Revistă de matematică editată de Catedra de matematică
a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Municipiul **Baia Mare**

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana.heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *http://www.sincaibm.ro/*

ISSN 1582– 3660

Alternative pentru calculul unor limite

Dan Bărbosu

Abstract. The focus of the note is to present unitar methods for computing some limits.

Scopul notei este de a prezenta două metode unitare (diferite) pentru calculul următoarelor limite (problema 4.10, pag. 22, [3]):

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}\,, \tag{1}$$

$$l_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{\sqrt{k}}{n}\,, \tag{2}$$

$$l_3 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (2^{\frac{k}{n^2}} - 1). \tag{3}$$

Problemele enunţate sunt cazuri particulare ale următoarei probleme (P), propusă de domnul prof. univ. dr. Mircea Ivan de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca (problema 4.9, pag. 22, [3]).

(**P**) *Fie* $p \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 0$, *iar* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie ce admite derivate până la ordinul* p *inclusiv, continue pe* $[0,1]$. *Arătaţi că dacă*

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(p-1)}(0) = 0,$$

are loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^a}{n^{a+\frac{1}{p}}}\right) = \frac{f^{(p)}(0)}{p\,!(ap+1)}\,.$$

Soluţia problemei (P) (vezi [3], pag. 97-98) se bazează pe dezvoltarea funcţiei f în serie Mac-Laurin şi aplicarea criteriului cleştelui.
Alegând $f(x) = \sin x$, $a = p = 1$ se obţine problema (1):

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2} = \frac{f'(0)}{(1+1)\cdot 1!} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Pentru $f(x)=\sin^2 x$, $a=\dfrac{1}{2}$, $p=2$, se regăseşte problema (2):

$$l_2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{\sqrt{k}}{n}=\frac{f''(0)}{(1+1)\cdot 2!}=\frac{2\cos 0}{2\cdot 2!}=\frac{1}{2}.$$

Când $f(x)=2^x-1$, $a=p=1$, se regăseşte problema (3):

$$l_3=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2^{\frac{k}{n^2}}-1)=\frac{f'(0)}{(1+1)\cdot 1!}=\frac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt{2}.$$

Remarcăm frumuseţea şi generalitatea problemei (P), precum şi faptul că ea conţine şi valoarea limitei ce se cere calculată.

Vom încerca o altă rezolvare unitară a problemelor (1), (2), (3) care să nu facă apel la dezvoltarea în serie Mac-Laurin.

Urmând ideile din [1], să observăm că cele trei probleme prezentate cer calcularea limitei unui şir de numere reale $(b_n)_{n\in N^*}$, având termenul general

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}f(a_k(n)),\tag{4}$$

unde

$$a_k(n)>0,\ (\forall)\,k=\overline{1,n};\tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_k(n)=0,\ (\forall)\,k=\overline{1,n};\tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k(n)=l\in\mathbb{R},\tag{7}$$

iar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă cu proprietatea

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}.\tag{8}$$

E uşor de văzut că în problema (1) $f(x)=\sin x$, $a_k(n)=\dfrac{k}{n^2}$, în problema (2) $f(x)=\sin^2\sqrt{x}$, $a_k(n)=\dfrac{k}{n^2}$ iar în (3) $f(x)=2^x-1$, $a_k(n)=\dfrac{k}{n^2}$.

Se va încerca în continuare calculul limitei şirului (4).

Din condiţiile (6) şi (8) găsim că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a_k(n))}{a_k(n)}=a$, adică $(\forall)\,\varepsilon>0$ există rangul $N=N(\varepsilon)$, astfel că $(\forall)\,n>N$ au loc inegalităţile:

$$a-\varepsilon<\frac{f(a_k(n))}{a_k(n)}<a+\varepsilon.\tag{9}$$

Înmulţind inegalităţile (9) cu $a_k(n) > 0$ şi adunând inegalităţile obţinute, se obţine că $(\forall)\, n > N$ au loc:

$$a\sum_{k=1}^{n} a_k(n) - \varepsilon\sum_{k=1}^{n} a_k(n) < \sum_{k=1}^{n} f(a_k(n)) < a\sum_{k=1}^{n} a_k(n) - \varepsilon\sum_{k=1}^{n} a_k(n). \qquad (10)$$

Din (10), ţinând seama de (6), pentru $\varepsilon \to 0$ rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a_k(n)) = a\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k(n) = al. \qquad (11)$$

În cazul problemei (1) avem

$$a = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ a_k(n) = \frac{k}{n^2}\ ,\ l = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$$

şi aplicând (11) găsim

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Pentru problema (2) avem

$$a = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x} = 1,\ a_k(n) = \frac{k}{n^2}\ ,\ l = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$$

şi (11) conduce la

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{\sqrt{k}}{n} = \frac{1}{2}\,.$$

Pentru problema (3) avem

$$a = \lim_{x\to 0}\frac{2^x - 1}{x} = \ln 2,\ a_n(n) = \frac{k}{n^2}\ ,\ l = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$$

şi (11) conduce la

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2^{\frac{k}{n^2}-1}) = \ln\sqrt{2}.$$

Aplicând oricare din cele două alternative prezentate, pot fi calculate următoarele limite:

$$l_4 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arcsin\frac{k}{n^2}\,; \qquad (12)$$

$$l_5 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arcsin^2\frac{\sqrt{k}}{n}\,; \qquad (13)$$

$$l_6 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{k^2}{n^3}\,; \tag{14}$$

$$l_7 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan^2 \frac{k\sqrt{k}}{n^4}\,. \tag{15}$$

Multe probleme în care se pot aplica metodele prezentate au fost propuse de-a lungul anilor la concursul de admitere la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. Ele pot fi găsite în lucrarea [2].

Bibliografie

[1] Bărbosu, D., *Asupra unor probleme de concurs*, Argument, **15** (2013), 6–7

[2] Câmpean, V. şi colectiv, *Teste grilă de matematică*, U. T. Press, Cluj-Napoca, 2012

[3] Ivan, M., *Problems in Calculus*, Mediamira Science Publisher, Cluj-Napoca, 2005

Conf. univ. dr., Centrul Universitar Nord Baia Mare,
Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
E-mail: barbosudan@yahoo.com

Argument 16

Asupra inegalităţii lui Ion Ionescu

D. M. Bătineţu-Giurgiu

Abstract. In this article there are presented some refinements and new demonstrations of the Ionescu–Weitzenböck inequality.

În Gazeta Matematică, vol. III (15 septembrie 1897 - 15 August 1898), Nr. 2 din Octombrie 1897, la pagina 52, Ion Ionescu - unul dintre fondatorii Gazetei Matematice (G. M.) şi unul dintre cei patru "stâlpi ai Gazetei Matematice", a publicat problema:

$*273$. *Să se arate că nu există nici un triunghi pentru care inegalitatea:*

$$4S\sqrt{3} > a^2 + b^2 + c^2 \tag{I}$$

să fie adevărată.

