a+b+c = 3s$ şi $abc = p^2$.
Cum $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$, deducem că $s \geq 1$.
De asemenea, via $AM - GM$, obţinem că $3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} \leq ab+bc+ca \Rightarrow p \leq 1$.
Avem:

$$(3+a^2)(3+b^2)(3+c^2) =$$
$$= 27 + 9(a^2+b^2+c^2) + 3(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) + (abc)^2.$$

Dar

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 9s^2 - 6$$

şi

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) = 9 - 6sp^2.$$

De aici,

$$(3+a^2)(3+b^2)(3+c^2) =$$
$$= 27 + 9(9s^2-6) + 3(9-6sp^2) + p^4 = (9s-p^2)^2.$$

În concluzie,

$$\sqrt{(3+a^2)(3+b^2)(3+c^2)} = 9s - p^2.$$

Deci inegalitatea iniţială este echivalentă cu: $1 \geq 4\,\dfrac{3p-p^2}{9s-p^2}$.

Pentru $s \geq 1$ arbitrar fixat, definim funcţia $f : (0,1] \to R$, $f(p) = \dfrac{3p-p^2}{9s-p^2}$.

$$f'(p) = \frac{3(p^2-6sp+9s)}{(9s-p^2)^2} > 0,\ \forall p \in (0,1] \Rightarrow f \text{ este strict crescătoare} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max f = f(1) = \frac{2}{9s-1} \leq \frac{1}{4}.$$ Deci inegalitatea a fost demonstrată.

Bibliografie

[1] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t243f6h1142992
[2] http://www.facebook.com/groups/1593739420880226/

Profesor, C.N. "Traian", Drobeta Turnu Severin
Profesor, C.N. Economic "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin

Argument 17

Asupra unei probleme de admitere

Dana Heuberger

Abstract. In this paper we give several proofs of an interesting contest limit.

În această notă vom vedea mai multe soluţii ingenioase ale unei limite interesante dată la simularea admiterii în Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 2015.

Problema sursă este următoarea:

P. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2-\sqrt[n]{2}\right)$.

Se arată uşor că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$, $x_n = \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2-\sqrt[n]{2}\right)$, $\forall n \geq 2$ este strict descrescător şi că $\forall n \geq 2$, $x_n \in (0,\, 1)$, aşadar el este convergent.

Fiecare dintre soluţiile pe care le vom vedea în continuare necesită ingeniozitate. Pentru unele dintre ele este nevoie de noţiuni şi rezultate care nu se află în manualele şcolare, dar a căror cunoaştere ajută la o abordare mai simplă a acestei limite şi a altora asemănătoare. Le vom prezenta succint în cele ce urmează.

Propoziţia 1. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale strict pozitive, cu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \ell$.

a) *Dacă* $\ell < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) *Dacă* $\ell > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Observaţia 1. Propoziţia anterioară este o extindere a Criteriului raportului, a cărei demonstraţie o puteţi vedea în [1].

Definiţia 1. Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, se numeşte **şirul sumelor parţiale** asociat lui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, iar perechea ordonată $((a_n), (S_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numeşte **serie** de termen general a_n.

Notaţie. Seria $((a_n), (S_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ se notează prin unul dintre simbolurile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n,\ \sum_{n\geq 1} a_n,\ \text{sau}\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Definiţia 2. Spunem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ este **convergentă** dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Spunem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ este **divergentă** dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent.
Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci notăm $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = \ell$ şi spunem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ are **suma** ℓ.

Exemple.

1. Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n!}$ este convergentă, iar suma sa este egală cu $e-1$.

Într-adevăr, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(E_n-1)=e-1$.

2. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)=\infty$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ este divergentă şi are limita ∞.

3. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$ nu are limită, aşadar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n$ este divergentă şi nu are sumă.

Teorema 1. (**Criteriul comparaţiei**)
Fie şirurile de numere pozitive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şi* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. *Dacă există* $N\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N$, $a_n\leq b_n$, *avem*:

a) dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}b_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n$ *este convergentă.*

b) dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n$ *este divergentă, atunci şi seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}b_n$ *este divergentă.*

2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\in(0,\infty)$, *atunci seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}b_n$ *au aceeaşi natură.*

3. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, *avem*:

a) dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}b_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n$ *este convergentă.*

b) dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n$ *este divergentă, atunci şi seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}b_n$ *este divergentă.*

Mai multe lucruri utile despre serii se pot afla consultând lucrarea [2].

În cele ce urmează, vom prezenta cinci demonstraţii total diferite ale faptului că limita căutată este egală cu 0, lăsând cititorul să o aleagă pe aceea care i se potriveşte mai bine.

Demonstraţia 1. (**Marian Cucoaneş**)

Folosind inegalitatea mediilor, obţinem: $\forall k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, $\sqrt[k]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[k]{2}}\geq 2$, aşadar

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\ k\geq 2,\ 2-\sqrt[k]{2}\leq\frac{1}{\sqrt[k]{2}}.$$

Obţinem: $x_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\left(2-\sqrt[k]{2}\right)\leq\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[k]{2}}$, adică

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ 0\leq x_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}.$$

Aplicându-i ultimei inegalităţi criteriul cleştelui, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. $\square$

Demonstraţia 2. (**Dana Heuberger**)
Din inegalitatea mediilor, obţinem:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ 0\leq x_n\leq\left(\frac{2\,(n-1)-\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}+\ldots+2^{\frac{1}{n}}\right)}{n-1}\right)^{n-1}\overset{not}{=}y_n \qquad (1)$$

Avem: $y_n=(1+z_n)^{n-1}$, unde $z_n=\dfrac{n-1-\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}+\ldots+2^{\frac{1}{n}}\right)}{n-1}$.

Folosind lema Cesaro-Stolz, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2^{\frac{1}{n+1}}}{n-(n-1)}=0$.

Apoi, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\overset{1^\infty}{=}e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)\cdot z_n}\overset{not}{=}e^{\ell_1}$.

Deducem: $\ell_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-1-\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}+\ldots+2^{\frac{1}{n}}\right)\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}(t_n\cdot\ln\ n)$,

unde $t_n=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}+\ldots+2^{\frac{1}{n}}-(n-1)}{\ln\ n}$. Folosind din nou lema Cesaro-Stolz, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n+1}}-1}{\ln(n+1)-\ln\ n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{n}{n+1}=\ln 2.$$

Aşadar $\ell_1=-\infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=e^{\ell_1}=0$.
Aplicând criteriul cleştelui în (1), obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. □

Demonstraţia 3. (**Dan-Ştefan Marinescu**)
Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, notăm $a_n=n\cdot\left(1-\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$. Avem $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-\dfrac{a_n}{n}$, $\forall n\geq 2$.
Obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\left(2-\sqrt[n+1]{2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}=\ln\ 2.$$

Apoi, folosind lema Cesaro-Stolz, rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}}{\ln\frac{n+1}{n}}$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{a_n}{n}\right)}{-\frac{a_n}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot a_n=-\ln 2 \qquad (2)$$

Ştim că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ell\in[0,1]$. Dacă $\ell\neq 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\ x_n}{\ln\ n}=0$, contradicţie cu (2). Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. □

Observaţie. În lucrarea [3] putem vedea următoarea teoremă generală (demonstrată foarte ingenios de domnul Dan-Ştefan Marinescu pentru problema sursă):

Teorema 2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir cu termeni pozitivi pentru care există*

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\right)=\ell\in\overline{\mathbb{R}}.$$

a) Dacă $\ell\in\mathbb{R}^*$ *iar şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

b) Dacă $\ell=\infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

c) Dacă $\ell=-\infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

Demonstraţia 4. (**Marius Mâinea**)

Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, avem $x_n>0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\sqrt[n+1]{2}\right)=1$, deci nu putem folosi criteriul raportului.

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1-\sqrt[n+1]{2}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\sqrt[n+1]{2}\right)}$.

Apoi, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-2^{\frac{1}{n+1}}\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{2^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}=-\ln\ 2$.

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=e^{-\ln\ 2}=\dfrac{1}{2}$.

Folosind **Propoziţia 1**, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. □

Demonstraţia 5. (**Cristinel Mortici**)

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}=\ln\ 2\in\mathbb{R}_+^*$, folosind **Teorema 1** rezultă că seriile

$\sum\limits_{n\geq 2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ şi $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n}$ au aceeaşi natură.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)=\infty$, deci $\sum\limits_{n\geq 2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=\infty$.

Apoi, deoarece $\forall\, x>-1$, $\ln(1+x)\leq x$, obţinem:

$$\forall\, n\geq 2,\ \ln\left(1+\left(1-\sqrt[n]{2}\right)\right)\leq 1-\sqrt[n]{2}=-\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$$

aşadar $\sum\limits_{n\geq 2}\ln\left(2-\sqrt[n]{2}\right)\leq -\sum\limits_{n\geq 2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=-\infty$, deci $\sum\limits_{n\geq 2}\ln\left(2-\sqrt[n]{2}\right)=-\infty$.

În consecinţă,

$$-\infty=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(2-\sqrt[k]{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(2-\sqrt[2]{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(2-\sqrt[n]{2}\right),$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. □

Ţin să le mulţumesc remarcabililor matematicieni Marian Cucoaneş, Dan-Ştefan Marinescu, Marius Mâinea şi, nu în ultimul rând, domnului Cristinel Mortici, pentru extrem de interesantele discuţii pe care le-am purtat pe forumul *Olimpiada pe Şcoală*.

Argument 17

Bibliografie

[1] Constantinescu Al., Vasile C., Articolul *În legătură cu criteriul raportului*, Gazeta Matematică nr. 9 / 2005, pag. 420–422

[2] Duca D. I. (coord.), *Analiza matematică pentru examenul de licenţă* 2013, pag. 31–50, http://www.cs.ubbcluj.ro/wp-content/uploads/manual-licenta-2013-analiza-matematica-informatica-romana.pdf

[3] Heuberger C. (coord.), Boroica Gh., Pop V., Muşuroia N., Bojor F., Heuberger C., *Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, Clasa a XI-a, vol. II, Analiză matematică*, pag. 40–42, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2014

[4] Ivan D. M. (coord.), *Teste grilă de matematică* 2013, Ed. U. T. Press, Cluj Napoca 2012

[5] Olimpiada pe Şcoală (The School Yard Olympiad), Forum interactiv de matematică, https://www.facebook.com/groups/1593739420880226/?fref=ts

Profesoară, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Argument 17

O aplicaţie a unei teoreme a lui Torricelli

Dana Heuberger şi Dan Ştefan Marinescu

Abstract. In this note we will give several proofs of some interesting inequalities concerning the Fermat-Torricelli point of a triangle.

În acest articol vom demonstra câteva rezultate interesante legate de punctul Fermat-Torricelli al unui triunghi.

Ne vom reaminti mai întâi câteva rezultate fundamentale, a căror demonstraţie se găseşte în lucrarea [1].

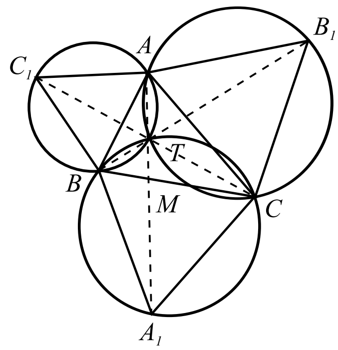
Definiţia 1. Se consideră triunghiul ABC. Punctul lui Fermat (numit şi punctul lui Fermat-Torricelli) este acel punct din plan care realizează minimul sumei $MA + MB + MC$, unde M este un punct din planul triunghiului ABC.

Teorema 1. **(Torricelli)** *Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile cu măsura strict mai mică decât* $\frac{2\pi}{3}$. *Pe laturile sale se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale* ABC_1, ACB_1 *şi* BCA_1. *Cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun,* T.

Observaţia 1. Din demonstraţia teoremei rezultă că există un unic punct T din plan cu proprietatea că

$$\mu\left(\widehat{ATB}\right)=\mu\left(\widehat{ATC}\right)=\mu\left(\widehat{BTC}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Punctul T se numeşte punctul lui Torricelli pentru triunghiul ABC.



Teorema 2. *Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile cu măsura strict mai mică decât* $\frac{2\pi}{3}$, *triunghiurile echilaterale* ABC_1, ACB_1 *şi* BCA_1 *construite în exterior ca în teorema precedentă şi punctul* T *al lui Torricelli asociat triunghiului. Atunci:*

(*a*) *Dreptele* AA_1, BB_1 *şi* CC_1 *sunt concurente.*

(*b*) $AT + BT + CT = AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Teorema 3. **(Fermat)** *Punctul* T *al lui Torricelli are proprietatea că realizează minimul sumei* $MA + MB + MC$, *unde* M *este un punct din planul triunghiului* ABC, *deci coincide cu punctul lui Fermat.*

Observaţia 2. Dacă $A \geq \frac{2\pi}{3}$, atunci se arată că punctul Fermat-Torricelli coincide cu A.
Vom vedea în continuare câteva aplicaţii interesante ale punctului Fermat-Torricelli.

Propoziţia 1. *Se consideră triunghiul ABC şi punctul T al lui Fermat-Torricelli asociat triunghiului. Atunci,*

$$BT + CT \leq \frac{2}{\sqrt{3}} BC.$$

Demonstraţia 1.

Cazul I: $A < \frac{2\pi}{3}$, $B < \frac{2\pi}{3}$, $C < \frac{2\pi}{3}$.
Din Teorema 2 avem $AT + BT + CT = AA_1$. Fie $\{M\} = BC \cap AA_1$.
Deoarece $\mu\left(\widehat{BTA_1}\right) = \mu\left(\widehat{CTA_1}\right) = \frac{\pi}{3}$, obţinem

$$d(B, AA_1) = \frac{BT\sqrt{3}}{2} \leq BM \quad \text{şi} \quad d(C, AA_1) = \frac{CT\sqrt{3}}{2} \leq CM,$$

deci

$$d(B, AA_1) + d(C, AA_1) = \frac{BT\sqrt{3}}{2} + \frac{CT\sqrt{3}}{2} \leq BM + CM = BC.$$

Adică $BT + CT \leq \frac{2}{\sqrt{3}} BC$.
Egalitatea are loc atunci când $BC \perp AA_1$. În acest caz, din congruenţa triunghiurilor BTM şi CTM rezultă că $BM = CM$, adică AA_1 este mediatoarea lui BC. Cu alte cuvinte, egalitatea are loc dacă şi numai dacă $AB = AC$.

Cazul al II-lea: $A \geq \frac{2\pi}{3}$.
Atunci, $\cos A \leq -\frac{1}{2}$, $T = A$ şi folosind notaţiile cunoscute, enunţul devine

$$c + b \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot a.$$

Dar $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \geq b^2 + c^2 + bc \geq \frac{3(b+c)^2}{4}$, de unde obţinem $a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(b + c)$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $b = c$.

Cazul al III-lea: $B \geq \frac{2\pi}{3}$ sau $C \geq \frac{2\pi}{3}$. Atunci $T = B$ sau $T = C$ şi enunţul devine $BC \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot BC$, adevărat. □

Demonstraţia 2. Vom folosi următoarea lemă:

Lema 1. *Pentru orice $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$,*

$$x^2 - 2xy \cdot \cos\alpha + y^2 \geq (x+y)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y$ *sau* $\alpha = (2k+1)\pi$, *cu* $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstraţia Lemei: Inegalitatea este echivalentă cu

$$x^2\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + y^2\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - 2xy\left(\cos\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \geq 0$$

care este adevărată.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y$ sau $\alpha = (2k+1)\pi$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

Revenim la demonstraţia Propoziţiei 1:

Cazul I: $A < \frac{2\pi}{3}$, $B < \frac{2\pi}{3}$, $C < \frac{2\pi}{3}$.

Atunci, $\mu\left(\widehat{BTC}\right) = \frac{2\pi}{3}$ şi cu inegalitatea din Lema 1, avem:

$$a^2 = BT^2 + CT^2 - 2BT \cdot CT \cdot \cos\frac{2\pi}{3} \geq (BT+CT)^2 \cdot \sin^2\frac{\pi}{3}$$

de unde obţinem $BC \geq (BT+CT) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $BT = CT$, adică dacă şi numai dacă $AB = AC$.

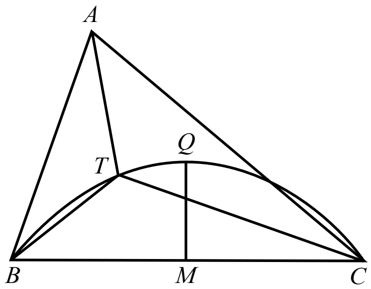
Cazul al II-lea: $A \geq \frac{2\pi}{3}$. Avem $T = A$, deci $TB + TC = AB + AC$.

Atunci, $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$ cu egalitate dacă şi numai dacă $b = c$.
Am aplicat inegalitatea din Lema 1 pentru $\alpha = A, x = b, y = c$.
Cazul al III-lea se argumentează ca la prima demonstraţie. □

Demonstraţia 3. (Rachid Moussaoui, Maroc)

Cazurile II şi III se rezolvă la fel ca în primele două demonstraţii, aşa că ne vom mărgini să demonstrăm cazul I.

Avem $\mu\left(\widehat{BTC}\right) = \frac{2\pi}{3}$.



Apoi, $BC^2 = BT^2 + CT^2 + BT \cdot CT = (BT+CT)^2 - BT \cdot CT$.
Aşadar suma $BT + CT$ e maximă dacă şi numai dacă produsul $BT \cdot CT$ este maxim.

Avem $BT \cdot CT = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot S_{BTC} \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot S_{BQC}$, unde Q este punctul de pe arcul BTC pentru care $QM \perp BC$, M fiind mijlocul lui BC.

Adică $BT \cdot CT \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{BQ^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{BC^2}{3}$.

Aşadar $(BT + CT)^2 \leq BC^2 + BT \cdot CT = \frac{4 \cdot BC^2}{3}$.

Rezultă că $BT + CT \leq \frac{2 \cdot BC}{\sqrt{3}}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $T = Q$, adică dacă şi numai dacă $AB = AC$. □

Propoziţia 2. *Se consideră triunghiul ABC cu $A \leq \frac{2\pi}{3}$ şi punctul T al lui Fermat-Torricelli asociat triunghiului. Atunci,* $3\left(BT^2 + CT^2\right) \geq 2BC^2$.

Demonstraţie. Vom folosi următoarea lemă:

Lema 2. *Dacă $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât* $\cos\alpha \leq 0$, *atunci*

$$2\left(x^2 + y^2\right) \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq x^2 - 2xy \cdot \cos\alpha + y^2$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y$ *sau* $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, *cu $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstraţia Lemei: Cum $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$, inegalitatea este echivalentă cu $\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right) \cdot \cos\alpha \geq x^2 - 2xy \cdot \cos\alpha + y^2 \Leftrightarrow 0 \geq (x - y)^2 \cdot \cos\alpha$, care este adevărată. Cazul de egalitate se deduce imediat.

Revenim la demonstraţia Propoziţiei 2:

Cazul I: $A < \frac{2\pi}{3}$, $B < \frac{2\pi}{3}$, $C < \frac{2\pi}{3}$.

Atunci, $\mu\left(\widehat{BTC}\right) = \frac{2\pi}{3}$ şi din Lema 2 obţinem:

$$a^2 = BT^2 - 2BT \cdot CT \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + CT^2 \leq 2\left(BT^2 + CT^2\right) \cdot \sin^2\frac{\pi}{3},$$

de unde rezultă concluzia.

Cazul al II-lea: $A = \frac{2\pi}{3}$. Atunci $T = A$, iar inegalitatea revine la:

$3\left(b^2 + c^2\right) \geq 2 \cdot a^2$ iar această din urmă inegalitate este o consecinţă a Lemei 2, pentru $x = b$, $y = c$, $\alpha = A$.

Cazul al III-lea: $B \geq \frac{2\pi}{3}$ sau $C \geq \frac{2\pi}{3}$. Atunci, $T = B$ sau $T = C$ iar inegalitatea revine la $3 \cdot a^2 \geq 2 \cdot a^2$, care este evident adevărată.

Observaţie. Condiţia $A \leq \frac{2\pi}{3}$ este esenţială.

Într-adevăr, fie triunghiul ABC cu $A = \pi - \alpha$, unde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, şi $AB = AC = x > 0$. Atunci $T = A$, iar inegalitatea de demonstrat revine la: $3\left(AB^2 + AC^2\right) \geq 2BC^2 \Leftrightarrow 6x^2 \geq 4x^2\left(1 + \cos\alpha\right)$, care nu este neapărat adevărată. (Pentru $\alpha \to 0$ se obţine $6 \geq 8$). $\square$

Aplicaţia 1. Să se arate că pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$,

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{z} + \frac{y^2 + yz + z^2}{x} + \frac{z^2 + zx + x^2}{y} \geq 3\left(x + y + z\right).$$

Soluţie. Vom folosi următoarea lemă:

Lema 3. *Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile cu măsura strict mai mică decât $\frac{2\pi}{3}$ şi punctul T al lui Torricelli asociat triunghiului. Atunci,*

$$AT + BT + CT \leq \frac{AB + BC + CA}{\sqrt{3}}.$$

Demonstraţia Lemei: Din Propoziţia 1 obţinem:

$BT + CT \leq \frac{2}{\sqrt{3}}BC$, $CT + AT \leq \frac{2}{\sqrt{3}}CA$, şi $AT + BT \leq \frac{2}{\sqrt{3}}AB$.

Adunând aceste trei inegalităţi rezultă concluzia.

Revenim la demonstraţia Aplicaţiei 1:

Alegem punctele A, B, C, T astfel încât $AT = x$, $BT = y$, $CT = z$, şi $\mu\left(\widehat{BTC}\right) = \mu\left(\widehat{ATC}\right) = \mu\left(\widehat{ATB}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Atunci T este punctul lui Torricelli al triunghiului ABC, iar $a^2 = y^2 + yz + z^2$, $b^2 = x^2 + xz + z^2$ şi $c^2 = x^2 + xy + y^2$ şi

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{z} + \frac{y^2 + yz + z^2}{x} + \frac{z^2 + zx + x^2}{y} = \frac{c^2}{z} + \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \overset{Bergstrom}{\geq}$$

$$\geq \frac{(a + b + c)^2}{x + y + z} \overset{Lema3}{\geq} \frac{\left(\sqrt{3}\left(x + y + z\right)\right)^2}{x + y + z} = 3\left(x + y + z\right).$$

$\square$

Invităm cititorul să folosească aceste idei pentru a demonstra:

Aplicaţia 2. Să se arate că pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$,

$$\sum_{cyc.} \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sum_{cyc.} \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

Bibliografie

[1] L. Nicolescu, V. Boskoff, *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990
[2] Olimpiada pe Şcoală (The School Yard Olympiad), Forum interactiv de matematică, https://www.facebook.com/groups/1593739420880226/?fref=ts

Profesoară, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare
Profesor, Colegiul Naţional "Iancu de Hunedoara", Hunedoara

Argument 17

Unde este greşeala în calculul volumului unui cort?