Soluţiile acestei probleme apar în Gazeta Matematică, vol. III (15 septembrie 1897 - 15 August 1898), Nr. 12, August 1898, la paginile 281–283 (vezi [1]), în care se arată că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}. \tag{1}$$

Abia peste 22 de ani, în anul 1919, Roland Weitzenböck a publicat în Mathematische Zeitschrift vol. 5, Nr. 1–2, pag. 137–146, un articol în care demonstrează inegalitatea (1).

Ulterior, G. Pólya şi G. Szegö demonstrează că:

În orice triunghi ABC, cu notaţiile obişnuite, are loc inegalitatea

$$ab + bc + ca \geq 4S\sqrt{3} \tag{$P-S$}$$

Prin urmare, dacă ţinem seama că

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

rezultă că

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq 4S\sqrt{3}. \tag{3}$$

În acest mod, lumea matematică a atribuit inegalităţii (1) denumirea de "inegalitatea lui Weitzenböck", ceea ce este în totală discordanţă cu adevărul că Ion N. Ionescu a fost descoperitorul acestei inegalităţi.

A trebuit să treacă 115 ani până când D. M. Bătineţu-Giurgiu şi Neculai Stanciu să observe că Ion N. Ionescu este adevăratul descoperitor al acestei inegalităţi şi astfel, cu lucrarea [1], au propus ca aceasta să poarte numele "inegalitatea IONESCU - WEITZENBÖCK (I–W)".

În [4], Artur Engel prezintă 11 demonstraţii ale inegalităţii (I–W), iar D. M. Bătineţu-Giurgiu şi N. Stanciu în [1] prezintă 23 de demonstraţii inedite ale acestei inegalităţi şi încă trei rezultate suplimentare.

Argument 16

Să remarcăm interesul pentru noi demonstraţii ale inegalităţii (I–W) manifestat de colaboratorii R. M. V. J. (a se vedea lucrările [2]–[9]).

Mai departe ne vom ocupa de unele rafinări şi noi demonstraţii ale inegalităţii (I–W), după cum urmează:

1. Avem:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= \sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2} = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(m_a^2+m_b^2+m_c^2)} \end{aligned}$$

de unde, ţinând seama că $m_a \geq h_a$, $m_b \geq h_b$, $m_c \geq h_c$, obţinem

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2)} \\ &\overset{C-B-S}{\geq} \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(ah_a+bh_b+ch_c)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}(ah_a+bh_b+ch_c) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 6S = \frac{12}{\sqrt{3}}\cdot S = 4\sqrt{3}S. \end{aligned}$$

2. Avem:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca = abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ &\overset{Bergström}{\geq} abc\frac{9}{a+b+c} = \frac{9abc}{2p} = \frac{9\cdot 4\cdot R\cdot S}{2p} = 4S\cdot 9\frac{R}{2p}. \end{aligned} \tag{4}$$

Conform inegalităţii lui Dragoslav S. Mitrinovič, avem:

$$\frac{R}{2} \geq \frac{p}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{R}{2p} \geq \frac{1}{3\sqrt{3}}. \tag{M1}$$

Din (4) şi (M1) deducem că:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \geq 4S\cdot 9\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}} = 4S\sqrt{3}.$$

3. Avem:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= 2S\left(\frac{a^2}{2S}+\frac{b^2}{2S}+\frac{c^2}{2S}\right) = 2S\left(\frac{a^2}{bc\sin A}+\frac{b^2}{ca\sin B}+\frac{c^2}{ab\sin c}\right) \\ &= \frac{2S}{abc}\left(\frac{a^3}{\sin A}+\frac{b^3}{\sin B}+\frac{c^3}{\sin c}\right) \\ &= \frac{2S}{4R\cdot S}\,8R^3(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C) \\ &\overset{Bergström}{\geq} \frac{4R^2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)^2 = \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4p^2}{3} \\ &= \frac{4}{3}\,p(3\sqrt{3}\,r) = 4\sqrt{3}\,pr = 4\sqrt{3}\,S, \end{aligned}$$

unde am ţinut seama că, în conformitate cu inegalitatea lui Dragoslav S. Mitrinovič, avem:

$$p \geq 3\sqrt{3} \cdot r. \tag{M2}$$

4. Să demonstrăm că:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq 4S\sqrt{\frac{R+r}{r}} \overset{Euler}{\geq} 4S\sqrt{3}. \tag{5}$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} ab + bc + ca \geq 4S\sqrt{\frac{R+r}{r}} &\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 16S^2\left(\frac{R+r}{r}\right) \\ &= 16S^2 + 16S^2\frac{R}{r} = 16S^2 + 16Sp\,r\frac{R}{r} = 16S^2 + 16Sp\,R \\ &= 16S^2 + 4p\,abc = 16S^2 + 2abc(a+b+c). \end{aligned} \tag{6}$$

Conform relaţiei lui Horner, avem:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\ &= (-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc)(a^2 + 2bc - b^2 - c^2) \\ &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= 4b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 \\ &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \end{aligned}$$

şi atunci din (6) deducem că:

$$\begin{aligned} (ab+bc+ca)^2 &\geq -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2abc(a+b+c) \\ &\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) \\ &\geq -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2abc(a+b+c) \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \end{aligned}$$

relaţie adevărată în virtutea faptului că $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

5. Dacă $m \in \mathbb{R}_+$, atunci

$$a^{2m+2} + b^{2m+2} + c^{2m+2} \geq 4^{m+1}S^{m+1}(\sqrt{3})^{1-m}. \tag{7}$$

Demonstraţie. Conform inegalităţii lui J. Radon avem:

$$U = a^{2m+2} + b^{2m+2} + c^{2m+2} = (a^2)^{m+1} + (b^2)^{m+1} + (c^2)^{m+1}$$
$$\geq \frac{1}{3^m}\left(a^2+b^2+c^2\right)^{m+1}$$
$$= \frac{1}{3^m}\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^{m+1}$$
$$= \frac{1}{3^m}\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{\frac{4}{3}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)}\right)^{m+1}$$
$$\geq \frac{2^{m+1}}{3^m\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}}\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{h_a^2+h_b^2+h_c^2}\right)^{m+1},$$

iar conform inegalităţii C-B-S rezultă:

$$U \geq \frac{2^{m+1}}{3^m\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}}\left(a\,h_a + b\,h_b + c\,h_c\right)^{m+1} = \frac{2^{m+1}}{3^m\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}}(6S)^{m+1}$$
$$= \frac{4^{m+1}S^{m+1}3^{m+1}}{3^m\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}} = \frac{4^{m+1}S^{m+1}3}{\left(\sqrt{3}\right)^{m+1}} = 4^{m+1}S^{m+1}\left(\sqrt{3}\right)^{1-m}, \text{ q.e.d.}$$

Bibliografie

[1] Bătineţu-Giurgiu D. M. şi Stanciu N., *Inegalităţi de tip Ionescu-Weitzenböck*, G. M. seria B, nr. 1/2013, 1–10

[2] Bătineţu-Giurgiu M. D., *Inegalitatea lui Ion Ionescu*, Revista Matematică din Valea Jiului (R.M.V.J.) nr. 1/2014, 17–20

[3] Bican Corneliu, *O rafinare a inegalităţilor Weitzenböck şi Pólya-Szegö*, R.M.V.J. nr. 2-3/2010, pag. 9

[4] Engel Artur, *Probleme de matematică – strategii de rezolvare*, Ed. GIL, Zalău, 2006

[5] Marchidan Minodora, *O rafinare a unei inegalităţi*, R.M.V.J. nr. 2/2014, pag. 25

[6] Marian Maria Cristina, *O extindere a inegalităţii Ionescu-Weitzenböck*, R.M.V.J. nr. 2/2014, 23–24

[7] Minculete Nicuşor, *Problema* 25803 din Gazeta Matematică

[8] Stoica Gheorghe, *Asupra problemei O.C.G.*, 75, R.M.V.J. nr. 4/2007, 14–16

[9] Veleku Bucşi Octavia, *O altă rafinare a inegalităţilor Ionescu-Weitzenböck şi Pólya-Szegö*, R.M.V.J. nr. 2/2014, 22-23

Profesor, Bucureşti

Argument 16

Elemente de aritmetică în Egiptul Antic

Daniela Chiteş şi Costel Chiteş

Abstract. In this paper we present the arithmetic operations known by the ancient Egyptians, as we have learned from the papyruses discovered, deciphered and studied in the last 200 years. We'll see some of the problems that were written on the papyruses, whence we become aware of the fact the Egyptians know how to solve linear equations and, therefore, how to deal with practical problems.

1. Introducere

Evidenţiem rolul deosebit pe care l-a avut ştiinţa egipteană, care, prin acumularea de cunoştinţe, a strălucit în lumea Mediteranei. Societatea egipteană a făcut progrese datorită fertilităţii solului din apropierea Nilului, a climei plăcute, a barierelor naturale (deşert, mare). Revărsarea anuală a Nilului a determinat măsurarea loturilor de pământ cu ajutorul sforilor, ceea ce a condus treptat la crearea geometriei empirice, apoi a aritmeticii. "Ştiinţa matematică s-a înfiripat mai întâi în Egipt, căci acolo era îngăduit castei preoţilor să aibă răgaz îndeajuns", afirma Aristotel în "Metafizica". Grecii recunoşteau că matematica venea din Egipt. Marii înţelepţi greci (Thales, Pitagora, Lycurg, Solon, Platon, Eudoxos, etc) s-au format în Egipt. Vechea civilizaţie egipteană, care îşi cunoscuse apogeul cu mult timp în urmă, exercita încă o atracţie vie asupra tinerei lumi elene. Monumentele de proporţii colosale, înalta cultură religioasă, Misterele antice, cultura ei ştiinţifică - atestată de numeroasele papirusuri de astrologie şi medicină - continuau să-i uimească pe greci. De exemplu, iniţierea ezoterică, ştiinţa Numerelor, primele fundamente ale ştiinţei, au fost studiate în Egipt de către Pitagora timp de 22 de ani. Templele egiptene reprezentau imaginea lumii, fiind transpunerea arhitecturală a ordinii cosmice. Templul era "casa zeului", adică construcţia ce adăpostea statuia divinităţii. Construirea unui templu reprezenta pentru vechii egipteni a crea lumea din nou. Unele temple conţineau tratate medicale, liste geografice şi chiar texte literare. Religia egiptenilor era politeistă. Ei nu tindeau spre monoteism, deoarece utilizau un sincretism specific, prin intermediul căruia o divinitate nu-şi pierdea identitatea. Cu aproximativ 3500 ani î.Hr. a apărut scrierea hieroglifică (sacră) inscripţionată pe piei, papirusuri şi monumente. Descifrarea hieroglifelor a fost realizată abia în anul 1824, de către orientalistul Jean-François Champollion. Scrierea hieroglifică a evoluat apoi în cea hieratică (religioasă) şi în scrierea demotică (populară). Fenicienii au înlocuit mai târziu (în jurul anului 1500 î.Hr.) semnele pictografice ce exprimau lucruri (hieroglifele) cu semne ce exprimau sunete (litere), inventând astfel alfabetul (ce nu conţinea vocale). Scrierile arameică şi ebraică au la bază alfabetul fenician. După anul 1000 î.Hr., grecii au preluat alfabetul fenician şi i-au adăgat vocalele. Mai târziu, acesta a fost preluat de către romani.

2. Operaţii aritmetice

Sistemul de numeraţie egiptean era zecimal. Utilizau şapte hieroglife, reprezentând puterile lui 10, şi anume: $1 = 10^0 = |$, $10 = \cap =$ mâner, toartă, $10^2 = 5 =$ spirală, $10^3 = \dagger =$ lotus, $10^4 = \square =$ deget, $10^5 =$ un mormoloc, $10^6 =$ om în genunchi care se roagă (nedepăşind numărul 10.000.000). Reprezentarea numerelor se realiza aditiv, numerele fiind scrise orizontal de la stânga la dreapta, sau invers, sau chiar şi pe verticală, de sus în jos.

De exemplu: 5 5
$\cap\ \cap\ \cap$
$\cap\ \cap\ \cap$
$|||\ |||\ \cap$

reprezenta numărul 276. Zece simboluri de acelaşi tip erau înlocuite de un simbol de valoare superioară. Egiptenii utilizau în mod constant un aranjament clar şi estetic. Sursele directe sunt: 1) Papirusul Reisner ($\approx$ 1880 î.Hr.), 2) Papirusul de la Kahun ($\approx$ 1850 î.Hr.), 3) Papirusul Rhind ($\approx$ 1780 î.Hr., executat de scribul Ahmes prin copierea unui text mai vechi, din $\approx$ 1850 î.Hr.), 4) Papirusul de la Moscova ($\approx$ 1950 î.Hr.), 5) Papirusul de la Berlin ($\approx$ 1465 î.Hr.), 6) Papirusul Rollin ($\approx$ 1350 î.Hr.), 7) Papirusul de la Cairo (sec. IV î.Hr.).

Înmulţirea egipteană se realiza prin dublări succesive şi adunare.

De exemplu, efectuau astfel $13 \cdot 15$:

1	15	V
2	30	
4	60	V
8	120	V
	195	

.

În scrierea actuală, calculul revine la: $13 \cdot 15 = (1 + 4 + 8) \cdot 15 = 15 + 60 + 120 = 195$. Reprezentarea în binar nu a constituit o dificultate pentru calculatorul egiptean. Împărţirea se realiza tot prin procedeul de dublare.

De exemplu, 1035 : 45 se realiza astfel:

1	45	V
2	90	V
4	180	V
8	360	
16	720	V
23		

.