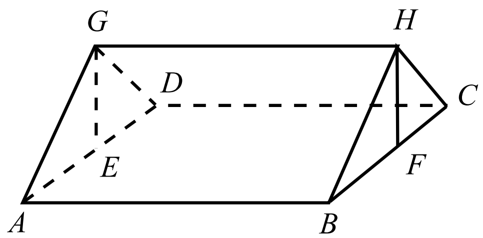
Vasile Pop

Abstract. In this article there are given three "solutions" of the same volume problems, resulting three different results. Where is the mistake?

1. Introducere

Un cort de campare de model clasic este un corp geometric care, evident, are un volum bine determinat şi ne propunem, în această lucrare, să determinăm volumul unui astfel de cort. Surprinzător, prin diferite raţionamente prin care corpul nostru se descompune în corpuri uzuale (piramide), efectuând calcule corecte, obţinem volume diferite!

Considerăm un cort din pânză cu forma din desen:



în care baza este un dreptunghi $ABCD$, cu dimensiunile $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, înălţimea la intrare $HF = h_1$ ($FB = FC$) şi în spate $GE = h_2$ ($AE = ED$), $h_1 \geq h_2$.
O primă observaţie este că, deşi pare un corp "comun", nu este niciunul din corpurile ale căror volume le avem date prin formule, astfel că singura modalitate de a calcula volumul este de a-l partiţiona în corpuri mai simple (piramide, prisme). în continuare, vom face mai multe astfel de descompuneri, cu ajutorul cărora să determinăm volumul cortului nostru.

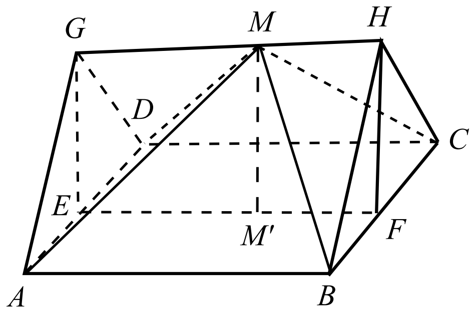
2. Metode de calcul al volumului

Metoda 1. Partiţionăm volumul cortului în două piramide, ducând segmentele $[GB]$ şi $[GC]$: o piramidă patrulateră cu baza $ABCD$ şi înălţime GE, de volum $V_1' = \dfrac{abh_2}{3}$ şi o piramidă triunghiulară cu baza BCH şi vârful în G, de volum $V_1'' = \dfrac{abh_1}{6}$.

Astfel, prin acest raţionament, am obţinut volumul cortului $V_1 = \dfrac{1}{6}ab(h_1 + 2h_2)$. Rezultatul nu pare plauzibil, deoarece formula finală nu este simetrică în h_1 şi h_2.

Metoda 2. Partiţionăm volumul cortului în două piramide, ducând segmentele $[AH]$ şi $[DH]$: o piramidă patrulateră cu baza $ABCD$ şi vârful în H şi o piramidă triunghiulară cu baza ADG şi vârful în H. Obţinem pentru volumul cortului formula $V_2 = \dfrac{1}{6}ab(2h_1 + h_2)$, care este aceeaşi cu V_1, în care am schimbat între ele h_1 şi h_2, deci nici ea nu este plauzibilă. Mai mult, în cazul $h_1 \neq h_2$ obţinem $V_1 \neq V_2$, ceea ce creează dubii serioase (un acelaşi cort cu două volume diferite).

Metoda 3. Alegem un punct arbitrar M pe segmentul $[GH]$ şi descompunem volumul cortului în două piramide triunghiulare: cu bazele ADG şi vârful M, respectiv BCH şi vârful M şi o piramidă patrulateră cu baza $ABCD$, cu vârful M şi înălţimea MM'.



Dacă notăm $EM' = x \in [0, a]$, obţinem volumul cortului

$$V_3(x) = \frac{bxh_2}{6} + \frac{b(a-x)h_1}{6} + \frac{b((a-x)h_2 + xh_1)}{3} =$$
$$= \frac{1}{6}\,ab(h_1 + 2h_2) + \frac{1}{6}\,xb(h_1 - h_2).$$

De remarcat trei cazuri particulare:

– pentru $x = 0$, se obţine descompunerea din metoda 1 şi se confirmă rezultatul $V_3(0) = V_1$;

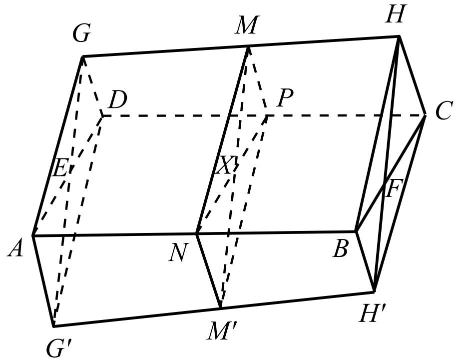
– pentru $x = a$, se obţine descompunerea din metoda 2 şi se confirmă rezultatul $V_3(a) = V_2$;

– pentru $x = \dfrac{a}{2}$, se obţine

$$V_3\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ab(h_1 + h_2)}{4} = \frac{1}{2}\left(V_3(0) + V_3\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\,(V_1 + V_2).$$

Astfel, dacă punctul M se ia la mijlocul segmentului $[GH]$, volumul cortului nostru este media aritmetică a celor două volume obţinute prin Metodele 1 şi 2. Acest volum pare plauzibil, deoarece formula $V_3\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ab(h_1+h_2)}{4}$ este simetrică în raport cu h_1 şi h_2.

Metoda 4. Să ne imaginăm că, pe baza $ABCD$ cortului dat, am lipit un alt cort (privit eventual răsturnat pe faţa ADG) identic cu cel dat, cu înălţimea $EG' = FH = h_1$ în prelungirea înălţimii GE şi înălţime $FH' = GE = h_2$ în prelungirea înălţimii HF.



Obţinem un corp care are bazele paralele $AGDG'$ şi $BHCH'$, cu distanţa dintre ele $EF = a$ şi în care orice secţiune paralelă cu bazele este un romboid $MPM'N$, cu diagonale perpendiculare $NP = b$, $MM' = h_1 + h_2$ şi aria constantă $S = \frac{b(h_1+h_2)}{2}$. Conform principiului lui Cavalieri, volumul acestui corp format cu cele două corturi, este acelaşi cu volumul unei prisme de înălţime a şi în care aria oricărei secţiuni paralele cu bazele este S, deci obţinem $2V_4 = \frac{ab(h_1+h_2)}{2}$, sau $V_4 = \frac{ab(h_1+h_2)}{4}$.

Prin acest raţionament, am ajuns la acelaşi rezultat "plauzibil" $V_4 = V_3 = \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{V_1+V_2}{2}$.

3. Unde este greşeala?

Prin cele patru metode, în care calculele sunt corecte, s-au obţinut o infinitate de valori posibile ale volumului cortului nostru. Evident, se pune întrebarea: care din rezultatele obţinute este corect sau dacă vreunul din ele este corect şi, în plus, care este explicaţia acestor rezultate diferite, aparent corecte? Toate acestea vor avea răspuns în numărul viitor.

Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Argument 17

Densitatea întregilor algebrici şi numerelor algebrice reale

Cristina Lavinia Savu

Abstract. In this paper we define the sets of the strong algebraic integers of n-th degree and of the strong algebraic numbers of n-th degree. We prove that these sets are dense in $\mathbb{R}$ and we explore some consequences of the previous results

Definiţie. Un număr complex α se numeşte întreg algebric, dacă este soluţie a unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi şi coeficientul termenului de grad maxim este egal cu 1.

Definiţie. Spunem că polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ este *polinomul minimal* pentru *întregul algebric* $a \in \mathbb{C}$, dacă este ireductibil peste $\mathbb{Z}[X]$, unitar şi anulator, adică $f(a) = 0$.

Definiţie. Spunem că polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$ este *polinom minimal* pentru *numărul algebric* $a \in \mathbb{C}$, dacă este ireductibil peste $\mathbb{Q}[X]$, unitar şi anulator, adică $f(a) = 0$.

Observaţie 1. Pentru fiecare *întreg* (*număr*) *algebric, polinomul minimal* există şi este unic.

Observaţie 2. Dacă $g \in \mathbb{Q}[X]$ este polinom anulator pentru *întregul* (*numărul*) *algebric* $a \in \mathbb{C}$, atunci *polinomul minimal* al lui a divide pe g în $\mathbb{Q}[X]$.

Definiţie. Spunem că un *număr* (*întreg*) *algebric* $a \in \mathbb{C}$ *are gradul* $n \in \mathbb{N}^*$, dacă polinomul său minimal are gradul n.

Observaţie. *Întregii algebrici* de gradul 1 sunt numerele întregi (mulţimea $\mathbb{Z}$), iar *numerele algebrice* de gradul 1 sunt numerele raţionale (mulţimea $\mathbb{Q}$).

Definiţie. Spunem că o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ este *densă peste* $\mathbb{R}$ dacă pentru orice interval deschis, nevid, $I \subset \mathbb{R}$, avem $I \cap A \neq \emptyset$.

Observaţie. Mulţimea întregilor algebrici de gradul 1 ($\mathbb{Z}$) nu este densă peste $\mathbb{R}$, iar mulţimea numerelor algebrice de gradul 1 ($\mathbb{Q}$) este densă peste $\mathbb{R}$.

Observaţie. Numere de forma $\sqrt[n]{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sunt întregi algebrici de gradul n, deci şi numere algebrice de gradul n, iar numere de forma $\sqrt[n]{\dfrac{2}{3}}$ sunt algebrice de gradul n, dar nu sunt întregi algebrici.

Definiţie. Spunem că *întregii algebrici* $a, b \in \mathbb{C}$ *sunt conjugaţi*, dacă au acelaşi *polinom minimal.*

Definiţie. Spunem că *numerele algebrice* $a, b \in \mathbb{C}$ *sunt conjugate*, dacă au acelaşi *polinom minimal.*

Observaţie. Doi *întregi algebrici conjugaţi* (două *numere algebrice conjugate*) au acelaşi grad. Există *întregi algebrici* de acelaşi grad ($\sqrt[n]{2}$ şi $\sqrt[n]{3}$) care nu sunt *conjugaţi.*

Definiţie. Spunem că *întregul (numărul) algebric* $a \in \mathbb{R}$ *este puternic*, dacă toate rădăcinile *polinomului său minimal* sunt reale.

Observaţie 1. Orice *întreg (număr) algebric de gradul* 1 *este puternic.*

Observaţie 2. Orice *întreg (număr) algebric de gradul* 2 *este puternic.*

Observaţie 3. $\sqrt[3]{2}$ este *întreg (număr) algebric de gradul* 3 care *nu este puternic*. În general, $\sqrt[n]{2}$ este întreg (număr) algebric de gradul n, $n \geq 3$, dar nu este puternic.

Rezultatul principal al acestui articol este conţinut în următoarea:

Teorema 1. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *mulţimea întregilor algebrici puternici de gradul* n *este densă peste* $\mathbb{R}$.

Corolar. *Mulţimea numerelor algebrice puternice de gradul* n, $n \in \mathbb{N}^*$, *este densă peste* $\mathbb{R}$.

Observaţie. Mulţimea întregilor algebrici puternici de gradul 1 este $\mathbb{Z}$, deci nu este densă peste $\mathbb{R}$.
Pentru a demonstra Teorema, vom avea nevoie de o serie de rezultate ajutătoare.

Lema 1. *Dacă* a *este un întreg puternic de gradul* n, *atunci* $a + k$ *şi* $a \cdot k$ *sunt întregi algebrici puternici de gradul* n, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Demonstraţie. Dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$ este polinomul minimal pentru a, atunci $a + k$ are polinomul minimal $g = f(X - k)$, iar $a \cdot k$ are polinomul minimal $h = k^n \cdot f\left(\frac{X}{k}\right)$.

Lema 2. *Dacă* $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *şi* $I \subset \mathbb{R}$ *este un interval deschis, atunci există* $p, n \in \mathbb{Z}$ *astfel încât* $p + na \in I$.

Demonstraţie. Rezultă din Lema lui Kronecker: *Dacă* α *este un număr iraţional, atunci mulţimea* $A = \{m \cdot \alpha + n \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ *este densă în* $\mathbb{R}$.

Lema 3. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, *există un polinom* $f \in \mathbb{Z}[X]$ *de grad* n, *unitar, ireductibil peste* $\mathbb{Q}[X]$ *şi care are toate rădăcinile reale.*

Demonstraţie. Fie $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ numere pare şi

$$f = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n) - 2.$$

Evident, $f \in \mathbb{Z}[X]$ şi este un polinom de gradul n, unitar. Apoi, dacă

$$f = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0,$$

atunci $2|b_{n-1}, \ldots, 2|b_1, 2|b_0$ şi $2^2 \not| b_0$, deci polinomul f este ireductibil, conform criteriului de ireductibilitate al lui Eisenstein. Rămâne să arătăm că polinomul f are toate rădăcinile reale. Dacă notăm $c_k = a_k + 1$, observăm că

$$a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \cdots < a_n < c_n.$$

Apoi $f(c_n) > 0$, $f(c_{n-1}) < 0$, $f(c_{n-2}) > 0, \ldots$ etc.
În general, $f(c_1) \cdot f(c_{i+1}) < 0$, $\forall\, i = \overline{1, n-1}$, deoarece $f(c_i)$ este număr impar şi $|(a_1 - c_i)(a_2 - c_i)\ldots(a_n - c_i)| \geq 3$, dacă $n \geq 3$. Cum funcţia polinomială ataşată este continuă, polinomul nostru va avea n rădăcini reale situate în intervalele $(-\infty, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_{n-1}, c_n)$, ceea ce rezolvă problema.

Observaţie 1. Fiecare rădăcină a unui polinom f constituit ca în Lema 3 este un întreg algebric puternic de gradul n.

Observaţie 2. Din construcţie, rezultă că există o infinitate de polinoame cu proprietăţile celor din Lema 3.

Demonstraţia Teoremei 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis nevid. pentru $n = 2$, întregii algebrici puternici sunt de forma $k + p\sqrt{r}$, cu $k, p, r \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ şi $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$. Mulţimea lor este densă, fapt care rezultă şi din Lema lui Kronecker. Pentru $n \geq 3$, considerăm un polinom de grad n, unitar, ireductibil şi cu toate rădăcinile reale, a cărui existenţă este garantată de Lema 3. Fie a o rădăcină a sa, care este un întreg algebric puternic de ordinul n. Din Lema 2 există $p, q \in \mathbb{Z}$, astfel încât $p + qa \in I$, iar din demonstraţia Lemei 1 rezultă că $p + qa$ este un întreg algebric puternic de gradul n.
Teorema este acum demonstrată. □

Observaţie. Din această teoremă rezultă că mulţimea întregilor algebrici puternici de gradul n, $n \geq 2$, este o mulţime densă peste $\mathbb{R}$, şi de aici rezultă că şi mulţimea numerelor algebrice puternice de grad n este densă peste $\mathbb{R}$, $\forall\, n \geq 1$.

Pentru mulţimea numerelor algebrice puternice de grad n, avem un rezultat mai puternic în următoarea:

Teorema 2. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ şi orice interval dechis $I \in \mathbb{R}$, există un polinom de gradul n, coeficienţi raţionali, ireductibili peste $\mathbb{Q}[X]$, cu toate rădăcinile reale şi situate în intervalul I.*

Demonstraţie. Din Lema 3, există un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$, de grad n, ireductibil, unitar şi cu toate cele n rădăcini reale. Rădăcinile sale vor fi situate în intervalul $[a, b]$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$. Considerăm intervalul $[c, d] \subset I$, cu $c < d \in \mathbb{Q}$ şi o bijecţie $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ de forma $\varphi(x) = px + q$, cu $p, q \in \mathbb{Q}$. Funcţia φ se poate determina uşor din condiţiile $\varphi(a) = c$ şi $\varphi(b) = d$. Inversa funcţiei φ, notată cu $\psi : [c, d] \to [a, b]$, are forma $\psi(x) = sx + t$, cu $s, t \in \mathbb{Q}$, care se determină uşor din condiţiile $\psi(x) = a$ şi $\psi(d) = b$. Considerăm acum $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, rădăcinile polinomului f, şi notăm cu $y_1 = \varphi(x_1), \ldots, y_n = \varphi(x_n) \in [c, d]$. Polinomul $g(x) = f(\psi(x)) \in \mathbb{Q}[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}[X]$ şi verifică

$$g(y_k) = f(\psi(y_k)) = f(x_k) = 0,$$

deci are rădăcinile $y_1, y_2, \ldots, y_n \in I$. Dacă $g = \frac{b_n}{c_n} X^n + \cdots + \frac{b_1}{c_1} X + \frac{b_0}{c_0}$ cu $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{0, n}$, atunci polinomul $h = \frac{c_n}{b_n} g$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}[X]$, unitar, de grad n şi are toate rădăcinile în intervalul I. □

Comentariu. Teorema 2 arată că *numerele algebrice puternice de grad n* sunt, nu numai dense peste $\mathbb{R}$, dar pentru un interval arbitrar, găsim un polinom ireductibil şi unitar peste $\mathbb{Q}[X]$ şi care are toate rădăcinile în acest interval. Această proprietate remarcabilă nu se mai păstrează şi în cazul întregilor algebrici puternici de grad n, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. În acest sens avem rezultatul.

Propoziţia 1. *Există intervale de numere reale, în care orice polinom de grad n, cu coeficienţi întregi şi unitar, nu poate avea toate rădăcinile.*

Demonstraţie. Este suficient să considerăm un interval I_k de forma $I_k = \left[\sqrt[n]{k}, \sqrt[n]{k+1}\right)$, cu $k \in \mathbb{N}$. Dacă un polinom cu coeficienţi întregi şi unitar ar avea toate rădăcinile în acest interval, atunci produsul lor ar fi cuprins Între k şi $k+1$, şi ar fi număr întreg, fals. Aşadar, orice polinom cu coeficienţi întregi şi unitar, de gradul n nu poate avea toate rădăcinile în intervalul I_k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Corolar. *Pentru orice interval $I \subset \mathbb{R}$ există un interval $J \subset I$ astfel încât orice polinom cu coeficienţi întregi şi unitar, de gradul n, nu poate avea toate rădăcinile în intervalul J.*

Demonstraţie. Cum $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k = [0, \infty)$, dacă $I \cap (0, \infty) \neq \emptyset$, atunci luăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi $J = I \cap I_k$, astfel încât $J \neq \emptyset$. Pentru $I \subset (-\infty, 0)$, să observăm că, dacă polinomul f are toate rădăcinile pozitive, atunci polinomul $g(X) = (-1)^n f(-X)$ are toate rădăcinile negative, coeficienţi întregi şi este unitar, iar problema se rezolvă ca mai sus. □

Teorema 3. *Mulţimea numerelor algebrice puternice de gradul n, care nu sunt şi întregi algebrici, este densă peste $\mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstraţie. Pentru $n = 1$ este evident, deci vom considera $n \geq 2$.
Fie $I \subset [0, \infty)$ un interval deschis şi $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $I \cap I_k \neq 0$. Notăm $J = I \cap I_k$ şi, conform Teoremei 2, există un polinom f de gradul n, cu coeficienţi raţionali, unitar, ireductibil peste $\mathbb{Q}[X]$ şi cu toate rădăcinile în intervalul J. Conform Corolarului de mai sus, nu poate avea coeficienţi întregi, deci rădăcinile sale nu sunt întregi algebrici. Aşadar, în intervalul J, deci şi în I, găsim numere algebrice puternice de gradul n care nu sunt şi întregi algebrici. Dacă $I \subset (-\infty, 0)$, vom lua $-I \subset (0, \infty)$, unde vom găsi, conform celor de mai sus, numere algebrice puternice de gradul n, şi apoi opusele lor se vor găsi în intervalul I. Să mai observăm că dacă două polinoame ireductibile şi unitare au o rădăcină comună, coincid. De aici rezultă că, elementele algebrice puternice de gardul n găsite în intervalul J, nu pot fi rădăcini ale altor polinoame ireductibile, deci teorema este complet demonstrată. □

Bibliografie

[1] Albu Toma, Ion D. Ion, *Capitole de teoria algebrică a numerelor*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1984

[2] Purdea Ioan, Pic Gheorghe, *Tratat de algebră modernă*, vol. I, Ed. Academiei, Bucureşti, 1977

[3] Ţena Marcel, *Cinci teme de aritmetică superioară*, Imprimeria Coresi, Bucureşti, 1991

Profesoară, Bucureşti

Argument 17

Tabăra de matematică, Baia Mare, 2015

Organizatori: Inspectoratul Judeţean Maramureş, Centrul Judeţean pentru Tineri Capabili de Performanţă, Filiala MM a SSMR.

Loc de desfăşurare: Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai".

Directorul taberei: prof. Nicolae Muşuroia

Profesori participanţi: *Bojor Florin, Bojor Meda, Boroica Gheorghe, Heuberger Cristian, Heuberger Dana, Muşuroia Nicolae, Petruţiu Crina, Pop Adrian* de la C. N. "Gheorghe Şincai"; *Boroica Gabriela, Fărcaş Natalia, Darolţi Erika, Zlampareţ Horia* de la C. N. "Vasile Lucaciu"; *Longaver Ludovic* de la L. T. "Nemeth Laszlo"; *Cioclu Costel, Podină Camelia* de la L. T. "Emil Racoviţă"; *Pop Radu* de la Liceul Sanitar; *Fănăţan Nelu, Friedrich Gabriela, Zlampareţ Mihaela* de la C. Ec. "Nicolae Titulescu"; *Bunu Iulian* de la Liceul de Arte; *Brisc Viorica, Birta Adriana, Şerba Lucia* de la C. T. "Anghel Saligny"; *Bretan Andrei, Codrea Lucica, Stark Andrea* de la Şc. Gim. "Nicolae Iorga"; *Neaga Nadina, Schwechoffer Clara* de la Şc. Gim. "Dr. Victor Babeş"; *Hossu Călin* de la Şc. Gim. "D. Cantemir"; *Pop Adela* de la C. T. "Aurel Vlaicu"; *Pop Anca* de la C. T. "George Bariţiu"; *Polgar Corina* de la C.T. "D.D. Neniţescu"; *Pop Cosmin* de la Şc. Gim "George Coşbuc"; *Tomşa Magdalena* de la Şc. Gim. Dumbrăviţa; *Naghi Anamaria, Vălean Mihaela* de la Şc. Gim. "Lucian Blaga"; *Râmbu Gheorghe* - matematician; *Vlad Vasile* - matematician.