Ne oprim la 720, deoarece dublul lui 1440 este mai mare decât 1035. Cum $1035 = 720 + 180 + 90 + 45$, câtul va fi: $16 + 4 + 2 + 1 = 23$.

Argument 16

Când împărţirile nu erau exacte, egiptenii utilizau fracţiile de forma $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, numite fracţii alicote sau unitare (câtimi), cunoscute şi sub denumirea de "fracţii egiptene". Astfel se notează $\frac{1}{n} = \overset{\square}{n} = \overline{n}$. Existau două excepţii, fracţiile: $\frac{2}{3}$ şi $\frac{3}{4}$, care aveau simboluri speciale. Noi vom nota $\frac{2}{3} = \overset{=}{3}$.

Fracţia $\frac{m}{n}$ o reprezentau ca sumă de fracţii alicote. Cum $m = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \cdot 2^i$, unde $a_i \in \{0, 1\}$, rezultă că ei aveau nevoie să reprezinte fracţiile de forma $\frac{2}{n}$ ca sumă de fracţii alicote.

Pentru uşurinţa calculelor, în Papirusul Rhind, Ahmes a întocmit, fără erori, un tabel pentru dublarea fracţiilor de forma $\frac{1}{n}$, pentru $5 \leq n \leq 101$, n impar.

Prezentăm o parte a tabelului realizat de Ahmes:

Fracţia unitară	Fracţia dublată
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

.

De exemplu, descompuneau astfel fracţia $\frac{3}{7}$ ca sumă de fracţii alicote astfel:

$$\frac{3}{7} = \frac{2+1}{7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{7}.$$

Remarcă. În anul 1880, matematicianul J. J. Sylvester a dat demonstraţia scrierii oricărei fracţii subunitare diferită de $\frac{2}{3}$ ca sumă de fracţii alicote distincte.

Într-adevăr, dacă $\frac{a}{b} \in (0, 1)$, $\exists\, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ astfel încât $\frac{1}{q} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}$.

Rezultă $0 \leq aq - b < a$ şi $\frac{a}{b} - \frac{1}{q} = \frac{aq - b}{bq}$, unde $0 \leq aq - b < a$. Se raţionează prin inducţie după numărătorul fracţiei.

Exemplu.

$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$, de unde $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, exact ca în tabelul lui Ahmes.

$\frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$, de unde $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, exact ca în tabelul lui Ahmes.

$\frac{1}{5} < \frac{2}{9} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{9} - \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$, de unde $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$, care nu coincide cu scrierea lui Ahmes.

Rezultă că scrierea fracţiilor ca sumă de fracţii alicote nu este unică. Scrierea lui Ahmes este de preferat, deoarece numitorii sunt numere pare şi la o eventuală dublare a fracţiei, are loc o simplificare.

Prezentăm împărţirea cu rest pe care o realizau vechii egipteni.

Exemplu. Să se efectueze împărţirea 289 : 7

1	7	V
2	14	
4	28	
8	56	V
16	112	
32	224	V

.

Deducem $\frac{289}{7} = 41 + \frac{2}{7} = 41 + \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, deoarece din acest tabel avem dublarea lui $\frac{1}{7}$.

Remarcă.

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, n impar, atunci putem scrie $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

Astfel, numitorii devin pari şi prin amplificare cu 2, rezultatul se simplifică.

De exemplu, $\frac{1}{97} = \frac{1}{98} + \frac{1}{97 \cdot 98} \Rightarrow \frac{2}{97} = \frac{1}{49} + \frac{1}{97 \cdot 49} = \frac{1}{49} + \frac{1}{4753}$.

Problema nr. 70 din Papirusul Rhind

Să se efectueze împărţirea $100 : 7\overline{248}$, *unde* $d = 7\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{8} = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Soluţie.

Text	*Explicaţii*
$1\ \ 7\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{8}$	$1 \cdot d$
$2\ \ 15\overline{2}\,\overline{4}$	$2 \cdot d$
$4\ \ 31\overline{2}$	$4 \cdot d$
$8\ \ 63$	$8 \cdot d$
$/\overline{\overline{3}}\ \ 5\overline{4}$	$\frac{2}{3} \cdot d$ Avem $\frac{2}{3}\,d + 8d + 4d = 99\frac{3}{4}$ Lipseşte $\frac{1}{4}$ din 100
$\overline{63}\ \ \overline{8}$	$8d = 63$ deci $\frac{1}{63}\,d = \frac{1}{8}$
$/\overline{42}\ \overline{126}\ \overline{4}$	$\frac{2}{63}\,d = \frac{1}{4}$ $\frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$, egalitate care se găseşte în tabelul din Papirus

.

Deci $100 : 7\overline{248} = 4 + 8 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{42} + \dfrac{1}{126} = 12\,\overline{\overline{3}}\,\overline{42}\ \overline{126}$.

Vechii egipteni nu au cunoscut conceptul de sumă infinită (serie). Fracţiile aveau o reprezentare finită în sistemul binar.

Problema nr. 36 din Papirusul Rhind

Determinaţi forma standard a fracţiei $\dfrac{30}{106}$.

Soluţie.

1	106
$\overline{2}$	53
$\overline{4}$	$26\overline{2}$
$\overline{106}$	1
$\overline{53}$	2
$\overline{212}$	$\overline{2}$

Deci $\dfrac{30}{106} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{53} + \dfrac{1}{106} + \dfrac{1}{212}$.

Problema nr. 30 din Papirusul Rhind.

O mărime şi un sfert din aceasta fac împreună 15. *Cât este mărimea?*

Soluţie. Mărimea (grămada) era necunoscuta la egipteni, pe care o numeau *aha* (*ahe* sau *hau*). În scrierea actuală, avem $x + \dfrac{x}{4} = 15$. Pentru $x_1 = 4$ vom obţine $x_1 + \dfrac{x_1}{4} = 5$. Deci prin înmulţire cu 3, vom obţine rezultatul: $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Remarcă. Se consideră că egiptenii au rezolvat astfel de probleme prin metoda, denumită mai târziu, a falsei ipoteze. Această metodă a fost utilizată apoi la babilonieni, chinezi, indieni, musulmani şi, în Evul Mediu, de europeni. Ea a ieşit apoi din uz, datorită metodelor algebrice.

Pentru ecuaţia de forma $\dfrac{1}{p_1}x + \dfrac{1}{p_2}x + \cdots + \dfrac{1}{p_n}x = q$, scribul lua pentru *aha* soluţia $x' = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ şi obţinea valoarea q'. Soluţia corectă este $x = \dfrac{q}{q'}x'$. Această idee de proporţionalitate a apărut astfel ca metodă de rezolvare pentru prima dată în istoria matematicii.

3. Concluzii

- Egiptenii ştiau să descompună o fracţie într-o sumă de fracţii alicote. Cel mai probabil, această scriere nu este unică.
- Fracţiile alicote (unitare) reprezentau temelia pentru operaţiile de calcul.
- Probabil că ei au reuşit să dezvolte metode generale de calcul, bazate pe exemple concrete. Acesta a fost un prim pas spre abstractizare.
- Egiptenii au rezolvat ecuaţii liniare ale căror soluţii erau numere raţionale.
- Metoda de înmulţire folosită de egipteni a fost preluată de vechii greci.