Prezentăm în continuare subiectele de la testul taberei şi lista premianţilor.

Clasa a VIII-a

1. Inversul numărului $\dfrac{2014}{2015}$ este ......

2. O echipă de 10 muncitori termină o lucrare în 6 zile. Dacă numărul muncitorilor din echipă se dublează, atunci aceeaşi lucrare poate fi terminată în ...... zile.

3. Un cerc cu lungimea de 16π cm are aria egală cu ......

4. Cel mai mic număr natural care, împărţit pe rând la 7 şi 11, dă de fiecare dată restul 3 şi câtul diferit de zero este ......

5. Partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2014}}$ este ......

6. Soluţia ecuaţiei $\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{z-2}+\sqrt{u}+\sqrt{v}=x+y+z+u+v$ este

A. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},3,\frac{1}{4}\right)$

C. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 3\right)$ D. $\left(3, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

7. Pe fiecare din cele 6 muchii ale unui tetraedru se consideră câte trei puncte diferite de vârfuri. Câte triunghiuri se pot forma având vârfurile printre punctele considerate, diferite de vârfurile tetraedrului?

A. 90 B. 270 C. 540 D. 810

8. Fie expresia: $E(x) = a^2 + b^2 + 2c^2 + 2bc + a + b - 2ac$.
a) Să se arate că $E(x) = (a-c)^2 + (b+c)^2 + a + b$
b) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia

$$a^2 + b^2 + 2c^2 + 2bc + a + b \leq 2ac.$$

c) Numerele reale pozitive x, y, z, t au suma egală cu 4. Să se demonstreze că $x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{t} + t\sqrt{x} \leq 4$.

9. a) Desenaţi un cub $ABCDA'B'C'D'$.
b) Să se arate că există $VABC$ astfel încât

$$m(\sphericalangle VBA) = m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACV) = 90^\circ.$$

c) Fie $VABC$ un tetraedru astfel încât

$$m(\sphericalangle VBA) = m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACV) = 90^\circ.$$

Aflaţi aria totală a tetraedrului în funcţie de $AB = c$, $BC = a$, $VB = d$.

d) Care este numărul maxim de unghiuri drepte dintre muchiile unui tetraedru? Justificaţi răspunsul.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Vasile Ienuţaş, Prof. Ştefan Zah, Şc. Gim. "George Coşbuc"

Clasa a IX-a

1. a) Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{2 \cdot x}{x^2+1}$, unde $x > 0$.
b) Să se arate că, dacă $x, y > 0$ şi $x + y = 2$, atunci are loc inegalitatea

$$x\sqrt{\frac{2 \cdot y}{x^2+1}} + y\sqrt{\frac{2 \cdot x}{y^2+1}} \leq 2.$$

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm numărul $a_n = 4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$.
a) Să se arate că $a_{n+2} - a_n$ este divizibil cu 13, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se determine valorile naturale ale lui n pentru care a_n este divizibil cu 13.

3. Pe laturile $[BC]$ şi $[CD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$ se consideră respectiv punctele M şi N, astfel încât $BM = 2MC$ şi $CN = 3ND$. Fie $AM \cap BN = \{P\}$. Se ştie că $PA = 2PM$ şi $5PB = 4PN$.

a) Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{AP}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$.

b) Arătaţi că $ABCD$ este paralelogram.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Gabriela Boroica, C.N. "Vasile Lucaciu"

Clasa a X-a

1. Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(f(n)) = f(f(n+1)+1) = n$. Dacă $f(0) = 2$, să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = 2 - n$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

a) Dacă $x \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x - a| + |x - b| = b - a$, să se arate că $x \in \mathbb{R}$ şi $a \le x \le b$.

b) Să se rezolve ecuaţia $|x+1| + |x+3| + \cdots + |x+2015| = 2 \cdot 504^2$.

Leonard Giugiuc

3. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctul D, diferit de A, B, C, pe cercul circumscris triunghiului. Fie $P \in [OD]$.

a) Dacă $D \in \overset{\frown}{AC}$, săse arate că $AD + CD = BD$.

b) Dacă $a, d \in \mathbb{C}$, $d \ne 0$, să se arate că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = |t \cdot d - a|$ este convexă.

c) Să se arate că $PA + PB + PC \le 4R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Prof. Dana Heuberger, Prof. Cristian Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XI-a

1. Pentru o matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, notăm $f_A(x) = \det(A - x \cdot I_2)$, $x \in \mathbb{R}$ şi $E(A) = \det(I_2 + A) + \det(I_2 + A^3)$.

a) Să se arate că $f_A(x) = x^2 - (a+d)x + a \cdot d - b \cdot c$.

b) Dacă $\det(A) = 1$ şi $tr(A) \ge 1$, atunci arătaţi că $E(A) \ge 3$.

c) Daţi un exemplu de matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $E(A) = 3$.

2. a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$ $n \ge 1$ este convergent.

b) Dacă $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ este o funcţie injectivă, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^2(k)}{k^3}$.

(*Argument* 2011)

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi ε o rădăcină de ordinul n a unităţii, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că $\det(A^t - \varepsilon \cdot A)$ este un număr real sau un număr complex pur imaginar.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Gheorghe Boroica, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XII-a M1

1. Fie $M = \left\{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X^3 - X^2 - I_3 = O_3\right\}$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se demonstreze că $A \in M$ şi că orice matrice din M e inversabilă.

b) Dacă $B \in M_3(\mathbb{R})$ şi $X \in M$ iar $B \cdot X^2 = X^2 \cdot B$, să se demonstreze că $B \cdot X = X \cdot B$.

2. Fie $G = (0, \infty) \backslash \{1\}$ şi $x * y = x^{3 \log_2 y}$. Admitem că $(G, *)$ este grup.

a) Să se calculeze $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{de\ n\ ori\ x}$, unde $x \in G$.

b) Să se determine elementele de ordin finit ale grupului $(G, *)$.

3. Fie funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcţia F este o primitivă a unei funcţii f ce se cere determinată.

b) Să se dea un exemplu de funcţie $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ care admite primitive, dar care nu este integrabilă.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Meda Bojor, Prof. Florin Bojor, C.N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XII-a M2

Subiectul I

1. Să se arate că numărul $\left(1 - \sqrt{3}\right)^3 + \left(1 + \sqrt{3}\right)^3$ este număr natural.

2. Să se calculeze aria triunghiului format de graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-12}{5}x + 12$ cu axele coordonate.

3. Să se rezolve ecuaţia $\log_{2x+1}(x^2+5x+11)=2$.

4. Preţul unui obiect se majorează cu 15%. După o perioadă de timp, obiectul se ieftineşte cu 10%, produsul ajungând astfel să coste 3105 lei. Să se calculeze preţul iniţial al produsului.

5. Să se determine parametrul real α, astfel încât vectorii $\vec{u}=(\alpha+12)\vec{i}+5\vec{j}$ şi $\vec{v}=5\vec{i}+(\alpha-12)\vec{j}$ să fie coliniari.

6. În triunghiul ABC se dau $AB=7$, $\cos C=\dfrac{24}{25}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul II

1. Se consideră ecuaţia $x^2-3x-2=0$ cu soluţiile $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ şi $V=\begin{pmatrix} 1 & x_1^2 & x_2^2\\ 1 & x_1 & x_2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $\det(V)=4(x_2-x_1)$.

b) Să se arate că, dacă $\det(A)=0$, atunci $a+b+c=0$ sau $a=b=c$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-2(x-1)(y-1)+1$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine numerele reale care sunt egale cu simetricele lor faţă de legea de compoziţie $*$.

b) Să se rezolve ecuaţia $x*x*x=x$, $x\in\mathbb{R}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}(x-2)$.

a) Să se determine intervalele de monotonie şi punctele de extrem ale funcţiei f.

b) Să se demonstreze că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\operatorname{arctg}\dfrac{(x-1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcţiile f, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, date prin $f(x)=2e^{2x}(x^2+3x+4)$ şi $F(x)=e^{2x}(ax^2+bx+c)$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine numerele reale a,b,c astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei f.

b) Pentru $a=1$, $b=2$, $c=3$, să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)\cdot F(x)-(f(x))^2}{(F(x))^2}\,dx$.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Adrian Ioan Pop, C.N. "Gheorghe Şincai"

Argument 17

Premianţii

Clasa a VIII-a

Excelenţă. *Zelina Paul* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Premiul I. *David Cătălin Ioan* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Diaconescu Mălina* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Bordeanu Lucia* (Şc. Gim. "Lucian Blaga"), *Buzilă Gârda Andra* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Manolache Răzvan* (Şc. Gim. "Dimitrie Cantemir"), *varady Iulia* Şc. Gim. "Nicolae Iorga").

Premiul al II-lea. *Pop Darius* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga"), *Zigler Alexandru* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Ardelean Horaţiu* (Şc. Gim. "Al. I. Cuza"), *Koblicica Andrei* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Konyves Beatrix* (Şc. Gim. "Octavian Goga"), *Petruţ Andreea* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Băban Diana* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Tămîan Rareş Vasile* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Conţiu Alexandru* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga"), *Oşan Ştefania* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Roatiş Cristina* (Şc. Gim. "Dimitrie Cantemir"), *Ianoş Raul* (Şc. Gim. "I.L. Caragiale"), *Ionuţ Bogdan* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga"), *Pop Alexandra* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Darius* (Şc. Gim. "Lucian Blaga").

Premiul al III-lea. *Lemian Diana* (Şc. Gim. "Simion Bărnuţiu"), *Buşecan Iulia* (Şc. Gim. Fărcaşa), *Dorca Răzvan* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Ghirasim Andrei* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Andercău Florina* (Şc. Gim. "Vasile Alecsandri"), *Buciuman Ionuţ* (Şc. Gim. "Dimitrie Cantemir"), *Oros Cristian* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Mardar Paul Cezar* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Gălăţanu Alexandra* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Radu Patricia* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Sabău Carla* (Şc. Gim. "Avram Iancu"), *Şişeştean Ioan* (Şc. Gim. Şişeşti), *Şuteu Ionuţ* (Şc. Gim. "Octavian Goga"), *Ardelean Ariana* (Şc. Gim. "Lucian Blaga"), *Babiciu Andreea* (Şc. Gim. Şişeşti), *Buşecan Maria* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Misaroş Andreea* (Şc. Gim. "Avram Iancu"), *Uţă Adrian* (Şc. Gim. "Al. I. Cuza"), *Vale Bogdan* (Şc. Gim. "I.L. Caragiale"), *Matei David Antoniu* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Mîrza Iza* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga"), *Müller Andrada* (Şc. Gim "Avram Iancu"), *Ghişa Ramona* (Şc. Gim. Şişeşti), *Ilieş Răzvan* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Moraru Dora* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Muthi Sonia* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Sava Bogdan* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Bîrle Bogdan* (Şc. Gim. "Dimitrie Cantemir"), *Moldovan Andra* (Şc. Gim. "Dimitrie Cantemir"), *Şişeştean Radu* (Şc. Gim. Şişeşti).

Clasa a IX-a

Excelenţă. *Tămîan Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Pop Vlad* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Neţa Răzvan* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Lucaciu Sergiu* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Mărieş Maria* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Berinde Thomas* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Suciu Răzvan* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Buciuman Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Bojor Barbu* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Danil Lidia* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Clasa a X-a

Excelenţă. *Zelina Mihai* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Premiul I. *Sântejudean Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Cişcă Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Crăciun George* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Goteciuc Horaţiu* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al III-lea. *Oana Laura* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Covaci Alexandra* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Griguţă Paula* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Olari George* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Mureşan Diana* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a XI-a

Excelenţă. *Cotan Paul* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Ţînţar Oana* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Butnar Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Zicher Blanka* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Todoran Larisa* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Ari Paul* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Bocuţ Oana* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Tyekar Dan* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Voiţ Radu* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a XII-a M1

Excelenţă. *Ciurte Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Bud Bogdan* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Fodoruţ Ionuţ* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Gotha Güntter* (L.T. "Nemeth Laszlo").

Premiul al II-lea. *Nicolaescu Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Miclea Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Ghiţescu Nicoleta* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Vele Corina* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Gyamathy Timea* (L.T. "Nemeth Laszlo"), *Heredea Oana* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Bălan Alexandru* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Rus Alexandru* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Chiş Ioan* (C.T. "George Bariţiu"), *Anton Costa* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Peter Cătălin* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Andra* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Tomoiagă Ana* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Moldovan Teodora* (C.N. "Vasile

Lucaciu"), *Rus Elena* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Dumitru Daniela* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Rad Gabriel* (L.T. "Emil Racoviţă"), *Zaharie Sergiu* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a XII-a M2

Excelenţă. *Hanţig Ştefan* (L.T. "Emil Racoviţă").

Premiul I. *Santa Maria* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Pop Darius* (C.E. "Nicolae Titulescu"), *Şandor Sebastian* (C.E. "Nicoale Titulescu").

Premiul al III-lea. *Olar Adrian* (C.E. "Nicolae Titulescu"), *Biriş Mădălina* (L.T. "Emil Racoviţă"), *David Camelia* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Koza Andrei* (C.E. "Nicolae Titulescu"), *Pop Rebeca* (C.E. "Nicolae Titulescu"), *Tomoiagă Ileana* (L.T. "Emil Racoviţă"), *Văleanu Andreea* (C.E. "Nicolae Titulescu"), *Marco Adelin* (C.E. "Nicolae Titulescu"), *Săsăran Dan* (C.E. "Nicolae Titulescu").

Argument 17

Tabăra Judeţeană de Excelenţă 2015, Vaser

În perioada 30 august - 5 septembrie 2015, s-a desfăşurat pe valea Vaserului, Tabăra Judeţeană de Excelenţă la matematică. La această tabără au participat elevi de gimnaziu şi de liceu care s-au clasat pe primele locuri la Olimpiada judeţeană de matematică: Zlampareţ George, Robu Raluca, Dragoş Andreea, Gulin Tudor, Pop Andreea, Suciu Bogdan - clasa a VI-a; Talpoş Carina, Ciceu Denis, Zaharie Oana, Pop Raul, Mihalca Grigore - clasa a VII-a; Robu Vlad, Pop Călin, Boroica Adrian, Andreicuţ Teofil - clasa a VIII-a; Zelina Paul, Mureşan Ioan, Stepan Dacian - clasa a IX-a; Lucaciu Sergiu, Bojor Barbu, Pop Vlad, Hagău Iulian - clasa a X-a; Zelina Mihai, Sântejudean Tudor, Ilieş Andreea - clasa a XI-a; Tinţar Oana, Butnar Adrian - clasa a XII-a.

Profesorii care au însoţit grupul şi au ţinut lecţii în această tabără au fost: Andrei Bretan (C.N. "Vasile Lucaciu") - directorul taberei, Florin Bojor, Gheorghe Boroica, Nicolae Muşuroia (C.N. "Gheorghe Şincai"), Gheorghe Gherasin (Liceul "Regele Ferdinand") şi doi foşti olimpici ai judeţului, acum studenţi: Vlad Crişan şi Cristian Bud.

Prezentăm subiectele propuse la testul final.

Clasa a VI-a

1. Determinaţi numerele naturale $\overline{abcd}$ care satisfac relaţiile

$$\frac{a+d}{a+c}=\frac{a}{c} \quad \text{şi} \quad \overline{ab}+\overline{cd}=34.$$

2. a) Demonstraţi că

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),\ \forall k\in\mathbb{N}^*.$$

b) Calculaţi $\quad \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)},\ n\in\mathbb{N}^*.$

c) Demonstraţi că $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{2015^2}<\dfrac{1008}{2017}.$

3. Pe segmentul $[OA]$ se consideră punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{2015}$ astfel încât $OA_1=\dfrac{1}{2}OA,\ OA_2=\dfrac{1}{6}OA,\ OA_3=\dfrac{1}{12}OA,\ldots,OA_{2015}=\dfrac{1}{2015\cdot 2016}OA.$

a) Să se demonstreze că $A_1A_2=4\cdot A_2A_3$;

b) Să se calculeze OA, dacă $OA_1+OA_2+\cdots+OA_{2015}=2015$ cm.

Subiect propus de: Prof. Andrei Bretan, C.N. "Vasile Lucaciu"

Argument 17

Clasa a VII-a

1. a) Arătaţi că restul împărţirii lui a^4 la 5 este 0 sau 1, unde $a \in \mathbb{Z}$;
b) Demonstraţi că ecuaţia $x^4 + 131 = 3y^4$ nu are soluţii în mulţimea numerelor întregi.

2. Arătaţi că, dacă numerele reale x, y, nenule, verifică relaţia $4x^2+7xy+3y^2 = 0$, atunci $5x + 4y \neq 0$ şi $\dfrac{4x+5y}{5x+4y}$ este număr întreg.

3. Fie $ABCD$ un paralelogram. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$ intersectează dreapta BC în E, iar mediatoarea laturii AD intersectează dreapta DE în punctul M. Fie F intersecţia dreptelor AM şi BC. Să se arate că:
a) $DE = AF$;
b) $AD \cdot AB = DE \cdot DM$.

Subiect propus de: Prof. Andrei Bretan, C.N. "Vasile Lucaciu"

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că nu există numere raţionale a şi b, astfel ca $a + 2b \in \mathbb{Z}$ şi $a^2 + 4b^2 = 3$.

2. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a şi $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$.
a) Dacă $DB' \cap BO' = \{I\}$, arătaţi că $[A'I] \equiv [BI] \equiv [C'I]$;
b) Demonstraţi că $DI \perp (A'BC')$;
c) Calculaţi lungimea segmentului $[DI]$.

3. a) Arătaţi că triunghiul care are lungimile laturilor egale cu a, b, c şi care verifică egalităţile $a^2 + b^2 + c^2 = 5a + 7b + 8c = 138$, este ascuţitunghic.
b) Determinaţi numerele reale a şi b, astfel încât

$$3\sqrt{a+b} + 2\sqrt{8-a} + \sqrt{6-b} = 14.$$

Subiect propus de: Prof. Gheorghe Gherasin, Liceul "Regele Ferdinand"

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c > 0$ aşa încât $ab + bc + ca = abc$.
Demonstraţi că:

$$\frac{9}{2abc} \leq \frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \leq \frac{a+b+c}{2abc}.$$

2. Să se demonstreze identitatea:
$$\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right],\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

3. Fie a un număr natural impar. Să se demonstreze că $\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}$ este un număr iraţional pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq a$.

Subiect propus de: Prof. Florin Bojor

Clasa a X-a

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $(f\circ f)(x)=-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Arătaţi că:
a) f este bijectivă;
b) f nu este strict crescătoare;
c) $f(0)=0$.

2. Să se arate că ecuaţia $x^4+2016=3\cdot y^4$ nu are soluţii în mulţimea numerelor întregi.

3. Fie n un număr natural nenul. Arătaţi că, pentru orice $z\in\mathbb{C}$, avem inegalitatea
$$|z|+|z-1|+|z-2|+\cdots+|z-(2n+1)|\geq(n+1)^2.$$
Când avem egalitate?

Subiect propus de: Prof. Gheorghe Boroica

Clasa a XI-a

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq0}$ cu $a_0=a_1=1$ şi $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+a_{n-1}}$, $\forall n\geq1$.
a) Arătaţi că şirul este crescător;
b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

2. a) Fie $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ aşa încât $\det(A^2+B^2)=0$ şi $AB=BA$.
Demonstraţi că $\det A=\det B$.

b) Fie $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel ca $A\cdot B=\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$.
Să se arate că: $(BA)^3=63BA-8I_2$.

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a&b&0\\0&a&0\\c&d&a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Să se calculeze A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Subiect propus de: Cristian Bud, student UTCN
Prof. Gheorghe Boroica

Argument 17

Clasa a XII-a

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f(x) + f^3(x) + f^5(x) = x^9$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Să se arate că funcţia f are primitive.

2. Se consideră mulţimea $M = |f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}| f^2(x) + f(x) - 6 = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
a) Determinaţi cardinalul mulţimii M.
b) Câte funcţii din M admit primitive?

3. Pe mulţimea $G = (1, 2)$ se consideră legea de compoziţie internă

$$x * y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}.$$

a) Să se arate că legea este bine definită şi să se determine elementul său neutru.
b) Ştiind că $(G, *)$ este grup, să se arate că funcţia $f : (1, 2) \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{2 - x}{x - 1}$ este izomorfism de la $(G, *)$ la $((0, \infty), \cdot)$.
c) Calculaţi: $\dfrac{3}{2} * \dfrac{4}{3} * \dfrac{5}{4} * \cdots * \dfrac{2016}{2015}$.

Subiect propus de: Prof. Nicolae Muşuroia

Argument 17

Concursul interjudeţean de matematică "ARGUMENT" Baia Mare, 7-8 noiembrie 2014

În perioada 7-8 noiembrie 2014 s-a desfăşurat la Baia Mare cea de-a şasea ediţie a Concursului interjudeţean de matematică "Argument". Organizatorii acestuia au fost membrii catedrei de matematică a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" din localitate, în parteneriat cu Inspectoratul şcolar Judeţean Maramureş. Cu această ocazie a fost lansat cel de-al şaisprezecelea număr al revistei "Argument", editat de catedra de matematică a colegiului gazdă. Preşedintele concursului a fost şi de această dată, domnul conferenţiar Vasile Pop, de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. La concurs au participat loturile colegiilor naţionale: "Andrei Mureşanu" Dej, "Mihai Eminescu" Satu Mare, "Alexandru Papiu Ilarian" Târgu Mureş, "Silvania" Zalău, "Dragos Vodă" Sighetu Marmaţiei, "Vasile Lucaciu" Baia Mare, "Gheorghe Şincai" Baia Mare, precum şi elevi de gimnaziu de la şcolile reprezentative din judeţ. Prezentăm în continuare o selecţie a subiectelor de la gimnaziu, pe cele de la liceu şi lista premianţilor. Subiectele de liceu au fost propuse de domnul conferenţiar universitar Vasile Pop.

Clasa a V-a

1. Fiecare vârf al unui cub se etichetează cu câte un număr de la 1 la 8 şi fiecare faţă se etichetează cu câte un număr de la 9 la 14.

a. Există etichetări în care suma etichetelor celor trei vârfuri vecine cu orice vârf să fie aceeaşi?

b. Există etichetări în care suma etichetelor de pe cele trei feţe care au câte un vârf comun să fie aceeaşi?

Vasile Pop

2. a. Câte cifre de 7 are numărul $A = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333\ldots3}_{2014 \text{ cifre}}$?

b. Aflaţi numerele naturale n ştiind că între n şi $2n$ se află exact 5 numere naturale pare.

Clasa a VI-a

1. Pe o foaie de matematică cu pătrăţele sunt scrise numerele de la 1 la 121, fiecare într-un pătrăţel. Să se arate că:

a. Există un pătrat de dimensiune 2×2, astfel ca suma celor patru numere aflată în căsuţele lui să fie cel mult 286.

b. Există un pătrat de dimensiune 2×2 astfel ca suma celor patru numere aflată în căsuţele lui să fie cel puţin 210.

Vasile Pop

2. Se dau punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1000$ coliniare şi în această ordine, astfel încât $A_k A_{k+1} = 2k - 1$ cm, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a. Să se calculeze lungimea segmentului $A_1 A_{n+1}$.

b. Aflaţi numărul punctelor, dintre cele date, care se află la o distanţă mai mare de 90 cm de A_1 dar mai mică de 90 cm faţă de A_{15}

Meda Bojor

Clasa a VII-a

1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2014} \in \{-1, 01\}$, astfel încât $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014} = 1$.

a. Calculaţi $a_1^{2015} + a_2^{2015} + \cdots + a_{2014}^{2015}$

b. Determinaţi câte valori diferite poate lua suma $S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2014}^2$

2. Se consideră pătratele $ABCD$ şi $DCEF$ iar exteriorul lor, triunghiurile echilaterale ABM şi CEN.

a. Să se arate că $DN \perp DM$.

b. Să se arate că punctele M, B, N sunt coliniare.

c. Dacă $AB = 10$ cm, să se calculeze suma ariilor: $A_{ELN} + A_{DLBT} + A_{AMT}$, unde $\{L\} = DN \cap EC$, $\{T\} = DM \cap AB$.

Clasa a VIII-a

1. a. Să se arate că nu există trei numere prime p, q, r astfel ca $p \cdot q|(r^3 - 1)$, $q \cdot r|(p^3 - 1)$ şi $r \cdot p|(q^3 - 1)$.

b. Să se determine numerele prime o, q, r, astfel ca $p \cdot q|(r^4 - 1)$, $q \cdot r|(p^4 - 1)$ şi $r \cdot p(q^4 - 1)$.

Vasile Pop

2. Un bloc în formă de cub este format din camere identice. Camera centrală este inaccesibilă. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false (justificaţi).

a. Pot fi împărţite cele 26 de camere accesibile în 13 perechi de câte două camere vecine (cu un perete comun pe verticală sau orizontală)?

b. Poate cineva să viziteze toate camerele accesibile, trecând o singură dată prin fiecare? (se poate trece din orice cameră vecină?).

Vasile Pop

Argument 17

Clasa a IX-a

1. Vârfurile unui cub trebuie etichetate folosind 8 valori distincte din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, astfel încât să se respecte următoarele reguli:

(1) suma etichetelor oricăror două vârfuri vecine trebuie să fie multiplu de 3;

(2) suma etichetelor vecinilor oricărui vârf să fie multiplu de 3 (două vârfuri se consideră *vecine* dacă sunt extremităţile aceleiaşi laturi).

Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care o astfel de etichetare este posibilă, iar pentru valoarea minimă determinată să se dea un exemplu de o astfel de etichetare.

2. Se consideră şirurile de numere naturale $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ definite prin relaţiile de recurenţă:

$$x_{n+1} = 3x_n + 2y_n,\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n,\ \forall\, n \geq 1,\ x_0 = y_0 = 1.$$

a. Să se arate că $2x_n^2 - y_n^2 = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b. Să se arate că $y_n = \left[x_n, \sqrt{2}\right]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Se consideră ecuaţia

$$\left\{\frac{1}{\{x\}}\right\} = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

unde prin $\{t\}$ se notează partea fracţionară a numărului real t.

a. Să se arate că ecuaţia nu are soluţii în mulţimea numerelor raţionale.

b. Să se determine o soluţie a ecuaţiei.

4. Fie S un semicerc obţinut dintr-un cerc de centru O şi raza 1.

a. Să se arate că, pentru orice număr par $n \geq 2$, există pe S punctele distincte $X_1, X_2, \ldots, X_n$ astfel ca lungimea vectorului $\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} + \cdots + \overrightarrow{OX_n}$ să fie mai mică decât 1.

b. Să se arate că pentru orice număr impar $n \geq 3$ şi orice n puncte distincte $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ pe S, lungimea vectorului $\overrightarrow{OY_1} + \overrightarrow{OY_2} + \cdots + \overrightarrow{OY_n}$ este mai mare decât 1.

Clasa a X-a

1. Se consideră funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \{x\} - [x], \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

unde $\{x\}$ şi $[x]$ notează partea fracţionară, respectiv partea întreagă a numărului real x.

a. Să se arate că funcţia f este bijectivă şi să se determine funcţia inversă.

b. Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia

$$g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_a(x) = a\{x\} - [x], \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

este bijectivă.

2. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$f(x^{n+1}) - f(y^{n+1}) = (x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n)(f(x) - f(y)),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, unde $n \geq 1$ este un număr natural fixat.

3. Pentru orice numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ considerăm suma

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{x_9}{x_9 + x_{10}} + \frac{x_{10}}{x_{10} + x_1}.$$

a. Să se arate că $1 < S(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) < 9$.

b. Să se determine intervalul de lungime minimă $(a, b) \subset (0, \infty)$ cu proprietatea $a < S(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) < b$, pentru orice numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$.

4. Să se determine numărul de regiuni în care împart planul cele şase drepte ce unesc câte două vârfuri ale unui patrulater convex.

Clasa a XI-a

1. Fie n, k numere naturale astfel încât $1 \leq k \leq n$ şi fie mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se determine câte dintre submulţimile lui A cu k elemente conţin cel puţin două numere consecutive.

2. Să se arate că pentru orice număr $a \in \mathbb{C}$ există două matrice $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ambele având valorile proprii $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -1$, astfel încât matricea $A = B + C$ să aibă valorile proprii a şi $-a$.

3. Fie S mulţimea tuturor şirurilor de numere complexe $(a_n)_{n\geq 0}$ ce verifică proprietatea de recurenţă:

$$a_{n+1} \in \{(1-\varepsilon)a_n + \varepsilon a_{n-1},\ (1-\overline{\varepsilon})a_n + \overline{\varepsilon} a_{n-1}\}, \forall\, n \geq 1,$$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, unde $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

a. Să se arate că mulţimea termenilor tuturor şirurilor din S formează o reţea plană de hexagoane regulate de latură 1 în planul complex.

b. Să se determine toate numerele naturale N, pentru care există un şir $(b_n)_{n\geq 0}$ din S, astfel încât $b_N = 0$.

4. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit recurent prin

$$x_{n+1} = \frac{1}{\{x_n\}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

unde Prin $\{t\}$ se notează partea fracţionară a numărului real t.

a. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este corect definit dacă şi numai dacă x_0 este număr iraţional.

b. Să se arate că, pentru orice valoare a lui x_0, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ nu poate fi strict descrescător.

c. Să se arate că, dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, atunci este nemărginit.

Clasa a XII-a

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite o primitivă F cu proprietăţile $F(0) = 0$ şi $F(1) = 1$.

a. Să se arate că există $c \in (0,1)$ astfel ca $F(c) = 1 - c$.

b. Să se arate că există $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\alpha \neq \beta$, astfel ca $f(\alpha) \cdot f(\beta) = 1$.

2. Fie A o mulţime nevidă şi $* : A \times A \to A$ o lege de compoziţie cu proprietatea că, dacă $x, y, z \in A$ şi $x * y = z$, atunci $x * z = y$.

a. Să se arate că, pentru orice $a \in A$, funcţia $f_a : A \to A$, $f_a(x) = a * x$ este bijectivă.

b. Dacă există element neutru, atunci să se arate că orice element din A este inversabil.

3. Fie A o mulţime finită, nevidă şi $f : A \times A \to A$ o lege de compoziţie asociativă:

$$f(x, y) = x * y, \quad x, y \in A.$$

Să se arate că, pentru orice număr natural $k \geq 2$, există un element $a_k \in A$, astfel ca $(a_k)^k = a_k$. (S-a notat $a^k = \underbrace{\overbrace{a * a * \cdots * a}}_{k \text{ ori}}$).

4. a. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$2f(2x + 1) = f(x) + 3x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b. Daţi un exemplu de funcţie discontinuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia de mai sus.

Premianţii concursului "Argument", ediţia a VI-a

Clasa a V-a

Premiul I. *Hosu Iulia* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Zlampareţ George* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Iliuţă Filip* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Robu Raluca* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Lazea Darius* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Cozmuţa Tudor* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga").

Premiul al III-lea. *Vădean Cătălin* (C.N. "Gheorghe Şincai"), Ştirbu Silvia (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Mercea Corina* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Şeu David* (Şc. Gim. "George Coşbuc").

Clasa a VI-a

Premiul I. *Talpoş Carina* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga"), *Zaharie Oana* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga").

Premiul al II-lea. *Cionte Sergiu* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Treista Georgiana* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Premiul al III-lea. *Turda Raul* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Lazăr Laurenţiu* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Clasa a VII-a

Premiul I. *Robu Vlad* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Pop Călin* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga").

Premiul al II-lea. *Boroica Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Ilieş Iulia* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Francioli Daria* (C.N. "Vasile Lucaciu"), *Roman Ioana* (C.N. "Mihai Eminescu" Satu Mare).

Premiul al III-lea. *Becsi Paul* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Moldovan Nicolae* (Şc. Gim. "George Coşbuc").

Clasa a VIII-a

Premiul I. *Zelina Paul* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al II-lea. *Matei Bledea Alexandru* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Mercea Ioana* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Cotârlan Codrin* (C.N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Tomoiagă Radu* (Şc. Gim. "George Coşbuc" Sighetu Marmaţiei), *Stepan Dacian* (Şc. Gim. "George Coşbuc" Sighetu Marmaţiei).

Clasa a IX-a

Premiul I. *Tămâian Andrei* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Tenie Andra* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tg. Mureş).

Premiul al II-lea. *Lucaciu Sergiu* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Vlad* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Mărieş Maria* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a X-a.

Premiul I. *Buna-Mărginean Alex* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tg. Mureş), *Zelina Mihai* (C.N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al II-lea. *Sântejudean Tudor* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Nicuşor Andrei* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tg. Mureş), *Oprea Maria* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tg. Mureş).

Clasa a XI-a

Premiul I. *Sabău Vlad* (C.N. "Alexandru Papiu Ilarian" Tg. Mureş).

Premiul al II-lea. *Butnar Adrian* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Cotan Paul* (C.N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Georgescu Sabina* (C.N. "Unirea" Tg. Mureş).

Clasa a XII-a

Premiul I. *Moldovan Bogdan* (L.T. "Onisifor Ghibu" Cluj-Napoca).

Premiul al II-lea. *Bud Cristian* (C.N. "Gheorghe Şincai"), *Şerban Ştefana* (L.T. "Petru Maior" Reghin), *Gotha Güntter* (L.T. "Nemeth Laszlo").

Premiul al III-lea. *Bura Lucia* (C.N. "Mihai Eminescu" Satu Mare).

Marele premiu "Dumitru Angheluţă", pentru cel mai mare punctaj obţinut în concurs dintre elevii de liceu, instituit în memoria marelui profesor de matematică al Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" Baia Mare, a fost câştigat de elevul *Moldovan Bogdan* de la L.T. "Onisifor Ghibu" Cluj-Napoca.

Argument 17

Concursul "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni, 2015

1. Considerăm numerele a, b şi c determinate de:

$$a = 204 - 3\left[(57 - 60 : 4 \times 2) \times 3 - 210 : 7\right]$$

$$5 \times [326 - b \times (54 : 9)] + 865 = 2015$$

iar c este egal cu diferenţa dintre cel mai mare număr natural de trei cifre distincte şi cel mai mic număr natural impar de trei cifre.

a) Calculaţi cele trei numere.

b) Arătaţi că restul împărţirii numărului c la b este egal cu suma cifrelor numărului a.

2. La împărţirea a două numere naturale nenule, câtul este de 18 ori mai mic decât diferenţa dintre deîmpărţit şi rest, iar împărţitorul de 3 ori mai mare decât câtul.

a) Care este câtul împărţirii?

b) Dacă, în plus, restul este mai mare decât 15, să se determine numerele iniţiale.

3. Se consideră următorul şir de numere: 0, 5, 10, 15, 20, 25,... şi şirul corespunzător sumelor cifrelor numerelor din primul şir: 0, 5, 1, 6, 2, 7,...

a) Calculaţi suma primilor 20 de termeni din primul şir.

b) Arătaţi că numerele 4, 8, 9, 10 şi 2015 se află în al doilea şir.

c) Care este primul număr din primul şir cu suma cifrelor 27? (justificaţi răspunsul).

Subiectul a fost propus de: Prof. Florin Bojor
Prof. Gheorghe Boroica

Notă. *La concurs au participat aproximativ 100 de elevi de clasa a IV-a de la şcolile generale din Baia Mare.*

Premiul I. *Biriş Marc* (Şc. Gim. "Nichita Stănescu", înv. Pop Luminiţa), *Muntean Tudor* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga", înv. Covaciu Viorica), *Rus Tudor* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga", înv. Tarţa Diana).

Premiul al II-lea. *Tiut Cristian* (Şc. Gim. "George Coşbuc", înv. Dragoş Maria).

Premiul al III-lea. *Marchiş Marcus* (Şc. Gim. "Dimitrie Cantemir", înv. Birle Delia), *Gheţe Ruxandra* (Şc. Gim. "Avram Iancu", înv. Coza Ioana).

Olimpiada de matematică etapa locală - 28 februarie 2015

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x^2-4x+4]=[-2x^2+8x-6]$.

2. Fie $x, y, z \in (0,\infty)$ cu proprietatea $xy, yz, zx \leq 1$
a) Determinaţi $m \in (0,\infty)$ maxim pentru care

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2} \geq m(1+xy),\ \forall\, x, y \in (0,\infty),\ \text{cu}\ \ xy \leq 1.$$

b) Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2}+\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{2+x^2+z^2}+\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2} \geq \frac{3+xy+xz+yz}{2},\ \forall\, x, y, z \in (0,\infty).$$

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale, cu proprietatea că $x_{n+m}+x_{n-m}=x_{3n}$ pentru orice numere naturale n şi m cu $n \geq m$. Să se determine x_{2015}.

Gazeta Matematică nr. 10/2014

4. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, Q astfel încât $\dfrac{AM}{MB}=l$, $\dfrac{CN}{NB}=k$, $\dfrac{CP}{PD}=m$, $\dfrac{AQ}{QD}=p$, unde $l, k, m, p > 0$ şi $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$. Arătaţi că dreptele QN, PM şi AC sunt concurente.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Fărcaş Natalia, Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu" Baia Mare
Prof. Pop Radu, Liceul Teoretic Sanitar Baia Mare

Clasa a X-a

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$ cu cel puţin două elemente şi funcţia $f : A \to A$ astfel încât

$$\forall\, x \in A,\ (f \circ f)(x) = 2016 \cdot f(x) - 2015x.$$

a) Să se demonstreze că f nu poate fi strict descrescătoare.

b) Dacă $A=\mathbb{R}$, să se arate că există o infinitate de funcţii bijective care verifică relaţia din enunţ.
c) Să se determine f, dacă A este finită.

2. Să se arate că $2016^{\log_{2015}2014} > 2014^{\log_{2016}2017}$.

Traian Covaciu

3. Să se demonstreze că dacă $a>0$, $a\neq 1$, atunci există o infinitate de perechi de numere reale strict pozitive (x,y) astfel încât:
a) $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$.
b) $\log_a(x+y)=(\log_a x)\cdot(\log_a y)$.

Dana Heuberger

4. Fie O şi H centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului ABC. Demonstraţi că, dacă $HA=OA$ şi $HB=OB$, atunci $HC=OC$.

Lucian Dragomir, S.L14.337, G.M. 12/2014

Subiectele au fost selectate şi prelucrate de:
Prof. Dana Heuberger, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Traian Covaciu, C.N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=a\cdot A+b\cdot I_3$.
b) Să se arate că $\det(A^n-nA)\neq 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

2. Şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ de numere reale sunt definite prin $x_0=y_0=1$ şi

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix},\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

a) Să se arate că $x_{n+1}-3x_{n+1}+x_n=0$ şi $y_{n+2}-3y_{n+1}+y_n=0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.
b) Să se demonstreze că ecuaţiile $x^2-5y^2=-4$ are o infinitate de soluţii în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

3. Fie $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det(A)=1$.
a) Să se demonstreze că $\exists\, b,c,d\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\det(B+xA)=x^3+bx^2+cx+d$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
b) Dacă $\det(B+\sqrt{2}A)=0$, demonstraţi că $\exists\, x_0\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\det(B+x_0A)=0$.

4. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a > 1$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+1}{x_n}$, $\forall\, n \geq 1$.
a) Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$.

Subiectele au fost propuse şi selectate de:
Prof. Petruţiu Crina, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Boroica Gheorghe, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare
Prof. Bojor Florin, C.N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Clasa a XII-a

1. Pentru $x, y \in G(1,3)$ definim $x * y = \dfrac{2xy-3x-3y+6}{xy-2x-2y+5}$.
a) Arătaţi că G este parte stabilă în raport cu $*$.
b) Presupunând că $(G,*)$ este grup abelian, arătaţi că $(G,*) \cong (R_+^*, \cdot)$.
c) Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, calculaţi $E_n = \dfrac{\dfrac{\frac{13}{7} * 33}{17} * \cdots * 4n^2-3}{2n^2-1}$.

R.M.T. 1/2015 (*Enunţ modificat*)

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi mulţimea $Z(G) = \{x \in G \,|\, xy = yx, \forall\, y \in G\}$. Dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G - Z(G)$, atunci G este comutativ.

Gazeta Matematică nr. 12/2014

3. Să se determine primitiva F a funcţiei

$$f : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin 2x},$$

cu proprietatea $F(0) = \dfrac{1+\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$.

Gheorghe Szöllösy

4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, cu $f(0) \neq 0$, care verifică

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{2}\left(f(x)+f(0)\right),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Subiectele au fost selectate şi prelucrate de:
Prof. Pop Vesel Floare, L.T. "Bogdan Vodă", Vişeu de Sus
Prof. Gherasin Gheorghe, L.T. "Regele Ferdinand", Sighetu Marmaţiei
Prof. Giurgi Vasile, C.N. "Dragoş Vodă, Sighetu Marmaţiei

Argument 17

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Dacă $m \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{R}$, $m > |n|$ atunci, în orice triunghi cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea*

$$\frac{a}{mh_a + nr} + \frac{b}{mh_b + nr} + \frac{c}{mh_c + nr} \geq \frac{2s}{(3m+n)r},$$

unde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Avem:

$$U = \sum_{cyclic} \frac{a}{mh_a + nr} = \sum_{cyclic} \frac{a^2}{m\,ah_a + nar} = \sum \frac{a^2}{2F\,m + nar}$$

unde F este aria triunghiului. Conform inegalităţii lui Bergström rezultă că:

$$U \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyclic} a\right)^2}{\sum\limits_{cyclic} (2mF + nar)} = \frac{(a+b+c)^2}{6mF + nr(a+b+c)} = \frac{4s^2}{6mF + 2nsr},$$

unde s = semiperimetrul. Din $F = sr$ găsim

$$U \geq \frac{4s^2}{6msr + 2nsr} = \frac{2s}{3mr + nr} = \frac{2s}{(3m+n)r}.$$

2. *Dacă $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, atunci*

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(2x+y+z)} + \frac{y^2}{(az+bx)(2y+z+x)} + \frac{z^2}{(ax+by)(2z+x+y)} \geq \frac{3}{4(a+b)}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Argument 17

Soluţie. Avem:

$$W=\sum_{cyclic}\frac{x^2}{(ay+bz)(2x+y+z)}=$$

$$=\sum_{cyclic}\frac{x^2}{(ay+bz)((x+y+z)+x(ay+bz)}\overset{\text{Bergström}}{\geq}$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{\sum\limits_{cyclic}((ay+bx)(x+y+z)+x(ay+bz))}=$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(x+y+z)^2+(a+b)(xy+yz+zx)} \qquad (1)$$

Deoarece $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$, $\forall\, x,y,z,\in\mathbb{R}^*$, rezultă din (1) că

$$W\geq\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(x+y+z)^2+\frac{a+b}{3}(x+y+z)^2}=\frac{3}{4(a+b)}.$$

3. Dacă $a,b,x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$, atunci

$$\frac{x^2y^2}{ax+by}+\frac{y^2z^2}{ay+bz}+\frac{z^2x^2}{az+bx}\geq\frac{3xyz}{a+b}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Avem:

$$W=\sum_{cyclic}\frac{x^2y^2}{ax+by}=\sum_{cyclic}\frac{x^2y^2z}{axz+byz}=xyz\sum_{cyclic}\frac{xy}{axz+byz} \qquad (1)$$

şi notăm $u=xy$, $v=yz$, $w=zx$. Atunci

$$W=xyz\sum_{cyclic}\frac{u}{aw+bv}=xyz\sum_{cyclic}\frac{u^2}{auw+buv}\overset{\text{Bergström}}{\geq}$$

$$\geq xyz\frac{(u+v+w)^2}{\sum\limits_{cyclic}(auw+bvw)}=xyz\frac{(u+v+w)^2}{a(uw+vu+wv)+b(vw+wu+uv)}=$$

$$=xyz\frac{(u+v+w)^2}{(a+b)(uv+vw+wu)} \qquad (2)$$

Deoarece $(u+v+w)^2\geq 3(uv+vw+wu)$, $\forall\, u,v,w\in\mathbb{R}_+^*$, obţinem

$$W\geq xyz\frac{3(uv+vw+wu)}{(a+b)(uv+vw+wu)}=\frac{3xyz}{a+b}.$$

Avem egalitate $\Leftrightarrow x=y=z$.