4. Exerciţii propuse

1. a) Să se scrie următoarele numere naturale ca sume de puteri diferite ale lui 2:

i) 20; ii) 31; iii) 17

b) Să se transforme în baza 2 numerele precedente.

2. Să se efectueze înmulţirea egipteană $12 \cdot 18$.

3. Să se efectueze împărţirea egipteană $840 : 35$.

4. Să se reprezinte ca sumă de fracţii alicote fracţiile: $\frac{2}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{2}{13}$.

5. Să se arate că: $\overline{2} + \overline{4} + \overline{8} + \overline{16} + \overline{32} + \overline{64} < 1$. Cât lipseşte până la un întreg?

Plutarch (45-120 d.Hr.), în scrierea "Isis şi Osiris", prezintă ochiul lui Horus, în care sunt reprezentate primele şase inverse ale puterilor lui 2. Partea care lipseşte până la unitate este adăgată de către zeul savanţilor, Thoth.

Bibliografie

[1] Albu C. Adrian, *O istorie a matematicii, Antichitatea până în secolul VI*, Ed. Nomina, Piteşti, 2009

[2] Alten H.-W., Djafari A. Naini, Eick B., Folkerts M., Schlosser H., Schlote K-H., Wesemüller-Koch, Wußing H., 4000 *Jahre Algebra*, Springer Spektrum, 2014

[3] Chiteş C., Chieş D., Heuberger D., Muşuroia, N., *Matematică, Teme suplimentare pentru clasa a V-a*, Ed. Corint, Bucureşti, 2013

[4] Ciho Miron, *Civilizaţia Egiptului greco-roman. Plutarch "Despre Isis şi Osiris"*, Ed. Univ. Bucureşti, 2000

[5] Kolman E., *Istoria matematicii în Antichitate*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1963

[6] Ştefănescu Mirela, 15 *lecţii de istoria matematicii*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2008

[7] http:/www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Hist Topics/Egyptian_papyri.html

[8] http:/www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Hist Topics/Egyptian_numerals.html

Profesor, Bucureşti

Lector dr., Bucureşti

Argument 16

O altă demonstraţie a lemei lui Blundon

Leonard Giugiuc

Abstract. In this note we give an elementary proof of one of Blundon's Lemma, using Rolle's sequence for certain function.

Una din cele mai cunoscute inegalităţi datorate lui W. J. Blundon este:
Lema. *Dacă* $x, y, z \in (0, \infty)$*, astfel încât* $x + y + z = xyz$*, atunci*

$$(x-1)(y-1)(z-1) \le 6\sqrt{3} - 10.$$

Vom vedea, în cele ce urmează, o demonstraţie a acestei în care vom folosi cunoştinţe de analiză matematică.

Notăm $\dfrac{\sqrt{3}}{x} = a$, $\dfrac{\sqrt{3}}{y} = b$ şi $\dfrac{\sqrt{3}}{z} = c$, deci $x = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{b}$, $z = \dfrac{\sqrt{3}}{c}$.
Mai mult, $x + y + z = xyz \Leftrightarrow ab + bc + ca = 3$.
Inegalitatea de demonstrat devine:

$$a + b + c + \left(2\sqrt{3} - 3\right) abc \ge 2\sqrt{3}.$$

avem $(a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca) = 9$, deci $a + b + c \ge 3$.
Notăm $a + b + c = 3 \cdot s$ şi $abc = p$. Avem $ab + bc + ca = 3$.
Vom determina $p > 0$ pentru care ecuaţia $t^3 - 3s \cdot t^2 + 3 \cdot t - p = 0$ are toate rădăcinile strict pozitive. Vom folosi metoda lui Rolle.

Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = t^3 - 3s \cdot t^2 + 3 \cdot t - p$. Derivata sa are rădăcinile $s \pm \sqrt{s^2 - 1}$ şi

$$h\left(s - \sqrt{s^2 - 1}\right) = 3s - 2s^3 + 3(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}} - p,$$
$$h\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right) = 3s - 2s^3 - 2(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}} - p.$$

Deoarece $h(0) < 0$ şi $s - \sqrt{s^2 - 1} > 0$, folosind şirul lui Rolle, deducem că h are toate rădăcinile pozitive, dacă şi numai dacă $h\left(s - \sqrt{s^2 - 1}\right) \ge 0$ şi $h\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right) \le 0$, adică, dacă şi numai dacă

$$3s - 2s^3 - 2(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}} \le p \le 3s - 2s^3 + 2(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}}.$$

Fie funcţiile $f, g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(s) = 3s - 2s^3 - 2(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}},\ g(s) = 3s - 2s^3 + 2(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}}.$$

Folosindu-le derivata întâi, se arată uşor că f şi g sunt strict descrescătoare.
Mai mult, avem $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0$ şi $\lim\limits_{s \to \infty} = 0$.

Dacă $s \in \left[1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, atunci h are rădăcinile pozitive dacă şi numai dacă

$$p \in \left[3s - 2s^3 - 2(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}},\ 3s - 2s^3 + 2(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}}\right].$$

Dacă $s \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, atunci P are rădăcinile pozitive dacă şi numai dacă

$$p \in \left[0, 3s - 2s^3 + 2(s^2 - 1)^{\frac{s}{2}}\right].$$

Aşadar avem:

$$a + b + c + \left(2\sqrt{3} - 3\right) abc \geq 3s + \left(2\sqrt{3} - 3\right)\left(3s - 2s^3 - 2(s^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\right),$$

pentru $s \in \left[1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ şi $a + b + c + \left(2\sqrt{3} - 3\right) abc \geq 3s$, pentru $s \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Evident, pentru $s \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ avem $3s \geq 2\sqrt{3}$.

Folosind variaţia funcţiei u, se arată că pentru $s \in \left[1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, avem

$$u(s) = 3s + \left(2\sqrt{3} - 3\right)\left(3s - 2s^3 - 2(s^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\right) \geq 2\sqrt{3}.$$

Bibliografie

[1] Blundon W. J., *Inequalities with the triangle*, Canad. Math. Bull. **8** (1965), 615–626

[2] Blundon W. J., *Problem E 1935*, The Amer. Math. Monthly, **73** (1966), 1122

[3] Dospinescu G., Lascu M., Pohoaţă C., Tetiva M., *An elementary proof of Blundon's inequality*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, **9** (2008), issue 4, article 100 http://jipam.vu.edu.au/

Profesor, Colegiul Naţional "Traian", Drobeta-Turnu Severin

Argument 16

Asupra unei probleme din Gazeta Matematică

Dana Heuberger

Abstract. In this note we will see an elementary solution of the problem 26856 from G.M.-B nr. 12/2013.