4. *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, să se calculeze partea întreagă a numărului* $E = \dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Meda Bojor

Soluţie. Dacă triunghiul este ascuţitunghic sau dreptunghic, avem că $a^2 \leq b^2 + c^2$, $b^2 \leq c^2 + a^2$, $c^2 \leq b^2 + a^2$, unde cel puţin două dintre inegalităţi sunt stricte. Atunci se obţine $E < 3$.
Dacă triunghiul este obtuzunghic, putem presupune că cea mai mare latură este a şi avem $a > b \geq c$. Atunci

$$\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} < \frac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2}} \leq \sqrt{2} \tag{1}$$

Dar $a < b + c \Rightarrow a^2 < (b+c)^2 \Rightarrow$

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} < \sqrt{\frac{b^2+2bc+c^2}{b^2+c^2}} = \sqrt{1+\frac{2bc}{b^2+c^2}} < \sqrt{2} \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă $E < 2\sqrt{2} < 3$. În consecinţă, pentru orice triunghi avem $E < 3$. Vom demonstra că $E \geq 2$. Pentru aceasta fie $s > 0$, astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = s^2$, şi vom nota $\dfrac{a}{s} = x$, $\dfrac{b}{s} = y$, $\dfrac{c}{s} = z$. Atunci $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şi

$$E = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Dar $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 2x^2 \Leftrightarrow 1 \geq 4x^2(1-x^2) \Leftrightarrow (2x^2-1)^2 \geq 0$. Aplicând inegalitatea anterioară pentru fiecare fracţie, rezultă $E \geq 2(x^2+y^2+z^2) = 2$. Atunci $[E] = 2$.

5. *Fie M un punct în planul triunghiului ABC astfel încât $a \cdot \overrightarrow{AM} + c \cdot \overrightarrow{BM} + b \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$, unde $BC = a$, $AC = b$ şi $AB = c$, şi notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se demonstreze că $MG \| BC$ dacă şi numai dacă lungimile laturilor AB, BC, AC sunt trei numere în progresie aritmetică.*

Meda Bojor

Soluţie. Din ipoteză avem că $\overrightarrow{AM} = \dfrac{c\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$, atunci

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} &= \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3} - \frac{c\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}}{a+b+c}\\ &= \frac{(a+b-2c)\overrightarrow{AB} + (a-2b+c)\overrightarrow{AC}}{a+b+c}.\end{aligned}$$

Dar $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, atunci $MG \| BC \Leftrightarrow a + b - 2c = -a + 2b - c \Leftrightarrow a = \dfrac{b+c}{2} \Leftrightarrow$ AB, BC, CA sunt în progresie aritmetică.

6. *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + 2b^2 - 2ab + ac - 2bc \leq 0$. Să se arate că $c^2 \geq \max\{a^2; ac\}$.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Din ipoteză avem că $(a-b)^2 + (b-c)^2 + ac - c^2 \leq 0$, deci

$$ac \leq c^2 \tag{1}$$

Înmulţind cu (2) relaţia din ipoteză, obţinem

$$2a^2 + 4b^2 - 4ab + 2ac - 4bc \leq 0 \Leftrightarrow (a - 2b + c)^2 + a^2 - c^2 \leq 0,$$

deci

$$a^2 \leq c^2 \tag{2}$$

Din (1) şi (2) deducem concluzia.

7. *Fie $a \geq 4$ şi $b \geq 1$. Să se arate că*

$$\begin{aligned}&(x^2 - 4x + a)(y^2 - 2y + b)(z^2 + 2z + b)(t^2 + 4t + a) \geq \\ &\geq 16(a-4)(b-1)xyzt, \quad \forall\, x, y, z, t > 0.\end{aligned}$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Împărţind cu $xyzt$, inegalitatea se scrie:

$$\begin{aligned}&\left(x + \frac{a}{x} - 4\right)\left(y + \frac{b}{y} - 2\right)\left(z + \frac{b}{z} + 2\right)\left(t + \frac{a}{t} + 4\right) \geq \\ &\geq 16(a-4)(b-1),\ \forall\, x, y, z, t > 0.\end{aligned}$$

Deoarece $x + \dfrac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$, $\forall\, x > 0$, cu egalitate pentru $x = \dfrac{a}{x}$ şi analoagele, notând cu E membrul stâng al inegalităţii de demonstrat, avem:

$$\begin{aligned}E &\geq \left(2\sqrt{a} - 4\right)\left(2\sqrt{b} - 2\right)\left(2\sqrt{b} + 2\right)\left(2\sqrt{a} + 4\right) = \\ &= 16(a-4)(b-1).\end{aligned}$$

Avem egalitate în inegalitatea de demonstrat dacă $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{b}$ şi $t = \sqrt{a}$.

8. *Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n \geq 0}$ definit de $a_0 = 0$ şi*

$$a_{n+1} = \frac{5}{3}\, a_n + \frac{4}{3}\sqrt{a_n^2 + 4}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Avem: $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{8}{3}$, $a_2 = \dfrac{5}{3}a_1 + \dfrac{4}{3}\sqrt{a_1^2+4} = \dfrac{40}{9} + \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{10}{3} = \dfrac{80}{9}$.

Demonstrăm prin inducţie că $a_n = 3^n - \dfrac{1}{3^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Cum pentru $n \in \{0,1,2\}$ afirmaţia este adevărată, presupunând $a_k = 3^k - \dfrac{1}{3^k}$ $(k \in \mathbb{N})$, avem:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{5}{3}\,a_k + \frac{4}{3}\sqrt{a_k^2+4} = \frac{5}{3}\left(3^k - \frac{1}{3^k}\right) + \frac{4}{3}\left(3^k + \frac{1}{3^k}\right) = \\ &= 3^{k+1} - \frac{1}{3^{k+1}}, \end{aligned}$$

deci afirmaţia e adevărată şi pentru $k+1$.

9. *Fie $a, b, c > 0$ cu $abc = \dfrac{27}{8}$, iar $x \in [-a,a]$, $y \in [-b,b]$, $z \in [-c,c]$. Arătaţi că*

$$(a+x)(b+y)(c+z)\sqrt{(a-x)(b-y)(c-z)} \le 8.$$

În ce caz avem egalitate?

Gotha Güntter

Soluţie. Considerăm funcţia $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a+x)\sqrt{a-x}$. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &\le \frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}} \Leftrightarrow (a+x)^2(a-x) \le \frac{32a^3}{27} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 + ax^2 - a^2x + \frac{5a^3}{27} \ge 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{3}\right)^2\left(x + \frac{5a}{3}\right) \ge 0, \end{aligned}$$

adevărat $\forall\, x \in [-a,a]$, cu egalitate pentru $x = \dfrac{a}{3}$.

Deci $\max\limits_{x\in[-a,a]} f(x) = f\left(\dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{4a}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$. Deducem că

$$\begin{aligned} &(a+x)(b+y)(c+z)\sqrt{(a-x)(b-y)(c-z)} \le \\ &\le \frac{4a}{3}\sqrt{\frac{2a}{3}}\cdot\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{2b}{3}}\cdot\frac{4c}{3}\sqrt{\frac{2c}{3}} = \frac{64abc}{27}\sqrt{\frac{8abc}{27}} = 8, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia arătat.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = \dfrac{a}{3}$, $y = \dfrac{b}{3}$, $z = \dfrac{c}{3}$.

10. *Fie p un număr natural impar. Să se arate că p este un număr prim dacă şi numai dacă ecuaţia $a+(a+1)+\cdots+(a+n) = p$ admite exact o soluţie în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.*

Gotha Güntter

Soluţie. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu

$$(2a+n)(n+1)=2p. \tag{1}$$

Cazul $p=1$ este evident. În cele ce urmează considerăm $p \geq 3$.

Ipoteză. p este număr prim.

Cum a, n sunt nenule şi $2a+n>n+1$, deducem că $n+1=2$ şi $2a+n=p$, adică $n=1$ şi $a=\dfrac{p-1}{2}$. Aşadar (1) admite o singură soluţie pe mulţimea numerelor naturale nenule, şi anume $(a,n)=\left(\dfrac{p-1}{2},1\right)$.

Ipoteză: există exact o pereche $(a,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ care verifică (1).

Atunci $\exists\, u, v \in \mathbb{N}$, u, v numere impare, $u \geq v \geq 3$ astfel încât $p=uv$.
Deci (1) $\Leftrightarrow (2a+n)(n+1)=2uv$. Observăm că perechile de numere naturale nenule $(a,n)=\left(\dfrac{uv-1}{2},1\right)$ şi $(a,n)=\left(\dfrac{2u-v+1}{2},v-1\right)$ verifică ecuaţia.

Înseamnă că există cel puţin două perechi de numere naturale nenule care verifică (1), ceea ce este în contradicţie cu ipoteza. Deducem că p este număr prim.

11. *Fie triunghiul ABC cu bisectoarele $(AA'$, $(BB'$, $(CC'$, unde $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$. Dacă $\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}=\overrightarrow{0}$, să se arate că triunghiul ABC este echilateral.*

Dana Heuberger

Soluţie. Folosind teorema bisectoarei în triunghiul ABA', obţinem $IA'=\dfrac{a}{a+b+c}AA'$.
Apoi, deoarece avem $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$ şi relaţiile analoage, ipoteza devine:

$$a\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\right)+b\left(\frac{c}{c+a}\overrightarrow{BC}+\frac{a}{c+a}\overrightarrow{BA}\right)+$$
$$+c\left(\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ab\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right)\overrightarrow{AB}+ac\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}\right)\overrightarrow{AC}+$$
$$+bc\left(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}\right)\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{ab(a-b)}{(b+c)(a+c)}\overrightarrow{AB}+\frac{ac(a-c)}{(b+c)(a+b)}\overrightarrow{AC}+\frac{bc(b-c)}{(a+c)(a+b)}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (ab(a^2-b^2)-bc(b^2-c^2))\overrightarrow{AB}+(ac(a^2-c^2)+bc(b^2-c^2))\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab(a^2-b^2)-bc(b^2-c^2)=0 \\ ac(a^2-c^2)+bc(b^2-c^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-ac+c^2-b^2=0 \\ a^2-ab+b^2-c^2=0 \end{cases}.$$

Adunând şi scăzând relaţiile precedente, deducem:

$$\begin{cases} 2a^2 - ac - ab = 0 \\ ab - ac + 2c^2 - 2b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b + c \\ a(b-c) - 2(b-c)(b+c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = b = c.$$

12. *Fie G centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$. Notăm cu $A_1, B_1, C_1 D_1$ simetricele punctelor A, B, C respectiv D, faţă de mijloacele segmentelor $[CG]$, $[DG]$, $[AG]$ respectiv $[BG]$. Să se arate că:*

a) $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram.

b) $ABCD$ şi $A_1B_1C_1D_1$ are acelaşi centru de greutate.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$$

a) Din $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} = 2\overrightarrow{OG}$ şi $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1} = 2\overrightarrow{OG}$ rezultă că $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1}$, deci $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram.

b) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = 4\overrightarrow{OG}$, deci $\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG}$, unde $G_1 =$ centrul de greutate al paralelogramului $A_1B_1C_1D_1$.

13. *Fie $a, b, c, d > 0$. Să se arate că*

$$\frac{(a-b)(c+d)}{b(a+c+d)} + \frac{(b-c)(a+d)}{c(a+b+d)} + \frac{(c-d)(a+b)}{d(a+b+c)} + \frac{(d-a)(b+c)}{a(b+c+d)} \geq 0.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Trebuie demonstrat că

$$\left(\frac{(a-b)(c+d)}{b(a+c+d)} + 1\right) + \left(\frac{(b-c)(a+d)}{c(a+b+d)} + 1\right) +$$
$$+ \left(\frac{(c-d)(a+b)}{d(a+b+c)} + 1\right) + \left(\frac{(d-a)(b+c)}{a(b+c+d)} + 1\right) \geq 4$$

sau echivalent:

$$\frac{a(b+c+d)}{b(a+c+d)} + \frac{b(a+c+d)}{c(a+b+d)} + \frac{c(a+b+d)}{d(a+b+c)} + \frac{d(a+b+c)}{a(b+c+d)} \geq 4,$$

(adevărat), din inegalitatea mediilor.

14. *Se dă paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CM)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = m$, $\frac{CN}{NM} = n$. Să se demonstreze că punctele B, N, D sunt coliniare dacă şi numai dacă $m = n - 1$.*

Adrian Pop

Soluţie. Fie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$.

Din $\frac{AM}{MB} = m$; $M \in (AB) \Rightarrow \frac{AB}{MB} = m + 1 \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{b} - \frac{1}{m+1}\overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{n+1}\left(\overrightarrow{b} + \frac{1}{m+1}\overrightarrow{a}\right)$

$\overrightarrow{BN} = -\frac{n}{(m+1)(n+1)}\overrightarrow{a} + \frac{1}{n+1}\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

B, N, D coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{BN}$ şi $\overrightarrow{BD}$ coliniare $\overset{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\text{ necoliniare}}{\Longleftrightarrow} \frac{n}{(m+1)(n+1)} = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow$ $m = n - 1$.

15. *Arătaţi că $\sin\alpha + \cos\alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha} \geq 2 + \sqrt{2}$, pentru orice $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Mihai Vijdeluc, Vasile Ienuţaş

Soluţie. Avem $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
Adunăm şi scădem la inegalitatea de demonstrat $\frac{1}{2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}$, atunci avem:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \cos\alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{2}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha} &= \\
= \sin\alpha + \cos\alpha + \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha} &\geq \\
\geq 3\sqrt[3]{\sin\alpha\cos\alpha\frac{1}{2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) &= \\
= 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{8}}} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}& \qquad (*)
\end{aligned}$$

Am folosit inegalitatea mediilor. Avem

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \geq 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \qquad (**)$$

Înlocuim inegalitatea $(**)$ în $(*)$ şi obţinem

$$\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{2}{\sin 2\alpha}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}+2\,\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}+2-\frac{\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}.$$

Clasa a X-a

1. *Să se arate că dacă* $a,b\in\mathbb{R}_+$, $a+b\in\mathbb{R}_+^*$, $x,y,z\in(1,\infty)$, *atunci*

$$\frac{\log_x y}{ax+by}+\frac{\log_y z}{ay+bz}+\frac{\log_z x}{az+bx}\geq\frac{9}{(a+b)(x+y+z)}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Deoarece $x,y,z\in(1,\infty)$ rezultă că $\log_x y,\log_y z,\log_z x\in(0,\infty)$. Conform inegalităţii mediilor avem

$$\sum\frac{\log_x y}{ax+by}\geq 3\sqrt[3]{\frac{\log_x y\cdot\log_y z\cdot\log_z x}{(ax+by)(ay+bz)(az+bx)}}\geq$$
$$\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(ax+by)(ay+bz)(az+bx)}}\geq\frac{3}{\dfrac{(ax+by)+(ay+bz)+(az+bx)}{3}}=$$
$$=\frac{9}{(a+b)(x+y+z)}.$$

2. *Se consideră ecuaţia funcţională* $f(f(x))+2f(x)=3x$, $\forall\,x\in\mathbb{R}$, *unde* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) Să se arate că există o funcţie descrescătoare care verifică ecuaţia anterioară.

b) Să se determine toate funcţiile crescătoare care verifică ecuaţia dată.

Florin Bojor

Soluţie. *a)* Se caută soluţii de forma $f(x)=ax$, $a<0$ şi se obţine $f(x)=-3x$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare care verifică ecuaţia dată. Pentru $x=0$ se obţine $f(f(0))+2f(0)=0$. Dacă $f(0)>0\Rightarrow f(f(0))\geq f(0)>0\Rightarrow f(f(0))+2f(0)>0(F)$. Dacă $f(0)<0\Rightarrow f(f(0))\leq f(0)<0\Rightarrow f(f(0))+2f(0)<0(F)$. Prin urmare $f(0)=0$, şi folosind monotonia funcţiei f avem că $f([0,\infty))\subseteq[0,\infty)$ şi $f((-\infty,0])=(-\infty,0]$.
Înlocuind $x:=\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{de\ n\ ori\ g}(x)$ vom obţine

$$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{de\ \mathrm{n+2}\ ori\ f}(x)+2\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{de\ \mathrm{n+1}\ ori\ f}(x)=3\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{de\ n\ ori\ f}(x),\ \forall\,x\in\mathbb{R}.$$

Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat vom nota cu $a_n = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{de\ n\ ori\ f})(x)$.
Atunci ecuaţia funcţională devine $a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3a_n$, care are ecuaţia caracteristică $r^2 + 2r = 3$ cu soluţiile $r_1 = 1$, $r_2 = -3$.
Prin urmare, $a_n = A(x) + B(x)(-3)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, unde $A(x), B(x) \in \mathbb{R}$.
Dacă $x > 0$, atunci $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi deoarece $(-3)^n$ este nemărginit atât inferior cât şi superior, va rezulta că $B(x) = 0$ şi $A(x) = a_0 = x \Rightarrow f(x) = x$, $\forall\, x > 0$. Analog se obţine $f(x) = x$, $\forall\, x < 0$, prin urmare $f(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, funcţie care verifică condiţiile cerute.

3. *Determinaţi numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ştiind că*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k \cdot z_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot i$$

şi $|z_k| = k$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Avem că $z_k = k(\cos t_k + i \sin t_k)$, $t_k \in [0, 2\pi)$ şi atunci

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k \cdot z_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 (\cos t_k + i \cdot \sin t_k).$$

Folosind ipoteza deducem că

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \sin t_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^k \sin t_k - 1\Big) k^2 = 0 \qquad (1)$$

Deoarece $(-1)^k \sin t_k - 1 \leq 0$, $\forall\, k \in \overline{1, n}$, vom obţine din (1) că $(-1)^k \sin t_k - 1 = 0$, $\forall\, k \in \overline{1, n}$, deci $\sin t_k = (-1)^k$, $\forall\, k \in \overline{1, n}$. Atunci $\cos t_k = 0$, deci $z_k = (-1)^k \cdot k \cdot i$, $\forall\, k \in \overline{1, n}$, numere ce convin.

4. *Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia*

$$2^{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x + 3} + x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 2^x.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Deoarece $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2(x-1)(x-3)$, împărţind ecuaţia cu 2^x obţinem:

$$2^{(x+1)^2(x-1)(x-3)} + (x+1)^2(x-1)(x-3)2^{-x} = 1.$$

Se observă că $x \in \{-1, 1, 3\}$ convine. Pentru $x \in (1, 3)$, membrul stâng al ecuaţiei $E < 2^0 + 0 \cdot 2^{-x} = 1$, iar pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$ găsim că $E > 2^0 + 0 = 1$.
Aşadar, $S = \{-1; 1; 3\}$.

5. *Să se arate că dacă patrulaterul $ABCD$ este înscris în semicercul de diametru $[AD]$, atunci:*

$$R(AB^2+BC^2+CD^2)-AB\cdot BC\cdot CD=4R^3,$$

unde R este raza cercului circumscris.

Marian Cîrstea

Soluţie. Avem $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$. Atunci

$$\begin{aligned}4R^2 &= AD^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2=\\ &= AB^2+BC^2+CD^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\\ &= AB^2+BC^2+CD^2+2\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+2BC\cdot CD\cdot\cos\widehat{BCD}=\\ &= AB^2+BC^2+CD^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-2BC\cdot CD\cdot\cos A=\\ &= AB^2+BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\frac{AB}{2R}.\end{aligned}$$

6. *Fie $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{(1-x)x}}$, $g(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$.*
Să se arate că $\max\limits_{x\in[0,1]}(f(x)+g(x))=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)+\max\limits_{x\in[0,1]}g(x)$.

Gotha Güntter

Soluţie. Arătăm că

$$\min_{x\in[0,1]}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \max_{x\in[0,1]}g(x)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$$

şi

$$\max_{x\in[0,1]}(f(x)+g(x))=f\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$f(x)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow 1-\sqrt{(1-x)x}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)x}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0,$$

adevărat. Egalitate are loc dacă şi numai dacă $x=\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{g(x)}{2}\underset{ma-mp}{\le}\sqrt{\dfrac{1-x+x}{2}}\Leftrightarrow g(x)\le\sqrt{2}$. Egalitate are loc dacă şi numai dacă $1-x=x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)\le\frac{3}{\sqrt{2}}&\Leftrightarrow\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\le\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{1-\sqrt{(1-x)x}}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 1+2\sqrt{(1-x)x}\le\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{1-\sqrt{(1-x)x}}\right)^2.\end{aligned}$$

Notăm $t = \sqrt{(1-x)x}$ şi obţinem echivalent:

$$1+2t \le \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{1-t}\right)^2 \Leftrightarrow 1+2t \le \frac{9}{2} + 1 - t - 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - t \ge \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-t} \Leftrightarrow t^2 - 3t + \frac{9}{4} \ge 2 - 2t \Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0.$$

Egalitate are loc dacă şi numai dacă $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2+x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Concluzia se impune.

7. *Să se rezolve în* $\mathbb{R}$ *ecuaţia* $\{2^x\} = \{2^{\{x\}}\}$.

Dana Heuberger

Soluţie. Notăm cu $(*)$ relaţia din enunţ. Observăm că toate numerele din mulţimea $S_1 = \mathbb{N} \cup (0,1)$ sunt soluţii.

Dacă $x \in \mathbb{Z}_-$, atunci $2^x \in (0,1)$ şi $(*)$ devine $2^x = \{2^0\} = 0$, fals.

Dacă $x \notin \mathbb{Z}$, atunci notăm $[x] = k \in \mathbb{Z}$ şi avem $x \in (k, k+1)$.
Relaţia $(*)$ devine:

$$2^x = [2^x] + 2^{\{x\}} - 1 \tag{1}$$

Pentru $x < 0$, avem $2^x \in (0,1)$ şi (1) devine

$$2^x = 2^{\{x\}} - 1 \Leftrightarrow 2^{\{x\}}(1 - 2^{[x]}) = 1 \tag{2}$$

Observăm că $x \in [-1, 0)$ nu este o soluţie a ecuaţiei (2).
Pentru $[x] = k \le -2$, notăm $t = 1 - 2^k$ şi (2) devine

$$\{x\} = -\log_2(1-2^k).$$

Deoarece $k \le -2$, avem $-\log_2(1-2^k) \in (0,1)$ şi obţinem

$$x = k - \log_2(1-2^k) = \log_2 \frac{2^k}{1-2^k}.$$

Aşadar mulţimea $S_2\left\{ \log_2 \frac{2^k}{1-2^k} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, k \le -2 \right\}$ este soluţie.