În Gazeta Matematică nr. 12/2013, la secţiunea "Clasele a XI-a şi a XII-a", apărea următoarea problemă:

Problema 1. *Notăm cu* $\{a\}$ *partea fracţionară a numărului real* a. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\left\{\frac{n}{\sqrt{1}}\right\}+\left\{\frac{n}{\sqrt{2}}\right\}+\left\{\frac{n}{\sqrt{3}}\right\}+\cdots+\left\{\frac{n}{\sqrt{n^2}}\right\}\right).$$

Mihai Piticari, Sorin Rădulescu, Gazeta Matematică 12/2013

Soluţia acestei probleme, publicată în Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014, face apel la integrabilitatea în sensul lui Darboux a unei funcţii continue, fiind aşadar accesibilă doar elevilor din clasa a XII-a care se pregătesc pentru olimpiadele şcolare. Vom prezenta, în cele ce urmează, o soluţie elementară, la îndemâna unui elev de clasa a XI-a.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu a_n termenul general al şirului din enunţ. Avem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{\sqrt{1}}+\frac{n}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2}}-\left(\left[\frac{n}{\sqrt{1}}\right]+\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{\sqrt{n^2}}\right]\right)\right)\\ &= b_n - c_n, \end{aligned}$$

unde

$$b_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)$$

şi

$$c_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\left[\frac{n}{\sqrt{1}}\right]+\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{\sqrt{n^2}}\right]\right).$$

Aplicând lema *Césaro-Stolz*, obţinem:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}\right). \end{aligned}$$

Avem:

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} \le \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$$

şi folosind criteriul cleştelui rezultă că $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$. Determinăm părţile întregi care apar în şirul $(c_n)_{n\geq 1}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $t = \overline{1, n-1}$, avem:

$$\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] = t \Leftrightarrow t \leq \frac{n}{\sqrt{k}} < t+1 \Leftrightarrow \frac{n}{t+1} < \sqrt{k} \leq \frac{n}{t} \Leftrightarrow \frac{n^2}{(t+1)^2} < k \leq \frac{n^2}{t^2}.$$

Aşadar, există $\left[\frac{n^2}{t^2}\right] - \left[\frac{n^2}{(t+1)^2}\right]$ valori pentru k, astfel încât $\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] = t$.

În plus, $\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right] = n \Leftrightarrow k = n^2$. Obţinem:

$$c_n = \frac{1}{n^2}\Bigg(\left(\left[\frac{n^2}{1}\right] - \left[\frac{n^2}{4}\right]\right)\cdot 1 + \left(\left[\frac{n^2}{4}\right] - \left[\frac{n^2}{9}\right]\right)\cdot 2 + \left(\left[\frac{n^2}{9}\right] - \left[\frac{n^2}{16}\right]\right)\cdot 3 +$$
$$+ \cdots + \left(\left[\frac{n^2}{(n-1)^2}\right] - \left[\frac{n^2}{n^2}\right]\right)(n-1) + n\Bigg).$$

Aşadar, $c_n = \frac{1}{n^2}\left(n^2 + \left[\frac{n^2}{4}\right] + \left[\frac{n^2}{9}\right] + \cdots + \left[\frac{n^2}{(n-1)^2}\right] + 1\right)$.

Folosind inegalitatea părţii întregi, rezultă

$$1 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{9} + \cdots + \frac{n^2}{(n-1)^2} - n + 3\right) < c_n \leq$$
$$\leq 1 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{9} + \cdots + \frac{n^2}{(n-1)^2} + 1\right),$$

adică

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{n-3}{n^2} < c_n \leq$$
$$\leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \qquad (1)$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$, utilizând criteriul cleştelui in inegalitatea (1), obţinem că $\lim_{n\to\infty} = \frac{\pi^2}{6}$ şi apoi deducem că $\lim_{n\to\infty} a_n = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

Bibliografie

[1] Gazeta Matematică nr. 12/2013

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Argument 16

Şiruri definite prin recurenţe alternative

Vasile Pop

Abstract. In this article there are presented some ideas in connection with the approach to problems with alternating recurrences.

Pentru a intui de la început ce sunt recurenţele alternative, vom începe prin prezentarea unei probleme de acest tip, dată la faza finală a Olimpiadei Naţionale de Matematică din 2000.

Problema 2, clasa a XI-a, 2000

Se consideră un şir $(x_n)_n$ *definit astfel:* $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *şi* $x_{n+1} = \dfrac{x_n+1}{x_n}$ *sau* $x_{n+1} = \dfrac{x_n+2}{2x_n-1}$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*. Să se studieze convergenţa acestui şir.* *Vasile Pop*

Soluţie. Considerăm funcţiile $f, g : \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, care sunt bijective şi verifică relaţiile $f \circ g = g \circ f$, $f^n(x) = \dfrac{F_{n+1}x + F_n}{F_n x + F_{n-1}}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $(F_n)_{n\geq 1}$ este şirul lui Fibonacci, $g \circ g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Cu aceste notaţii rezultă că, după determinarea termenilor $x_0, x_1, \ldots, x_n$, următorul termen din şir poate fi ales în două moduri: $x_{n+1} \in \{f(x_n), g(x_n)\}$.
Ne putem imagina generarea şirului $(x_n)_n$ astfel: avem un joc cu două taste F şi G. Pornind de la un număr iraţional $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dacă apăsăm pe tasta F obţinem $x_1 = f(x_0)$ şi dacă apăsăm pe tasta G obţinem $x_1 = g(x_0)$. Continuăm jocul construind aleator şirul $(x_n)_n$ după regula: dacă la al $(n+1)$-lea pas apăsăm pe tasta F, găsim $x_{n+1} = f(x_n)$, şi dacă apăsăm pe tasta G, găsim $x_{n+1} = g(x_n)$. Prin convenţie, considerăm că am jucat bine dacă şirul obţinut este convergent şi că am jucat prost dacă şirul obţinut este divergent.
Deoarece $f \circ g = g \circ f$, rezultă că dacă în primii n paşi am apăsat de k_n ori tasta F şi de $n - k_n$ ori am apăsat tasta G, nu contează în ce ordine am făcut aceste alegeri. Obţinem $x_n = f^{k_n}(x_0)$ sau $x_n = f^{k_n}(g(x_0))$.
Pentru finalizarea soluţiei notăm $M = \{n \in \mathbb{N} | \, x_{n+1} = f(x_n)\}$ şi considerăm două cazuri.

1. Dacă mulţimea M este finită, atunci de la un rang încolo şirul este alternant luând două valori: $f^k(x_0)$ şi $f^k(g(x_0))$. Având două subşiruri constante, condiţia de convergenţă este:

$$f^k(x_0) = f^k(g(x_0)) \Leftrightarrow x_0 = g(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Astfel că în acest caz (dacă am apăsat tasta F doar de un număr finit de ori), şirul $(x_n)_n$ este convergent, dacă şi numai dacă termenul de pornire x_0 este $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sau $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Dacă mulţimea M este infinită, atunci există două submulţimi de numere naturale $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$, cel puţin unul nemărginit astfel ca: $x_n = f^{a_n}(x_0)$ sau $x_n = f^{b_n}(g(x_0))$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

rezultă că în acest caz, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, şirul este convergent şi are limita $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Trecem acum la definiţia generală a şirurilor definite prin recurenţe alternative.

Fie $\mathcal{F}_1 = \{f_i \,|\, i \in I\}$ o familie de funcţii $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sau $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i \in I$, unde I este o mulţime de indici, şi $\mathcal{F}_2 = \{g_j \,|\, i \in J\}$ o familie de funcţii $g_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sau $g_j : C \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $j \in J$, unde J este o mulţime de indici.

Definiţia 1. Se numeşte *şir definit prin recurenţă alternativă de ordin I*, determinat de familia de funcţii $\mathcal{F}_1$, orice şir $(a_n)_{n\in M}$ care verifică relaţia de recurenţă $a_{n+1} \in \{f_i(a_n) | \,|i \in I\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde primul termen $a_0 \in \mathbb{R}$ sau $a_0 \in \mathbb{C}$ este dat.

Definiţia 2. Se numeşte *şir definit prin recurenţă alternativă de ordin II*, determinat de familia de funcţii $\mathcal{F}_2$, orice şir $(a_n)_{n\in M}$ care verifică relaţia de recurenţă $a_{n+1} \in \{g_j(a_n, a_{n-1}) \,|\, g \in J\}$, pentru orice $n \geq 1$, unde termenii iniţiali a_0, a_1 sunt daţi.

Oservaţie. a) Conform definiţiilor 1 şi 2, o familie de funcţii $\mathcal{F}_1$ sau $\mathcal{F}_2$ defineşte o infinitate de şiruri deoarece, pentru orice $n \in M$, avem alternative de a alege a_{n+1} în $|\mathcal{F}_1|$, respectiv $|\mathcal{F}_2|$ moduri.

Vom nota cu $\mathcal{A}(\mathcal{F}_1; a_0)$, respectiv $\mathcal{A}(\mathcal{F}_2; a_0, a_1)$ mulţimea tuturor acestor şiruri şi cu $\mathcal{M}(F_1; a_0)$, respectiv $\mathcal{M}(\mathcal{F}_2; a_0, a_1)$ mulţimea tuturor termenilor acestor şiruri.

b) Dacă $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ şi $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ (ca în problema discutată), mulţimea $\mathcal{M}(\mathcal{F}; a_0)$ este $\{f_1^n(f_2^m(a_0)) \,|\, m, n \in \mathbb{N}|\}$.

c) Mulţimea $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1; a_0)$, respectiv $\mathcal{M}(\mathcal{F}_2; a_0, a_1)$ poate conţine atât şiruri convergente cât şi şiruri divergente, atât şiruri mărginite cât şi şiruri nemărginite, atât şiruri monotone cât şi şiruri nemonotone.

d) Un posibil domeniu de studiu al şirurilor definite prin recurenţe alternative ar fi: *în ce condiţii, asupra funcţiilor din familia $\mathcal{F}$ şi asupra termenilor iniţiali, toate* *şirurile din mulţimea $\mathcal{A}(\mathcal{F}, a_0)$ au aceeaşi comportare - sincronă, relativ la monotonie, mărginire, convergenţă? În ce condiţii mulţimea $\mathcal{M}(\mathcal{F}, a_0)$ este finită, mărginită, densă?*

Un caz particular de şiruri definite prin recurenţe alternative de ordin doi, care conduc la mulţimi interesante în planul complex (reţele plane), sunt şirurile în care funcţiile $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sunt de forma $g(z, u) = a \cdot z + b \cdot u$, $z, u \in \mathbb{C}$ cu $a, b \in \mathbb{C}$ fixate. Dăm un singur rezultat despre astfel de şiruri.

Teoremă. *Dacă $a \in \mathbb{C}$ şi $|a| < 1$, atunci toate şirurile $(z_n)_n$ care verifică relaţia de recurenţă alternativă: $z_{n+1} \in \{(1-a)z_n + a\, z_{n-1},\ (1-\overline{a})z_n + \overline{a}\, z_{n-1}\}$ pentru orice $n \geq 1$ şi $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, sunt convergente.*

Demonstraţie. Avem

$z_{n+1} - z_n = (-a)(z_n - z_{n-1})$ sau $z_{n+1} - z_n = (-\overline{a})(z_n - z_{n-1})$.

În ambele cazuri avem

$$|z_{n+1} - z_n| = |a|\, |z_n - z_{n-1}| = \cdots = |a|^n |z_1 - z_0|.$$

Avem

$$\begin{aligned}
|z_{n+p} - z_n| &\leq |z_{n+p} - z_{n+p-1}| + |z_{n+p-1} - z_{n+p-2}| + \cdots + |z_{n+1} - z_n| \\
&\leq \left(|a|^{n+p-1} + |a|^{n+p-2} + \cdots + |a|^n\right) |z_1 - z_0| \\
&= |a|^n \frac{1 - |a|^p}{1 - |a|} |z_1 - z_0| < \frac{|z_1 - z_0|}{1 - |a|} |a|^n,
\end{aligned}$$

deci pentru $|a| < 1$, şirul $(z_n)_n$ este şir Cauchy (fundamental), deci şir convergent.

Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
Str. C. Daicoviciu 15
400020 *Cluj-Napoca, Romania*
E-mail: vasile.pop@math.utcluj.ro

Argument 16

Tabăra de matematică, Baia Mare, 2014

Organizatori: Inspectoratul Judeţean Maramureş, Centrul Judeţean pentru Tineri Capabili de Performanţă, Filiala MM a SSMR.

Loc de desfăşurare: Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai".

Directorul taberei: prof. Nicolae Muşuroia

Profesori participanţi: *Bojor Florin, Bojor Meda, Boroica Gheorghe, Heuberger Cristian, Heuberger Dana, Muşuroia Nicolae, Petruţiu Crina, Pop Adrian* - de la C. N. "Gheorghe Şincai"; *Boroica Gabriela, Fărcaş Natalia, Darolţi Erika, Zlampareţ Horia* de la C. N. "Vasile Lucaciu"; *Longaver Ludovic* de la L. T. "Nemeth Laszlo"; *Cioclu Costel, Podină Camelia, Ocean Cristina* - de la L. T. "Emil Racoviţă"; *Pop Radu* de la Liceul Sanitar; *Fănăţan Nelu, Friedrich Gabriela* - de la C. Ec. "Nicolae Titulescu"; *Bunu Iulian* de la Liceul de Arte; *Şerba Lucia* de la C. T. "Anghel Saligny"; *Bretan Andrei, Codrea Lucica, Stark Andrea* - de la Şc. Gim. "Nicolae Iorga"; *Buzilă Cristina* de la Şc. Gim. "Dr. Victor Babeş"; *Hossu Călin* de la Şc. Gim. "D. Cantemir"; *Pop Adela* de la C. T. "Aurel Vlaicu";*Pop Anca* de la C. T. "George Bariţiu"; *Pop Cosmin* de la Şc. Gim "George Coşbuc"; *Tomşa Magdalena* de la Şc. Gim. Dumbrăviţa; *Vălean Mihaela* de la Şc. Gim. "Lucian Blaga"; *Râmbu Gheorghe* - matematician; *Vlad Vasile* - matematician.