Pentru $x > 1$, $x \notin \mathbb{Z}$, (1) $\Leftrightarrow 2^x - 2^{\{x\}} = [2^x] - 1 \overset{not}{=} t \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2^{\{x\}}(2^{[x]} - 1) = t$.
Aşadar,

$$2^{\{x\}} = \frac{t}{2^{[x]} - 1} \tag{3}$$

Avem $[x] = k \ge 1$. Observăm că numărul $k = 1$ nu verifică (3).
Pentru $k \ge 2$, deoarece $\{x\} \in (0,1)$, pentru ca relaţia (3) să fie adevărată, trebuie să avem

$$1 < \frac{t}{2^k - 1} < 2 \Leftrightarrow t \in (2^k - 1, 2^{k+1} - 2) \cap \mathbb{N}^*.$$

Deoarece lungimea intervalului precedent este egală cu $2^k - 1 > 1$, deducem că există numere naturale t în acesta.
Din (3) deducem că mulţimea

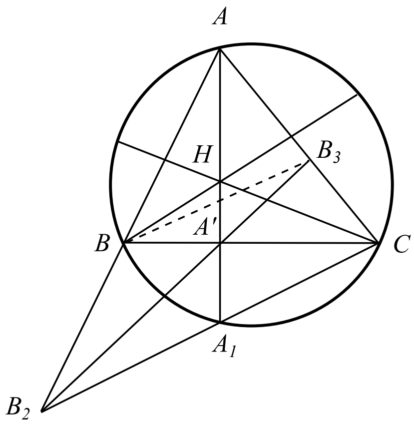
$$S_3 = \left\{ k + \log_2 \frac{t}{2^k - 1} \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\, k \geq 2,\, t \in (2^k - 1, 2^{k+1} - 2) \cap N^* \right\}$$

este soluţie.
Soluţia ecuaţiei este mulţimea $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

8. *Fie triunghiul ABC înscris în cercul $C(O, R)$, cu unghiurile $A, B, C \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Definim punctele A', A_1, B_2 şi B_3 astfel: A' este piciorul înălţimii din A, $\{A_1\} = (AA' \cap C(OR)$, $\{B_2\} = AB \cap A_1C$ şi $\{B_3\} = A'B_2 \cap AC$. În mod analog se definesc punctele C_3 şi A_3. Să se arate că dreptele AA_3, BB_3 şi CC_3 nu sunt concurente.*

Dana Heuberger

Soluţie. Să observăm că, din condiţia $B \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că dreptele AB şi A_1C sunt concurente.



Notăm, ca de obicei, cu a, b, c respectiv lungimile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul AA_1C, obţinem:

$$A_1C = 2R \cdot \cos C.$$

Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle AB_2C$, obţinem:

$$\frac{AB_2}{\sin\left(C + \frac{\pi}{2} - B\right)} = \frac{b}{\sin\left(B - \left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right)}$$

şi apoi $AB_2 = -\dfrac{b \cdot \cos(C-B)}{\cos 2B}$.
Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle BB_2C$, obţinem:

$$\frac{BB_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)} = \frac{a}{\sin\left(B-\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\right)}$$

şi apoi $BB_2 = -\dfrac{a \cdot \cos B}{\cos 2B}$.

Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle AA_1B_1$, obţinem: $\dfrac{A_1B_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)} = \dfrac{AB_2}{\sin(\pi-B)}$ şi apoi

$$A_1B_2 = \frac{AB_2 \cdot \cos B}{\sin B} = -\frac{b \cdot \cos(C-B)\cos B}{\cos 2B \cdot \sin B} = -\frac{2R \cdot \cos(C-B)\cos B}{\cos 2B}$$

Folosind teorema lui Ceva în $\triangle AB_2C$, rezultă:

$$\frac{B_3A}{B_3C} = \frac{A_1B_2}{A_1C} \cdot \frac{c}{BB_2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\cos(C-B)}{\cos C}.$$

analog obţinem:

$$\frac{C_3B}{C_3A} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\cos(A-C)}{\cos A}$$

şi $\dfrac{A_3C}{A_3B} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{\cos(B-A)}{\cos B}$. Rezultă că dreptele AA_3, BB_3, CC_3 sunt concurente dacă şi numai dacă:

$$\cos(C-B)\cos(A-C)\cos(B-A) = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \qquad (1)$$

Datorită simetriei, putem considera $\dfrac{\pi}{4} < A \leq B \leq C < \dfrac{\pi}{2}$.
Atunci,

$$\cos(C-A) > \cos A > 0$$
$$\cos(B-C) > \cos C > 0$$
$$\cos(A-B) > \cos B > 0.$$

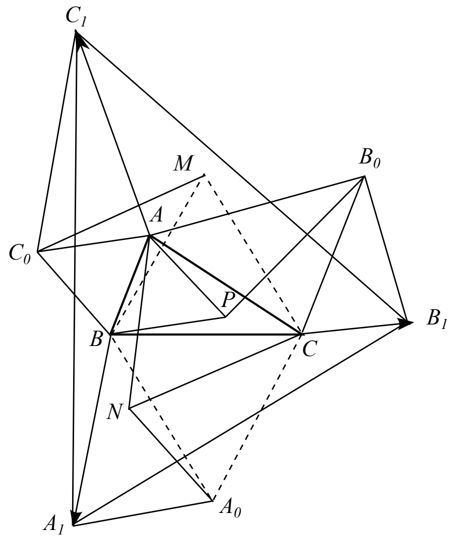
Înmulţind membru cu membru relaţiile precedente, obţinem o contradicţie cu (1). Aşadar dreptele AA_3, BB_3, CC_3 nu sunt concurente.

9. *Fie* $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ *şi triunghiul* ABC*. Definim punctele* M *şi* A_0 *astfel încât* A *şi* M *sunt în acelaşi semiplan de frontieră* BC*,* A *şi* A_0 *sunt în semiplane opuse de frontieră* BC *şi triunghiurile* BCM *şi* BCA_0 *sunt echilaterale. Analog se definesc punctele* N *şi* B_0 *şi apoi punctele* P *şi* C_0*. Fie* $C_1 = r_{C_0,\frac{\pi}{3}}(M)$ *(*C_1 *este imaginea lui* M *prin rotaţia de centru* C_0 *şi de unghi* $\frac{\pi}{3}$*),* $A_1 = r_{A_0,\frac{\pi}{3}}(N)$ *şi* $B_1 = r_{B_0,\frac{\pi}{3}}(P)$*. Să se arate că:*

a) $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \Leftrightarrow \triangle ABC$ *este echilateral.*
b) $AC_1 = BM$, $BA_1 = CN$ *şi* $CB_1 = AP$.
c) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{O}$.

Dana Heuberger

Soluţie.



$a)$ Se cunoaşte următoarea

Lemă. *Într-un reper cartezian oarecare, notăm cu literele mici corespunzătoare afixele vârfurilor triunghiurilor* ABC *şi* MNP, *la fel orientate. Atunci,*

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \Leftrightarrow m(b-c) + n(c-a) + p(a-b) = 0.$$

Într-un reper cartezian oarecare, notăm cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor din problemă.
Avem $m = b + \alpha(c-b)$, $c_0 = b + \alpha(a-b)$, $c_1 = c_0 + \alpha(m - c_0)$.
Obţinem $c_1 = b + \alpha(a-b) + \alpha^2(c-a)$ şi $a_1 = c + \alpha(b-c) + \alpha^2(a-b)$, $b_1 = a + \alpha(c-a) + \alpha^2(b-c)$.
Apoi

$$a_1(b-c) + b_1(c-a) + c_1(a-b) = -(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(\alpha-1)^2$$

Folosind Lema, deducem că

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Leftrightarrow \triangle ABC$$

echilateral.

b) Obţinem $\dfrac{c_1 - a}{m - b} = \alpha$, deci $\overrightarrow{AC_1} = r_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{BM})$, de unde rezultă că $AC_1 = BM$. Analog se deduce că $BA_1 = CN$ şi $CB_1 = AP$.

c) Deoarece $\overrightarrow{AC_1} = r_{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BA_1} = r_{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{CA})$ şi $\overrightarrow{CB_1} = r_{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{AB})$, deducem că

$$\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = r_{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = r_{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}.$$

10. *Care este cel mai mic număr întreg care se poate scrie sub forma*

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z},$$

unde x, y, z sunt anumite numere naturale nenule? Dar cel mai mare?

Cristinel Mortici

Soluţie. Soluţia este $t_{\min} = -3$, $t_{\max} = 12$. Important este că rezultă:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \in \mathbb{N}.$$

Soluţiile (x, y, z) ale acestei apartenenţe sunt: $(2, 3, 6), (2, 4, 4), (1, 2, 2), (1, 1, 1)$.
Valorile lui t corespunzătoare din egalitatea

$$t = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$$

sunt respectiv: $12, -3, -1, 3$.
Rezultă concluzia.

11. *Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ şi $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 1$. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numerele z_1^{2n+1}, z_1^{2n+1}, z_3^{2n+1} sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. $(z_1 + z_2 + z_3)^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)$.
Din ipoteză rezultă $0 = 3(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)$. Atunci $z_1 = -z_2$ sau $z_2 = -z_3$, sau $z_3 = -z_1$.

Fie $z_1 = -z_2$. Atunci $z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1} = z_3^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Rezultă:

$$\left| z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1} \right| = 1,$$

adică $z_1^{2n+1}, z_2^{2n+1}, z_3^{2n+1}$ sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.

12. *Fie $z_1, z_2, \ldots, z_5 \in \mathbb{C}^*$ cu $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_5|$, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$ şi $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 + z_5^3 = 0$.*
Să se arate că $z_1, z_2, \ldots, z_5$ sunt afixele vârfurilor unui pentagon regulat.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. $z_1, z_2, \ldots, z_5$ sunt soluţiile ecuaţiei

$$t^5 - \sigma_1 t^4 + \sigma_2 t^3 - \sigma_3 t^2 + \sigma_4 t - \sigma_5 = 0 \tag{1}$$

Fie $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_5| = \sigma$. Cu formulele lui Newton, ipoteza se scrie: $\sigma_1 = s_1 = s_3 = 0$. Atunci:

$$0 = \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_5} = r\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_5}\right) = \frac{\sigma_4 \cdot r}{\sigma_5}.$$

Deci $\sigma_4 = 0$.
$0 = s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 \Rightarrow \sigma_3 = 0$.

Atunci: $\overline{z_1 z_2 z_3 + \cdots + z_3 z_4 z_5} = 0 \Rightarrow 0 = r^3\left(\frac{1}{z_1 z_2 z_3} + \cdots + \frac{1}{z_3 z_4 z_5}\right) =$
$= r^3 \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_5} \Rightarrow \sigma_2 = 0$.
Ecuaţia (1) devine: $t^5 - \sigma_5 = 0$, deci $z_1, z_2, \ldots, z_5$ sunt rădăcinile de ordin 5 ale unui număr complex nenul. Prin urmare, $z_1, z_2, \ldots, z_5$ sunt afixele vârfurilor unui pentagon regulat.

13. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$g(x) = x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1}$$

iar funcţia f are proprietatea

$$f(x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1}) \le x$$
$$\le f(x) + (f(x))^3 + (f(x))^5 + \cdots + (f(x))^{2n-1},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţi că funcţiile f şi g sunt bijective.

Adrian Pop

Soluţie. Se verifică imediat că g este bijectivă, deci inversabilă.
Din relaţia $f(g(x)) \le x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă

$$f(t) \le g^{-1}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Din $x \le g(f(x))$ şi g^{-1} strict crescătoare, rezultă

$$g^{-1}(x) \le f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă $f(x) \le g^{-1}(x) \le f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f = g^{-1}$, care este bijecţie.

14. *Să se arate că în orice triunghi ABC avem:*

$$\frac{1}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}\,S},$$

notaţiile fiind cele cunoscute.

Mihai Vijdeluc

Soluţie. Ştim că m_a, m_b, m_c pot fi laturile unui triunghi $A'B'C'$, cu $S' = S_{A'B'C'} = \dfrac{3}{4}S$. Mai ştim că în orice triunghi ABC are loc:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S \tag{1}$$

Aplicăm (1) pentru triunghiul $A'B'C'$:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 4\sqrt{3}S',$$

dar

$$S' = \frac{3}{4}S \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}S = 3\sqrt{3}S \Rightarrow \frac{1}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}\,S}.$$

15. *Se consideră numerele complexe $z_k = x_k + iy_k$, $k = \overline{1,2}$. Arătaţi că*

$$\sqrt{x_1^4 + y_2^4} + \sqrt{x_2^4 + y_1^4} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Mihai Vijdeluc

Soluţie. Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz rezultă:

$$2(a^4 + b^2) \geq (a^2 + b^2)^2 \Rightarrow \sqrt{2(a^4 + b^4)} \geq a^2 + b^2,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R} \tag{$*$}$$

Avem $z_1 = x_1 + i\,y_1, z_2 = x_2 + i\,y_2$.
Folosind inegalitatea $(*)$ obţinem:

$$\sqrt{2(x_1^4 + y_2^4)} \geq x_1^2 + y_2^2 \text{ şi } \sqrt{2(x_2^4 + y_1^4)} \geq x_2^2 + y_1^2$$

Dacă le adunăm membru cu membru obţinem:

$$\sqrt{2(x_2^4 + y_2^4)} + \sqrt{2(x_2^4 + y_1^4)} \geq x_1^2 + y_2^2 + y_1^2 =$$
$$= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x_1^4 + y_2^4)} + \sqrt{(x_2^4 + y_1^4)} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Clasa a XI-a

1. *Dacă $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{h_n}{n}\right)^n$.*

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{h_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}\ln n + n\ln\left(1 + \frac{h_n}{n}\right)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(h_n - \frac{1}{2}\ln n\right) + \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln\left(1 + \frac{h_n}{n}\right) - \frac{h_n}{n}\right)}.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(h_n - \frac{1}{2}\ln n\right) = c$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{h_{n+1}-h_n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

şi din faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{h_n}{n}\right)-\dfrac{h_n}{n}}{\left(\dfrac{h_n}{n}\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Atunci limita cerută este egală cu $e^{c+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h_n^2}{n}} = e^c$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{h_n}{\sqrt{n}} = 0$.

2. *Dacă $m\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}^*$, iar A, B, C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor unui triunghi ABC, atunci*

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)^{(m+1)n} + \left(1+\frac{1}{\sin B}\right)^{(m+1)n} + \left(1+\frac{1}{\sin C}\right)^{(m+1)n} \geq$$
$$\geq \frac{1}{3^m}\left(3+2n\sqrt{3}\right)^{m+1}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Considerăm funcţia $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{\sin x}\right)^{m+1}$.
Se demonstrează că $f''(x) > 0$, $\forall\, x\in(0,\pi) \Rightarrow$ funcţia f este convexă.
Notăm cu E expresia din membrul stâng al inegalităţii şi aplicând Inegalitatea lui Jensen, se obţine

$$E \geq 3\frac{\left(\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right)^n + \left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right)^n + \left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right)^n\right)^{m+1}}{3^{m+1}}.$$

Din Inegalitatea lui Bernoulli avem că $\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right)^n \geq 1+\dfrac{n}{\sin A}$ şi analoagele, atunci

$$E \geq \frac{\left(3+n\left(\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\right)\right)^{m+1}}{3^n}.$$

Considerăm funcţia $g:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sin x}$. Se demonstrează că $g''(x) > 0$, $\forall\, x\in(0,\pi) \Rightarrow$ funcţia g este convexă.

Aplicând Inegalitatea lui Jensen, se obţine

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{3}{\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)}=2\sqrt{3}\,,$$

de unde rezultă concluzia. Egalitate se obţine în cazul triunghiului echilateral şi $n=1$.

3. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin* $x_0=2$ *şi* $x_{n+1}=x_n^2-x_n+1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_0\cdot x_1\cdot\dots\cdot x_n}{x_{n+1}}\right)^{n^n}$.

Florin Bojor

Soluţie. Deoarece $x_{n+1}-x_n=(x_n-1)^2\geq 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător. Presupunem că este mărginit superior, atunci el va fi convergent la $\ell\geq 2$. trecând la limită în relaţia de recurenţă, se obţine

$$\ell=\ell^2-\ell+1\Leftrightarrow(\ell-1)^2=0\Leftrightarrow\ell=1(F).$$

În consecinţă, avem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.
Relaţia de recurenţă poate fi scrisă

$$x_{n+1}-1=x_n(x_n-1)\Leftrightarrow x_n=\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1},\ \forall\, n\geq 0.$$

Atunci

$$x_0\cdot x_1\cdot\dots\cdot x_n=\frac{x_1-1}{x_0-1}\cdot\frac{x_2-1}{x_1-1}\cdot\dots\cdot\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}=x_{n+1}-1$$

şi limita devine

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}}\right)^{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{x_{n+1}}\right)^{n^n}\overset{1^\infty}{=}e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{x_{n+1}}}.$$

Aplicând Criteriul Raportului se obţine

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{x_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{x_{n+2}}\cdot\frac{x_{n+1}}{n^n}\right]=\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{x_{n+1}-1+\dfrac{1}{x_{n+1}}}=\\&=e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_{n+1}}=\\&=e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{x_{n+1}-x_n}=e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2-2x_n+1}=0.\end{aligned}$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}}\right)^{n^n}=1.$

4. *Fie* $n\in\mathbb{N}$. *Să se rezolve în* $M_2(\mathbb{Z})$ *ecuaţia* $X^{2n+1}+X=I_2$.

Florin Bojor

Soluţie. Fie $A \in M_2(\mathbb{Z})$ soluţie a ecuaţiei date, atunci

$$A^{2n+1} + A = I_2 \tag{1}$$

Scriem relaţia (1) sub forma $A(A^{2n} + I_2) = I_2$ şi aplicând determinantul la această relaţie se obţine

$$\det(A) \cdot \det(A^{2n} + I_2) = 1.$$

Dar $\det(A) \in \mathbb{Z}$ şi $\det(A^{2n} + I_2) \geq 0$, atunci $\det(A) = 1$.
Scriind relaţia (1) sub forma $A^{2n+1} = I_2 - A$ şi aplicând determinantul, se obţine $\det(I_2 - A) = 1$.
Alegând $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, se obţine $ad - bc - (a + d) = 0 \Rightarrow tr(A) = 1$. Prin urmare, matricea A verifică relaţia $A^2 - A + I_2 = O_2$. Înmulţind relaţia anterioară cu $A + I_2$ se obţine $A^3 = -I_2 \Rightarrow A^6 = I_2$.

Dacă $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci

$$(1) \Leftrightarrow A^{6k+1} + A = I_2 \Leftrightarrow 2A = I_2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} I_2 \notin M_2(\mathbb{Z});$$

Dacă $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci

$$(1) \Leftrightarrow A^{6k+3} + A = I_2 \Leftrightarrow A = 2I_2 \Rightarrow A^3 = 8I_2 (F);$$

Dacă $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci

$$(1) \Leftrightarrow A^{6k+5} + A = I_2 \Leftrightarrow -A^2 + A = I_2 \Leftrightarrow A^2 - A + I_2 = O_2.$$

Prin urmare, o matrice $A \in M_2(Z)$ verifică ecuaţia dacă şi numai dacă $n = 3k+2$ şi $A^2 - A + I_2 = O_2$.
Printr-un calcul simplu, se obţine că soluţia ecuaţiei $A^2 - A + I_2 = O_2$ în $M_2(\mathbb{Z})$ este

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & \dfrac{1 + a - a^2}{k} \\ k & 1 - a \end{pmatrix} \middle| a, k \in \mathbb{Z}, k \middle| (1 + a - a^2) \right\}.$$

5. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit astfel:

$$1,\ \underbrace{2, 2, 2, 2}_{2^2\ termeni},\ \underbrace{3, 3, \ldots 3}_{3^2\ termeni}, \underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{4^2\ termeni}, \ldots\ .$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Se observă că $a_1 = 1$, $a_n = 2$ pentru $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, $a_n = 3$ pentru $n \in \{6, 7, \ldots, 14\}$.
În general, $a_n = k$ pentru $1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 < n \leq 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2$.
Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 < n \leq 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2,$$

deci $\dfrac{a_n}{\sqrt[3]{n}} = \dfrac{k}{\sqrt[3]{n}}$ şi cum

$$\sqrt[3]{\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}} < \sqrt[3]{n} \leq \sqrt[3]{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}},$$

găsim că

$$\frac{k}{\sqrt[3]{\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}}} < \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{k}{\sqrt[3]{\dfrac{(k-1)k(2k-1)}{6}}}.$$

Cum pentru $n \to \infty$, avem că şi $k \to \infty$, trecând la limită în relaţia precedentă, obţinem că (teorema cleştelui)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sqrt[3]{3}.$$

6. *Fără a folosi derivate, să se determine $a > 0$ ştiind că*

$$1 + 4^x + 9^x \geq 2^x + 3^x + a^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Pentru $x > 0$, relaţia din ipoteză se scrie:

$$(2^x - 1) + (3^x - 1) + (a^x - 1) \leq (4^x - 1) + (9^x - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{a^x - 1}{x} \leq \frac{4^x - 1}{x} + \frac{9^x - 1}{x}.$$

Trecând la limită pentru $x \to 0$, $x > 0$, obţinem:

$$\ln 2 + \ln 3 + \ln a \leq \ln 4 + \ln 9 \Leftrightarrow 6a \leq 36 \Leftrightarrow a \leq 6.$$

Procedând în mod analog pentru $x < 0$, găsim că $a \geq 6$, deci $a = 6$.
Se verifică faptul că $a = 6$ este soluţie.

7. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale, astfel încât*

$$|(1+x)^{a_1} + (1+x)^{a_2} + \cdots + (1+x)^{a_n} - n| \leq x^2, \quad \forall\, x \in (-1, \infty).$$

Să se demonstreze că $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Din ipoteză rezultă că:

$$|(1+x)^{a_1} - 1 + (1+x)^{a_2} - 1 + \cdots + (1+x)^{a_n} - 1| \leq x^2,\ \forall\, x > -1 \Leftrightarrow$$
$$\left|\frac{(1+x)^{a_1} - 1}{x} + \frac{(1+x)^{a_2} - 1}{x} + \cdots + \frac{(1+x)^{a_n} - 1}{x}\right| \leq \frac{x^2}{|x|},\ \forall\, x > -1, x \neq 0.$$

Trecând la limită pentru $x \to 0$, găsim că $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq 0$, deci

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0.$$

8. *Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $A \neq^t A$ şi fie $B =^t A - A$.*
a) Să se calculeze $tr(B^{2015})$.
b) Să se arate că există un unic $\alpha > 0$, cu $\det(\alpha I_3 - B^*) = 0$.

Dana Heuberger

Soluţie. *a)* Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Atunci, $B = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$, unde $x = b - d$, $y = c - g$ şi $z = f - h$.
Avem $\det(B) = 0$ şi deoarece $A \neq^t A$, $tr(B^*) \overset{not}{=} \alpha = x^2 + y^2 + z^2 > 0$.
Din relaţia Cayley-Hamilton rezultă $B^3 = \alpha \cdot B$. Prin inducţie deducem că, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $B^{2k+1} = \alpha^k \cdot B$ şi $B^{2k+2} = \alpha^k \cdot B^2$.
Aşadar $B^{2015} = \alpha^{1007} \cdot B$, deci $tr(B^{2015}) = 0$.

b) Avem $B^* = \begin{pmatrix} z^2 & -yz & xz \\ -yz & y^2 & -xy \\ xz & -xy & x^2 \end{pmatrix}$.

Atunci,

$$tr((B^*)^*) = \begin{vmatrix} z^2 & -yz \\ -yz & y^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z^2 & xz \\ xz & x^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$p_{B^*}(x) = \det(x \cdot I_3 - B^*) = x^3 - tr(B^*)x^2 + tr((B^*)^*)x - \det(B^*),$$

aşadar $p_{B^*} = x^2(x - \alpha)$ are rădăcinile $x_1 = x_2 = 0$ şi $x_3 = \alpha > 0$.

9. *Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm cu $S(X)$ suma tuturor elementelor sale. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât pentru orice $k = \overline{1,n}$, $S(A^k) = n(n-1)^k$.*
a) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $S(A^k) = n(n-1)^k$.
b) Să se dea un exemplu de astfel de matrice.

Dana Heuberger

Soluţie. Relaţia Cayley-Hamilton este:

$$A^n - \sigma_{n-1} \cdot A^{n-1} + \sigma_{n-2} \cdot A^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_1 \cdot A + (-1)^n \sigma_0 \cdot I_n = 0_n.$$

Pentru $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, înmulţim această relaţie cu A^{m+1-n} şi obţinem:

$$A^{m+1} - \sigma_{n-1} \cdot A^m + \sigma_{n-2} \cdot A^{m-1} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_1 \cdot A^{m-n+2} + (-1)^n \sigma_0 \cdot A^{m-n+1} = 0_n$$

Avem:

$$S(A^{m+1}) = \sigma_{n-1} \cdot S(A^m) - \cdots + (-1)^n \sigma_1 \cdot S(A^{m-n+2}) \cdots + (-1)^{n+1}\sigma_0 \cdot S(A^{m-n+1})$$

Folosind relaţia precedentă şi principiul inducţiei noetheriene, rezultă concluzia.

b) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B - C$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

şi $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Deoarece pentru orice $s \in \mathbb{N}$, $B \cdot C^s = C^s \cdot B = B$, folosind binomul lui Newton obţinem:

$$A^k = (B - c)^k = \frac{1}{n} \cdot \left((n-1)^k - (-1)^k\right) \cdot B + (-1)^k \cdot C^k.$$

Rezultă că

$$S(A^{2t}) = \frac{1}{n}\left((n-1)^{2t} - 1\right) \cdot S(B) + S(C^{2t}) = n \cdot (n-1)^{2t}$$

şi

$$S(A^{2t+1}) = \frac{1}{n}\left((n-1)^{2t+1} + 1\right) \cdot S(B) - S(C^{2t+1}) = n(n-1)^{2t+1}.$$

10. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux, iar M mulţimea zerourilor reale ale lui f. Dacă $sgn(f(a)) = sgn(f(b)) \in \{-1, 1\}$ şi $card(M) = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, demonstraţi că f are cel puţin un punct de extrem care aparţine lui M.*

Gotha Güntter

Soluţie. $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}\}$ cu $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1} < b$.
Să presupunem că nici unul dintre punctele mulţimii M nu este punct de extrem local. Rezultă $\forall V \in V_{x_i}$, $\exists\, x, y \in V \cap [a,b]$ a.î. $0 = f(x_i) < f(x)$ şi $0 = f(x_i) > f(y)$, $i = \overline{1, 2n+1}$. Înseamnă că f îşi schimbă semnul de fiecare dată când se anulează. Cum f are proprietatea lui Darboux, deducem că îşi va schimba semnul exact de $2n+1$ ori. Aşadar, după ultima schimbare de semn, semnul funcţiei va fi $(-1)^{2n+1}\mathrm{sgn}(f(a)) = -\mathrm{sgn}(f(a))$. Deducem că $\mathrm{sgn}(f(b)) = -\mathrm{sgn}(f(a))$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza. Astfel, presupunerea este falsă, deci există cel puţin un punct de extrem local ce aparţine lui M.

11. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că există o unică matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^n = I_n$ şi $\det(I_n + A + A^2 + \dots + A^n) \neq 0$.*

Gotha Güntter

Soluţie.

$$\det(I_n+A+A^2+\cdots+A^{n-1})\neq 0 \Leftrightarrow rang(I_n+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=n.$$

Din inegalitatea lui Sylvester obţinem

$$\begin{aligned}0 &= rang\left[(A-I_n)(I_n+A+A^2+\cdots+A^{n-1}\right]\geq\\ &\geq rang(A-I_n)+rang(I_n+A+A^2+\cdots+A^{n-1})-n=\\ &= rang(A-I_n).\end{aligned}$$

Deducem că $rang(A-I_n)=0 \Leftrightarrow A-I_n=0_n \Leftrightarrow A=I_n$.
Concluzia se impune.

12. *Demonstraţi că există un unic şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea*

$$e^{x_n}-x_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\,,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)!(x_n-1)$.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Considerăm funcţia $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=e^x-x$. Se constată că f este continuă şi bijectivă. Cum relaţia dată se scrie $f(x_n)=E_n-1$, unde $E_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$, $n\in\mathbb{N}^*$, deducem că există un unic şir $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n=f^{-1}(E_n-1)$ şi că

$$\lim_{n\to\infty}x_n=f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}E_n-1\right)=f^{-1}(e-1)=1.$$

Putem scrie

$$\begin{aligned}(n+1)!(x_n-1) &= (n+1)!\left[f^{-1}(E_n-1)-1\right]=\\ &= (n+1)!\left[f^{-1}(E_n-1)-f^{-1}(e-1)\right]=\\ &= \frac{f^{-1}(E_n-1)-f^{-1}(e-1)}{(E_n-1)-(e-1)}(n+1)!(E_n-e).\end{aligned}$$

Cum f^{-1} satisface condiţiile teoremei lui Lagrange pe intervalul $[E_n-1,e-1]$, deducem că există $c_n\in(E_n-1,e-1)$ astfel încât

$$\frac{f^{-1}(E_n-1)-f^{-1}(e-1)}{E_n-e}=(f^{-1})'(c_n).$$

Ţinând cont că $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=e-1$, obţinem:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{(f^{-1})(E_n-1)-f^{-1}(e-1)}{E_n-e}=\lim_{n\to\infty}(f^{-1})'(c_n)=\\ &=(f^{-1})'(e-1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{e-1}\,.\end{aligned}$$

Aplicând Stolz-Cesaro, cazul $\frac{0}{0}$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)!(E_n-e)=\lim_{n\to\infty}\frac{E_n-e}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{E_{n+1}-E_n}{\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{-n+1}=-1.$$

Atunci limita cerută este: $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)!(x_n-1)=\frac{-1}{e-1}$.

13. *Fie $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ cu $AB=BA$, $AC=CA$ şi $A+B+C=O_2$. Să se arate că $\det(A^4+B^4+C^4)\geq 0$.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie.

$$BC=B(-A-B)=-BA-B^2=-AB-B^2=CB.$$

Atunci, din $A+B+C=O_2$, rezultă $A^2+B^2+C^2=-2(AB+BC+CA)$ şi

$$\begin{aligned}A^4+B^4+C^4&=(A^2+B^2+C^2)^2-2(A^2B^2+B^2C^2+C^2A^2)=\\&=(A^2+B^2+C^2)^2-2\left[(AB+BC+CA)^2-2ABC(A+B+C)\right]=\\&=(A^2+B^2+C^2)^2-2(AB+BC+CA)^2=\\&=(A^2+B^2+C^2)^2-2\left[\frac{1}{2}(A^2+B^2+C^2)\right]^2=\\&=\frac{1}{2}(A^2+B^2+C^2)^2.\end{aligned}$$

14. *Determinaţi funcţiile derivabile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu proprietatea*

$$f'(x)=f(x)+\frac{e^{2x}}{f(x)},\quad \forall\, x\in(0,\infty).$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$. Din ipoteză obţinem:

$$e^xg(x)+e^xg'(x)=e^xg(x)+\frac{e^{2x}}{e^xg(x)},\ \forall\, x\in(0,\infty).$$

Efectuând calculele, deducem că $g'(x)\cdot g(x)=1$, $\forall\, x>0$, adică $\left(\frac{1}{2}g^2(x)\right)'=1$, $\forall\, x>0$. Deci

$$\frac{1}{2}g^2(x)=x+\frac{c}{2},\quad \forall\, x>0.$$

Cum $g(x)>0$, $\forall\, x>0$, rezultă $g(x)=\sqrt{2x+c}$, $c\geq 0$.
Funcţia cerută este $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=e^x\sqrt{2x+c}$, $c>0$.

15. *Fie $p \in \mathbb{R}_+^*$ fixat şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 \in (0,1)$, iar $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{p+1} + px_n}{p+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n+2015}}$.*

Adrian Pop

Soluţie. Se demonstrează prin inducţie că $x_n \in (0,1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
$x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n(x_n^p - 1)}{p+1} < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strict descrescătoare $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell \in [0,1)$.

Din ipoteză $\Rightarrow \ell = \dfrac{\ell^{p+1} + p\,\ell}{p+1} \Rightarrow \ell(\ell^p - 1) = 0 \Rightarrow \ell = 0$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n^p + p}{p+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{p+1}{p}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+2015}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} \cdot \cdots \cdot \frac{x_{n+2014}}{x_{n+2015}} \right) = \left(\frac{p+1}{p} \right)^{2015}.$$

Clasa a XII-a

1. *Dacă $a \in (0,\infty)$, $b \in (1,\infty)$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ sunt funcţii continue, astfel încât f este funcţie impară, iar $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = -g(x)$, $\forall\, x > 0$, să se calculeze*

$$\int_{\sqrt{a^2+1}-a}^{\sqrt{a^2+1}+a} \frac{1}{(x^2+1)(b^{f(g(x))}+1)}\, dx.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Notând cu I integrala de calculat, cu schimbarea de variabilă $t = \dfrac{1}{x}$, obţinem:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{a^2+1}-a}^{\sqrt{a^2+1}+a} \frac{1}{(x^2+1)(b^{f(g(x))}+1)}\, dx = \\ &= \int_{\sqrt{a^2+1}+a}^{\sqrt{a^2+1}-a} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(b^{f\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)}+1\right)} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \\ &= \int_{\sqrt{a^2+1}-a}^{\sqrt{a^2+1}+a} \frac{1}{(x^2+1)\left(b^{-f(g(x))}+1\right)}\, dx = \\ &= \int_{\sqrt{a^2+1}-a}^{\sqrt{a^2+1}+a} \frac{b^{f(g(x))}}{(x^2+1)\left(b^{f(g(x))}+1\right)}\, dx, \end{aligned}$$

deci

$$2I = \int_{\sqrt{a^2+1}-a}^{\sqrt{a^2+1}+a} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{a^2+1}+a\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{a^2+1}-a\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)-\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)}{1+\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)\cdot\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)}\right) = \operatorname{arctg} a.$$

Atunci $I = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} a$.

2. *Să se calculeze* $\displaystyle\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{5\cdot x^{2n}+4\cdot x^n+3}{(1+x^2)(x^{2n}+x^n+1)}dx$*, unde* $n \in \mathbb{N}^*$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $t = \dfrac{1}{x}$, obţinem:

$$I = \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{5x^{2n}+4x^n+3}{(1+x^2)(x^{2n}+x^n+1)}\,dx = \int_{2+\sqrt{3}}^{2-\sqrt{3}} \frac{5+4t^n+3t^{2n}}{(t^2+1)(t^{2n}+t^n+1)}\,dt =$$

$$= \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{5+4x^n+3x^{2n}}{(x^2+1)(x^{2n}+x^n+1)}\,dx =$$

$$= \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{8(x^{2n}+x^n+1)-(5x^{2n}+4x^n+3)}{(x^2+1)(x^{2n}+x^n+1)}\,dx =$$

$$= 8\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx - I,$$

deci

$$I = 4\operatorname{arctg} x\Big|_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} = 4\left(\operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right) - \operatorname{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)\right) =$$

$$= 4\operatorname{arctg}\left(\frac{2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)}{1+\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\right) = 4\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

3. *Să se determine funcţiile continue* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *care verifică relaţia*

$$\int_0^{2\pi} (f^2(x) + 2\cos x F(x)dx = -\pi,$$

unde F *este o primitivă a lui* f.

Florin Bojor

Soluţie. Deoarece

$$\int_0^{2\pi} \cos x F(x)dx = \sin x F(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x f(x)dx = -\int_0^{2\pi} \sin x f(x)dx,$$

iar $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \pi$, relaţia din ipoteză devine:

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \sin x)^2\,dx = 0.$$

Cum funcţia $f(x) - \sin x$ este continuă, rezultă că $f(x) = \sin x$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$.

4. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietatea că $\max(f, g)$ are primitive pe $\mathbb{R}$. Rezultă în mod necesar că f şi g au primitive?*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Răspunsul este nu. Într-adevăr, luând

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \left|\cos\dfrac{1}{x}\right|, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases},$$

avem că $\max(f, g) = g$ are primitive pe $\mathbb{R}$, dar funcţia f nu are prmitive pe $\mathbb{R}$.

Observaţie. Se putea lua

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

5. *Fie n un număr natural, $n \geq 2$ şi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât $f(0) \geq 0$ şi $\int_0^1 e^{2f(x)}dx = 1 + \dfrac{2}{n^2}$. Să se arate că există $c \in [0, 1]$ astfel încât $f(c) = c^{n^2-1}$.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Deoarece $e^x \geq 1 + x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, avem:

$$1 + \frac{2}{n^2} = \int_0^1 e^{2f(x)}dx \geq \int_0^1 (2f(x) + 1)dx = 2\int_0^1 f(x)dx + 1,$$

de unde

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{n^2}\,. \tag{1}$$

Cum $\int_0^1 x^{n^2-1}dx = \dfrac{1}{n^2}$, folosind (1), deducem că

$$\int_0^1 \left(f(x) - x^{n^2-1}\right) dx \leq 0.$$

Atunci există $a \in [0, 1]$ astfel încât

$$f(a) - a^{n^2-1} \leq 0. \tag{2}$$

Funcţia $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^{n^2-1}$ este continuă şi $g(0)\cdot g(a)\le 0$, deci există $c\in[0,a]\subset[0,1]$ astfel încât $g(c)=0$.

6. *Fie $a>0$ şi $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi cu derivata continuă. Să se determine funcţia continuă $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ având proprietăţile:*

i) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f^2(x)dx=\int_{-a}^{a}(g'(x))^2dx;$

ii) $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt=2g(x),\ \forall\, x\in[-a,a].$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Dacă F este o primitivă pentru f, din (ii) rezultă că:

$$F(x)-F(-x)=2g(x),\ \forall\, x\in[-a,a]\Rightarrow$$
$$g(x)+f(-x)=2g'(x),\ \forall\, x\in[-a,a]. \tag{1}$$

Cum g este derivabilă şi impară, rezultă că funcţia g' este pară. Atunci din (1) deducem că $f(x)=g'(x)$, $x\in[-a,a]$, este o soluţie pentru (1).

Fie funcţia $h:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-g'(x)$. Atunci

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} h^2(x)dx&=\int_{-a}^{a}\left(f^2(x)+g'^2(x)-2f(x)g'(x)\right)dx=\\&\overset{ii)}{=}2\int_{-a}^{a} g'^2(x)dx-2\int_{-a}^{a} f(x)g'(x)dx\end{aligned} \tag{2}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}y&\overset{not}{=}\int_{-a}^{a} f(x)g'(x)dx\underset{-x=t}{=}\int_{a}^{-a} f(-t)g'(-t)(-dt)\overset{(1)}{=}\\&=\int_{-a}^{a}(2g'(t)-f(t))g'(t)dt=\\&=2\int_{-a}^{a}(g'(t))^2dt-\int_{-a}^{a} f(t)g'(t)dt,\end{aligned}$$

rezultă $y=\displaystyle\int_{-a}^{a}(g'(t))^2dt$. Folosind acum (2), deducem că $\displaystyle\int_{-a}^{a} h^2(x)dx=0$, de unde $h\equiv 0$, adică $f=g'$ este unica funcţie care verifică relaţiile din problemă.

7. *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel integru. Pentru $m\in\mathbb{N}^*$, notăm $m_A=\underbrace{1_A+1_A+\cdots+1_A}_{de\ m\ ori}$. Dacă există $n,k,t\in\mathbb{N}^*$, cu n par, k,t impare, $k\neq t$, $(k,t)=1$, astfel încât*

$$\forall\, a,b\in A,\quad (k_A\cdot a+t_A\cdot b)^n=t_a\cdot a^n+k_a\cdot b^n,$$

atunci să se arate că $\forall\, a,b\in A$, $(a+b)^n=a^n+b^n$.

Dana Heuberger

Soluţie. Notăm cu $(*)$ relaţia din ipoteză.

Pentru $a = 1_A$ şi $b = 0_A$ în $(*)$, obţinem $k_A^n = t_A$.
Pentru $a = 0_A$ şi $b = 1_A$ în $(*)$, obţinem $t_A^n = k_A$.
Pentru $a = 1_A$ şi $b = -1_A$ în $(*)$, obţinem

$$(k_a - t_A)^n = t_A + k_A(-1)^n = t_A + k_A$$

Pentru $a = -t_A$ şi $b = k_A - t_A$ în $(*)$, obţinem

$$t_A^{2n} = t_A \cdot t_A^n + k_A(k_A - t_A)^n \overset{(1)}{\Leftrightarrow} k_A^2 = k_A \cdot t_A + k_A(t_A + k_A) \tag{2}$$

Deoarece $(k, t) = 1$, există $s, u \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k \cdot s + t \cdot u = 1$.
Obţinem $1_A = k_A \cdot s_A + t_A \cdot u_A = t_A^n \cdot s_A + t_A \cdot u_A$, deci t_A este inversabil în A. Analog rezultă că şi k_A este inversabil în A.
Din relaţia (2) deducem că $2 \cdot k_A \cdot t_A = 0_A$. Deoarece k_A şi t_A sunt inversabile, rezultă că $1_A + 1_A = 0$, deci inelul are caracteristica 2.
Numerele k şi t fiind impare, obţinem $k_A = 1_A = t_A$, iar ipoteza devine:

$$\forall\, a, b \in A,\ (a + b)^n = a^n + b^n.$$

8. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel fără divizori ai lui zero, cu $1 + 1 \neq 0$. Pentru $a, b \in A$, notăm cu $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$, comutatorul acestora. Fie $f \in End(A)$, astfel încât $\forall\, x, y \in A$, $[x, f(y)] = [f(x), y]$.*

a) Să se arate că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in A$, $[x^n, f(x)] = 0$.

b) Dacă $\forall\, x \in A \backslash \{0, 1\}$, $f(x) \neq x$ şi f este un morfism surjectiv, să se arate că inelul este comutativ.

Dana Heuberger

Soluţie. Notăm cu $(*)$ relaţia din ipoteză verificată de f.

a) Pentru orice $x \in A$, $[x, f(x)] \overset{(*)}{=} |f(x), x| = -[x, f(x)]$, deci $2[x, f(x)] = 0$. Deoarece inelul nu are divizori ai lui zero şi nici caracteristica 2, obţinem că

$$\forall\, x \in A,\ [x, f(x)] = 0. \tag{1}$$

Apoi, pentru orice $x, y \in A$, avem:

$$\begin{aligned}[x, f(y)] \cdot f(y) &\overset{(*)}{=} [f(x), y]f(y) = (f(x)y - y \cdot f(x))f(y) = \\ &= f(x)y \cdot f(y) - y \cdot f(x) \cdot f(y) \overset{(1)}{=} f(x) \cdot f(y)y - y \cdot f(x) \cdot f(y) = \\ &= [f(x) \cdot f(y), y],\end{aligned}$$

aşadar

$$\forall\, x, y \in A,\ [x, f(y)]f(y) = [f(x \cdot y), y] \overset{(*)}{=} [x \cdot y, f(y)] \tag{2}$$

Pentru $k \in \mathbb{N}$, înlocuind x cu x^k şi y cu x în (2), obţinem:

$$\forall\, x \in A,\ [x^k, f(x)] \cdot f(x) = [x^{k+1}, f(x)]$$

Folosind (1) şi relaţia precedentă, se arată uşor, prin inducţie, că

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in A,\ [x^n, f(x)] = 0.$$

b) Fie $a \in A$. Deoarece funcţia f este surjectivă, există $b \in A$ astfel ca $f(b) = a$. Atunci, pentru orice $x \in A$, avem:

$$\begin{aligned}[bx, f(x)] &= [f(bx), x] = f(b) \cdot f(x)x - x \cdot f(b) \cdot f(b) \overset{(1)}{=} \\ &= f(b)x \cdot f(x) - x \cdot f(b) \cdot f(x) = [f(b), x] \cdot f(x) = \\ &= [a, x] \cdot f(x)\end{aligned}$$

şi

$$[bx, f(x)] = b \cdot x \cdot f(x) - f(x) \cdot b \cdot x \overset{(1)}{=} b \cdot f(x)x - f(x) \cdot b \cdot x =$$
$$= [b, f(x)] \cdot x \overset{(*)}{=} [f(b), x]x = [a, x] \cdot x.$$

Obţinem că

$$\forall\, a, x \in A,\ [a, x] \cdot (f(x) - x) = 0.$$

Deoarece inelul nu are divizori ai lui zero, rezultă că

$$\forall\, a, x \in A,\ [a, x] = 0,$$

deci $\forall\, a, x \in A,\ a \cdot x = x \cdot a$, aşadar inelul este comutativ.

9. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\sum\limits_{1\le i<j\le n} \frac{i}{i^2+j^2}}$.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Avem:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sum\limits_{1\le i<j\le n} \frac{i}{i^2+j^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{1\le i<j\le n} \frac{i}{i^2+j^2}} = \\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n} \frac{i}{i^2+j^2}}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n+1} \frac{i}{i^2+j^2} - \sum\limits_{1\le i<j\le n} \frac{i}{i^2+j^2}}{n+1-n}} = \\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{i^2+(n+1)^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\frac{i}{n+1}}{\left(\frac{i}{n+1}\right)^2+1}} = \\ &= e^{\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx} = e^{\frac{1}{2} \ln 2} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

10. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *şi* $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *două funcţii continue. Să se arate că există* $c \in [a, b]$ *astfel încât:*

$$\frac{\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt}{b - a} = c.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b g(t)dt - x(b-a) \Rightarrow h$ continuă.
Din $a \le g(t) \le b \Rightarrow a(b-a) \le \int_a^b g(t)dt \le b(b-a)$, deci

$$h(a) = \int_a^b g(t)dt - a(b-a) \ge 0$$

şi

$$h(b) = \int_a^b f(t)dt - b(b-a) \le 0.$$

Din h continuă pe $[a, b]$ şi $h(a) \cdot h(b) \le 0$, rezultă că există $c \in [a, b]$ a.i. $h(c) = 0$, adică are loc concluzia.

11. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel nenul cu proprietatea că:*

$$x^3 + y^3 = xy + x + y + 1, \quad \forall\, x, y \in A^*.$$

Să se arate că A este corp cu două elemente.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Particularizând, obţinem:
$x = y = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow 1 + 1 = 0$
$x = y \Rightarrow 0 = x^2 + x + x + 1$, deci $0 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = -1 = 1$.
$x^2 = 1$, $\forall\, x \in A^* \Rightarrow x$ este inversabil;
$y = 1 \overset{ip}{\Rightarrow} x^3 + 1 = x + x + 1 + 1 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 = 1$, $\forall\, x \in A^*$.
Deci $\left.\begin{array}{l} x^3 = x^2,\ \forall\, x \in A^* \\ x^2 = \text{inversabil} \end{array}\right\|$ $\Rightarrow x = 1$. Deci $A = \{0, 1\}$ şi atunci A este corp.

12. *a) Arătaţi că nu există nici o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, astfel încât*

$$A^4 + 20A^2 + 3I_2 = O_2.$$

b) Daţi un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât

$$A^4 + 20A^2 + 3I_2 = O_2.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. a) Utilizând criteriul lui Eisenstein, polinomul

$$f = X^4 + 20X^2 + 3 \in \mathbb{Z}[X]$$

este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.
Dacă P_A este polinomul caracteristic al matricei A, atunci grad $P_A = 2$ şi coeficientul dominant este 1. Din teorema împărţirii cu rest, deducem că există $R, C \in \mathbb{Z}[X]$, $R = aX + b$, astfel încât

$$f(X) = P_A(X) \cdot C(X) + aX + b.$$

Atunci

$$f(A) = P_A(A) \cdot C(A) + aA + b \cdot I_2 = a \cdot A + b \cdot I_2.$$

Presupunem că există $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $f(A) = O_2$. Atunci $a \cdot A + b \cdot I_2 = O_2$.

Dacă $a = 0$, atunci $b = 0$, deci $f(X) \vdots P_A(X)$, contradicţie cu f ireductibil.

Dacă $a \neq 0$, atunci $A = \alpha \cdot I_2$, $\alpha = -\frac{b}{a}$. Din $f(A) = O_2 \Rightarrow (\alpha^4 + 20\alpha^2 + 3)I_2 = O_2 \Rightarrow (\alpha^2+10)^2 = 97 \Rightarrow \alpha^2+10 = \pm\sqrt{97} \Leftrightarrow \alpha^2 = \pm\sqrt{97}-10$, contradicţie cu $\alpha \in \mathbb{Q}$. Aşadar, presupunerea făcută este falsă.

b) Se poate lua $A = \alpha \cdot I_2$, unde $\alpha^2 = \pm\sqrt{97} - 10$, adică $\alpha = i \cdot \sqrt{10 \pm \sqrt{97}}$.

13. *Determinaţi funcţiile continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că*

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dan Bărbosu

Soluţie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluţie a ecuaţiei date. Cum f e continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că f e primitivabilă pe $\mathbb{R}$. Din condiţia enunţului, rezultă că $\forall F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$ are loc

$$F(x) = F\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + c,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Punând în (1) $x = 0 \Rightarrow c = 0$. Prin urmare, orice primitivă pe $\mathbb{R}$ a lui f verifică relaţia

$$F(x) = F\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Punem $x := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ în (2) şi găsim:

$$F(x) = F\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = F\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right) \tag{3}$$

Dacă în (3) punem $x := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, găsim

$$F(x) = F\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = F\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = F\left(\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\right) \tag{4}$$

Continuând procedeul, după n paşi se obţine (inducţie după n) că:

$$F(x) = F\left(\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{$*$}$$

In $(*)$ facem $n \to \infty$ şi ţinând seamă că F este continuă pe $\mathbb{R}$, găsim

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F\left(\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right) = F\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right) = F(0)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Aşadar $F(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (am notat $F(0) = a$).

Prin urmare, $f(x) = F'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deci unica soluţie a ecuaţiei este funcţia nulă.

14. *Fie funcţia* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *derivabilă, cu* f' *continuă şi astfel încât* $f(1) = 0$. *Să se determine cel mai mare număr real* M*, ştiind că*

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq M \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

Gabriela Boroica, C. N. "Vasile Lucaciu"

Soluţie. Avem

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x' f(x)dx = f(1) - \int_0^1 x\, f'(x)dx = -\int_0^1 x\, f(x)dx.$$

Folosind inegalitatea $C - B - S$, obţinem:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 = \left(\int_0^1 x\, f'(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^2 \cdot dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (f'(x))^2 dx,$$

deci

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 3 \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2,$$

deci $M \geq 3$.
Luăm $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [0,1]$. Avem:

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}$$

şi

$$M \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 = M \left(\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 \right)^2 = \frac{4M}{9}.$$

Din ipoteză deducem că $\dfrac{4}{3} \geq \dfrac{4M}{9} \Leftrightarrow M \leq 3$. Aşadar $M = 3$.

15. *Fie* $a, x_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie care admite primitive şi pentru care* $f(x_0) = a$. *Dacă fiecare punct al domeniului de definiţie al funcţiei este un punct de minim local pentru* f*, să se calculeze primitivele funcţiei* f.

Ludovic Longaver

Soluţie. Prin ipoteză $f(x) \geq f(y)$, $\forall\, x \in V_y$ şi $f(y) \geq f(x)$, $\forall\, y \in V_x$. Acestea implică $f(x) = f(y)$, $\forall\, x, y \in V_x \cap V_y$. Astfel, f este constantă pe subintervale. Dacă f admite primitive, atunci ea având şi proprietatea lui Darboux, este constantă. Deoarece $f(x_0) = a \Rightarrow f(x) = a$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Atunci $\displaystyle\int f(x)dx = ax + \mathcal{C}$.

Argument 17

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $x_k \in \mathbb{N}^*$, $k = \overline{1,n}$ şi pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$ notăm $p(m) = \prod\limits_{k=1}^{m}(x_k + x_{k+1})$, unde $x_{m+1} = x_1$. Dacă $n \geq 2017$, să se arate că

$$2015^{p(2015)} + 2017^{p(2017)} + 2014$$

se divide cu 2016.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{R}_+$, atunci

$$\frac{x^{2m+2}}{(y+z)^{m+1}(2x+y+z)^{m+1}} + \frac{y^{2m+2}}{(z+x)^{m+1}(x+2y+z)^{m+1}} +$$
$$+ \frac{z^{2m+2}}{(x+y)^{m+1}(x+y+2z)^{m+1}} \geq \frac{3}{2^{3m+3}}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

3. Dacă t_a este lungimea tangentei comune la cercurile descrise pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ca diametre, cuprinse între punctele de contact, t_b, t_c sunt analoagele lui t_a iar r este raza cercului înscris triunghiului ABC, atunci

$$\frac{(t_a^4 + t_b^4)^2}{t_c^2} + \frac{(t_b^4 + t_c^4)}{t_a^2} + \frac{(t_c^4 + t_a^4)^2}{t_b^2} \geq 324r^6.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

4. Fie $\triangle ABC$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, iar $BN \cap AC = \{O\}$. Dacă $\mathcal{A}_{\triangle AMN} = 2\mathcal{A}_{\triangle OMN}$, să se demonstreze că O se găseşte pe linia mijlocie a $\triangle ABC$ paralelă cu BC.

Florin Bojor

5. Fie p un număr natural nenul fixat. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există numerele naturale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ divizibile cu $p+1$, astfel încât

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Gheorghe Boroica

6. Să se determine toate mulţimile de numere naturale, A, finite, cu proprietatea că $\forall\, x, y \in A \Rightarrow x \cdot y - 2015x \in A$.

Gheorghe Boroica

7. Punctele $A, B, C, M, N, P, Q \in \mathcal{C}(0, r)$ astfel încât $O \notin Int\,\triangle ABC$; $\widehat{AM} \equiv \widehat{MC}$; $\widehat{AN} \equiv \widehat{NC}$; $M \in (\widehat{AB})$; $N \in \widehat{AC}$; $\widehat{AB} \equiv \widehat{BP}$; $B \in (\widehat{AP})$; $\widehat{AC} \equiv \widehat{CQ}$; $C \in (\widehat{AQ})$. Notăm $CN \cap AP = \{X\}$ şi $BM \cap AQ = \{Y\}$. Dacă $XY \| BC$ şi $AB \neq AC$, determinaţi $M(\sphericalangle BQC)$ şi $m(\sphericalangle NPM)$.

Petru Braica

8. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi de arie S. Arătaţi că

$$\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} + \sqrt{b^4 - b^2c^2 + c^4} + \sqrt{c^4 - c^2a^2 + a^4} \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{9}{2}\left(a^4 + b^4 + c^4\right) - 24S^2}.$$

Gotha Günter

9. Fie triunghiul ABC cu $\dfrac{\pi}{2} > A > B > C$ şi punctele $D \in (BC \backslash [BC]$, $E \in (CA \backslash [CA]$ şi $F \in (BA \backslash [BA]$, astfel încât $\mu(\widehat{ABE}) = \pi - 2B$, $\mu(\widehat{ACF}) = C$ şi $\mu(\widehat{FAD}) = A$. Să se arate că punctele D, E, F sunt necoliniare.

Dana Heuberger

10. Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic ABC avem:

$$R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \leq 2r\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right).$$

Ludovic Longaver

11. Să se demonstreze că, dacă într-un triunghi nedreptunghic ABC există relaţia

$$\operatorname{tg}^4 A + \operatorname{tg}^4 B + \operatorname{tg}^4 C = (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^2,$$

atunci triunghiul ABC este echilateral.

Ludovic Longaver

12. Punctul M se află pe cercul circumscris patrulaterului inscriptibil şi cu diagonalele perpendiculare $ABCD$. Dacă H_1, H_2, H_3, H_4 sunt ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, MCD respectiv MDA, atunci $H_1H_2H_3H_4$ este dreptunghi.

Nicolae Muşuroia

13. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, astfel încât $x+y+z+t=n$, atunci are loc inegalitatea

$$\sqrt{nx+yz+yt}+\sqrt{ny+xz+zt}+\sqrt{nz+tx+ty}+\sqrt{nt+xy+xz}\leq\frac{5n}{2}.$$

Adrian Pop

14. Fie $a, b, c, d > 0$ cu $abc^2+b^2cd+cda^2+d^2ab=4$. Arătaţi că

$$a^4+b^4+c^4+d^4+4abcd\geq 8.$$

(În legătură cu problema VIII.410 din R.M.T. nr. 2/2015)

Mihai Vijdeluc

15. Să se determine cel mai mic număr natural n pentru care

$$0,7<\left\{\sqrt[3]{n}\right\}<0,(7).$$

Mihai Vijdeluc

Clasa a X-a

1. Fie $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $z_k=a_k+i\cdot b_k\in\mathbb{C}$, $k=\overline{1,n}$, unde $a_k, b_k\in\mathbb{R}$ şi σ o permutare a mulţimii $\{1,2,\ldots,n\}$. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^4+b_{\sigma(k)}^4}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Să se rezolve în numere reale sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2 & =9 \\ 3^{x^4+y^2}+3^{x^2+y^4} & =2\cdot 3^{\frac{99}{4}}. \end{cases}$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

3. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $a>1$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n>1$ cu proprietatea $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=a^n$. Să se determine minimul expresiei

$$E=\log_{x_1}a+\frac{1}{2}\log_{x_2}^2 a+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\log_{x_n}^n a.$$

Florin Bojor

4. a) Să se demonstreze că

$$\sqrt{t \cdot x_1 + (1-t)x_2} \geq t\sqrt{x_1} + (1-t)\sqrt{x_2},\ \forall\, t \in (0,1),\ \forall\, x_1, x_2 \geq 0.$$

b) Să se rezolve ecuaţia

$$3\sqrt{10x+1} + 2\sqrt{3x+1} + \sqrt{6x+1} = 6\sqrt{7x+1}.$$

Meda Bojor

5. Fie $\triangle ABC$ astfel încât $m(\sphericalangle A) = 120^\circ$. Să se arate că $\dfrac{R}{r} \geq 1 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Când avem egalitate?

Gheorghe Boroica

6. Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Să se afle numărul funcţiilor $f : A_n \to A_n$, ştiind că acestea au exact două puncte fixe.

Gheorghe Boroica

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \to (0,2)$, $f(x) = \{x\} + \{2x\}$.
a) Să se arate că f nu este injectivă, dar este surjectivă.
b) Să se găsească o funcţie $g : (0,2) \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, astfel încât

$$\forall\, x \in (0,2),\ (f \circ g)(x) = x.$$

c) Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = x$, pentru $x \in (0,1)$.

Dana Heuberger

8. Să se arate că

$$2\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{15} < \left(2\sqrt{2}+1\right)\sqrt{3}^{\sqrt{2}} + \left(3\sqrt{2}+1\right)\sqrt{5}^{\sqrt{2}}.$$

Dana Heuberger

9. Să se arate că, oricum am alege şapte numere din intervalul $[-1, 1]$, putem găsi două numere a şi b pentru care $\sqrt{3} \leq 2\left(a \cdot b + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right) < 2$.

Ludovic Longaver

10. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, $\varepsilon^3 = 1$ şi ABC un triunghi nedreptunghic. Să se arate că

$$a(\cos A + \cos B \cdot \cos C) + b \cdot \varepsilon(\cos B + \cos C \cdot \cos A) + c \cdot \varepsilon^2(\cos C + \cos A \cdot \cos B) = 0.$$

Ludovic Longaver

11. Se dau funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $g(x) = 2 + \sin(x - 2)$. Să se rezolve ecuaţia $f(f(x)) = g(g(x))$.

Ludovic Longaver

12. Să se rezolve ecuaţia:

$$2^x \cdot 3^{1-x} + 2^{1-x} \cdot 3^x = x(1 - x) + 5.$$

Nicolae Muşuroia

13. Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABM şi CDP spre exterior şi BCN şi ADQ spre interior.
Să se arate că $MNPQ$ este paralelogram (eventual paralelogram degenerat).

Nicolae Muşuroia

14. Să se arate că, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi având raza cercului înscris egală cu unitatea, atunci

$$4(a + b + c) \leq abc.$$

Mihai Vijdeluc şi Vasile Ienuţaş

15. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral, dacă şi numai dacă avem inegalitatea

$$b \cdot \sqrt{ac} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \leq \ell_a \cdot \ell_c$$

$(\ell_a, \ell_c$ sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor A, respectiv $C)$.

Mihai Vijdeluc

Clasa a XI-a

1. Dacă $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^*$, să se calculeze

$$A(1) \cdot \prod_{k=1}^{n} A(x_k),\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_k \in \mathbb{R}^*,\ k = \overline{1, n}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Dacă $m \in \mathbb{N}$, să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} \right)^{m+1} - \left(\sqrt[n]{n!} \right)^{m+1} \right) \sin^m \frac{\pi}{n}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

3. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ o funcţie pentru care există $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}_+^*$. Atunci există $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=b\in\mathbb{R}$, dacă şi numai dacă există

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^x=c\in\mathbb{R}^*$$

şi avem $b=a\cdot\ln c$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

4. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(2-\dfrac{1}{\cos\dfrac{a}{2^k}}\right)$ unde $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Florin Bojor

5. Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ care au determinantul egal cu 1 şi verifică relaţia $(A^*)^2+A=2I_2$, unde A^* este adjunct matricei A.

Florin Bojor

6. Fie a un număr real, astfel încât $a>2$. Să se arate că nu există $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $A^3-3A+aI_3=O_3$ şi $\det(A+2I_3)\geq 0$.

Gheorghe Boroica

7. Fie $A\in M_{2p+1}(\mathbb{Z})$, $p\in\mathbb{N}^*$ şi $m,n\in\mathbb{Z}$. Să se arate că $m+n$ divide determinantul matrice $mA+nA^t$.

(Generalizarea problemei 26770, G.M. 5/2013)
Gheorghe Boroica

8. Există funcţii derivabile neconstante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea:
dacă $f'(x)\in\mathbb{Z}$, atunci $f(x)\in\mathbb{Z}$?

Gheorghe Boroica

9. Jocul 15-puzzle este reprezentat de un pătrat 4×4 care are inscripţionat aleator numerele $1,2,3,\ldots,15$ şi având un pătrat liber (notat cu #). Prin mutări succesive, (o mutare înseamnă o deplasare pe orizontală sau verticală a uneia dintre piesele aflate lângă pătratul liber, astfel încât să îl ocupe pe acesta) jocul se încheie atunci când numerele sunt aşezate crescător pe linii, de la stânga la dreapta, începând cu prima linie de sus. Se cere să se analizeze dacă există o posibilitate de a încheia jocul, dacă pe table se află poziţia descrisă pe pagina următoare.

Argument 17

4	8	3	15
10	11	1	9
2	5	13	12
6	7	14	#

Costel Chiteş

10. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 = I_3$. Aflaţi urma matricei A.

Gotha Güntter

11. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ numere reale, astfel încât

$$\left| k - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n}{n+i} \right)^{x_i} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt[k]{n}}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se demonstreze că $x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k = 0$.

Gotha Güntter

12. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $ABCD = I_n$.
a) Să se arate că $rang(BC + I_n) = rang(DA + I_n)$.
b) Să se arate că

$$rang(DA - I_n) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[rang(A + I_n) + rang(B + I_n) + rang(C + I_n) + rang(D + I_n) \right].$$

Dana Heuberger

13. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} \right).$$

Ludovic Longaver

14. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ două matice cu proprietăţile $A \cdot B = B \cdot A$,

$$\det(A + iB) = \det(A) - i\det(B);\ \det(A - iB) = \det(A) + i\det(B).$$

Să se demonstreze că $\det(A^3 + B^3) = \det^3(A + B)$.

Nicolae Muşuroia

15. Fie numerele $p, q, r > 0$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ care verifică relaţia
$$(pn+q)(a_{n+1}-a_n) = pa_n + r(pn+q+p)(pn+q),$$
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1 = (p+q)(r+1)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{prn^2}\right)^n$.

Adrian Pop

Clasa a XII-a

1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că dacă $x \cdot y = 1$, atunci $y \cdot x = 1$. Dacă $a, b \in A$ şi $a^2 \cdot (b^2+1) = b^2$, atunci:
$$(a+1)\cdot b^2 \cdot a = a \cdot (a+1) \cdot b^2.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

2. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie pară şi continuă pe $\mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}_+^*$, să se calculeze:
$$\int_{-a}^{a} \frac{x^3\,(f(x)+x)}{x^2+1}dx$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

3. a) Să se arate că există două funcţii primitivabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ h = \max\{f, g\} - \min\{f, g\}$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că există o infinitate de perechi $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, astfel încât funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ h = a \cdot \max\{f, g\} + b \cdot \min\{f, g\}$ are primitive pe $\mathbb{R}$, unde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii primitivabile.

Gheorghe Boroica

4. Fie ecuaţia $x^5 + 4x - 14 = 0,\ \ x \in \mathbb{C}$ şi r produsul părţilor reale ale rădăcinilor complexe nereale ale ecuaţiei date. Să se arate că $r \in \left(0, \dfrac{28}{3}\right)$.

Gheorghe Boroica

5. Să se determine numărul soluţiilor (x, y, z) ale ecuaţiei $x^4 + y^4 + z^8 + \hat{1} = \hat{0}$ în corpul $\mathbb{Z}_{17}$.

Dana Heuberger şi Marcel Ţena

6. Fie inelul integru $(A, +, \cdot)$, cu elementele neutre 0 şi 1. Notăm cu I mulţimea elementelor inversabile, cu N mulţimea elementelor neinversabile ale acestuia şi cu $N^* = N \backslash \{0\}$. Considerăm că inelul are proprietatea:

$$\forall\, x, y \in I, \quad x + y \neq 0 \;\Rightarrow\; x + y \in I.$$

Dacă $a \in I \backslash \{-1\}$, să se arate că funcţia $f_a : N^* \to N^*$, $f_a(x) = x + a + ax$ este bine definită şi bijectivă.

Dana Heuberger

7. Fie $D \subset \mathbb{R}$ un interval şi funcţia $f : D \to (0, \infty)$ derivabilă, cu derivata continuă.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{f(x) \cdot (2f'(x) + 1) + x \cdot (2 - f'(x))}{x^2 + f^2(x)}\, dx$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\sin x + \sin 2x + 2x - x \cdot \cos x}{2x^2 + 1 - \cos 2x}\, dx,\ x \in (0, \pi)$.

Ludovic Longaver, Liceul "Németh László"

8. Să determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $F(0) = 0$, astfel încât

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + F(x) \cdot \cos x = e^{\sin x}(2x \cdot \cos x + 1).$$

Nicolae Muşuroia

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii care verifică relaţia:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(e^{\sin x}\right) + f\left(e^{\cos x}\right) = F\left(e^{\cos x} - e^{\sin x}\right).$$

Să se arate că F nu poate fi o primitivă a lui f.

Nicolae Muşuroia

10. Fie $a > 1$. Să se calculeze

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^a \frac{x^{n+a}}{x^n + a} dx$$

Nicolae Muşuroia

11. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat. Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$x_n = \left((p + 1) \cdot n \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + \ldots + x^p}\, dx\right)^n$$

este mărginit.

Adrian Pop

12. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \ldots - \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} < \frac{\pi - 2}{4}$$
$$< \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \ldots - \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} + \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

Adrian Pop

13. Să se calculeze:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{arctg}\left(\frac{i}{n}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{j}{n}\right).$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu-Severin

14. Să se arate că:

$$\frac{\pi}{8} \le \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx \le \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Daniel Sitaru şi Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu-Severin

15. a) Fie $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie continuă, strict crescătoare, cu $f(0) = 0$. Dacă $a \in [0,\infty)$, $b \in Imf$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, atunci:

$$a^2 b^2 \le \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_0^a f(x) \, dx \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^b f^{-1}(y) \, dy \right)^2.$$

b) Să se arate că:

$$\frac{1}{1-e^2} \left(\int_0^1 e^{x^3} \, dx \right)^2 + \frac{1}{e^2} \left(\int_0^1 \sqrt[3]{\ln y} \, dy \right)^2 \ge 1.$$

Daniel Sitaru, Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu-Severin

Argument 17

Erată

• La pag. 83, problema 1, clasa a XI-a, în enunţ, în loc de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(1+\dfrac{h_n}{n}\right)^n$ se va scrie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{h_n}{n}\right)^n$.

Sumar