Clasa a VIII-a

1. a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Calculaţi
$$S=f(1)+f(2)+\cdots+f(100).$$
b) Determinaţi funcţiile $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea
$$g(5-2x)=9\cdot g(1)-4x,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

2. Cele trei diagonale ale feţelor unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ au dimensiunile $\sqrt{17}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm, respectiv 3 cm.
a) Aflaţi diagonala paralelipipedului.
b) Aflaţi aria triunghiului $D'AC$.

3. Într-o piramidă triunghiulară feţele laterale au ariile 5 cm^2, 5 cm^2, 8 cm^2 şi fac acelaşi unghi α cu baza, iar aria bazei este 9 cm^2.
a) Arătaţi că $\alpha=60^\circ$.
b) Determinaţi volumul piramidei.

Test selectat de:
Prof. Crina Petruţiu, Prof. Nicolae Muşuroia, C. N. "Gh. Şincai"

Argument 16

Clasa a IX-a

1. a) Să se arate că $\forall\, x, y \in (0, \infty)$, $\dfrac{1}{x+y} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

b) Să se arate că $\forall\, a, b \in (0, \infty)$,

$$\frac{1}{a+\sqrt{bc}} + \frac{1}{b+\sqrt{ac}} + \frac{1}{c+\sqrt{ab}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Meda şi Florin Bojor, Argument 11/2009

2. Fie funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\frac{f^2(n)}{n+f(n)} + \frac{n}{f(n)} = \frac{1+f(n+1)}{2}.$$

a) Să se arate că $f(2) = 2$.

b) Să se determine funcţia f.

Cătălin Cristea, G. M. 9/2013

3. Fie $\triangle ABC$, numerele $k, t \in (0, 1)$ şi punctele $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (AC)$ astfel încât $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{PC}{PA} = k$ şi $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{QA}{QC} = t$.

a) Să se arate că triunghiurile AMN şi BPQ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $t = k$.

b) Dacă $\{E\} = AM \cap BQ$, $\{F\} = AN \cap BP$, iar dreapta CE este mediană în triunghiul ABC, să se arate că centrul de greutate al triunghiului AMN se află pe (EF).

Dana Heuberger

Test selectat de:
Prof. Dana Heuberger, Prof. Cristian Heuberger, C. N. "Gh. Şincai"

Clasa a X-a

1. Fie $z \in \mathbb{C}$ cu proprietatea $|z - 3i| \le 1$. Demonstraţi că:

a) $6\mathrm{Im}z \ge |z|^2 + 8$;

b) $|z - 4| \ge 4$;

c) $|z^{10} - 3i| + |4z^9 - 3i| + |16z^8 - 3i| + \cdots + |4^9 z - 3i| \ge 2^{11} \cdot 341$.

2. a) Să se demonstreze că: $\sqrt{a^2 - ab + b^2} \ge \dfrac{a+b}{2}$, unde $a, b \ge 0$.

b) Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{4^x - 6^x + 9^x} + \sqrt{9^x - 3^x + 1} + \sqrt{4^x - 2^x + 1} = 2^x + 3^x + 1.$$

3. Fie $E(a,b,c)=\dfrac{a^3}{b+1}+\dfrac{b^3}{c+1}+\dfrac{c^3}{a+1}$, $a,b,c\geq 0$.

a) Dacă $a,b,c\in[0,1]$, demonstraţi că $E(a,b,c)\leq\dfrac{3}{2}$;

b) Dacă $a,b,c\in[1,\infty)$, demonstraţi că $E(a,b,c)\geq\dfrac{3}{2}$.

Test selectat de:
Prof. Meda Bojor, Prof. Florin Bojor, C. N. "Gh. Şincai"

Clasa a XI-a

1. Se consideră mulţimea $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ şi funcţia $f:\mathbb{C}\to A$, $f(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că f este bijectivă şi

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)+f(z_2),\ f(z_1\cdot z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2),\ \forall\, z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

b) Determinaţi $X,Y\in A$ astfel încât $X+Y=I_2$ şi $X^4+Y^4=17I_2$.

2. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $A\in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2+A+I_n=O_n$.
a) Arătaţi că $\det(A)=1$.
b) Determinaţi n ştiind că $\det(A^n+I_n)=512$.

3. a) Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1=1$, $x_{n+1}=\sqrt{4x_n+x_n^2}$, $\forall\, n\geq 1$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n^2}$.
b) Fie $a,b,c\in(0,\infty)\backslash\{1\}$ astfel încât

$$\left|a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{3}{n}}-3\right|\leq\frac{1}{n^2},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că $a\cdot b^2\cdot c^3=1$.

Test selectat de:
Prof. Gabriela Boroica, C. N. "Vasile Lucaciu"
Prof. Gheorghe Boroica, C. N. "Gheorghe Şincai"

Clasa a XII-a

1. a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

b) Fie mulţimea $M=\{\alpha=a^3+b^3+c^3-3abc\,|\,a,b,c\in\mathbb{Z}\}$. Să se arate că $(M,\cdot)$ este monoid comutativ şi să se arate că M are o infinitate de elemente.

2. a) Să se calculeze $\int \frac{1}{x(1+x^3)}dx$, $x > 0$.

b) Dacă $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, să se calculeze $\int \frac{f'(x)}{f(x)(1+f^3(x))}dx$.

3. Se consideră funcţiile:

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$, $g(x) = \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right) - \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)$.

a) Să se scrie ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a graficului funcţiei.

b) Să se arate că funcţiile f şi g diferă printr-o constantă şi să se determine această constantă.

c) Să se arate că $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} 8 = \frac{5\pi}{4}$.

Test selectat de:
Prof. Erika Darolţi, C. N. "Vasile Lucaciu"
Prof. Ludovic Longaver, L. T. "Nemeth Laszlo"

Clasa a XII-a M2

Subiectul I

1. Să se arate că $\frac{\log_3 80 - \log_3 5}{\log_3 2} = 4$.

2. Să se calculeze distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = x - 3$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1} - 2 \cdot \sqrt[3]{x-1} = 0$.

4. După doua ieftiniri succesive cu 10% respectiv 20%, preţul unui produs este 396 lei. Să se determine preţul produsului înainte de cele două ieftiniri.

5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi O punctul de intersecţie al diagonalelor. Să se determine numărul real x ştiind că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AO}$.

6. Să se demonstreze că în orice triunghi dreptunghic ABC de arie S şi cu ipotenuza BC, de lungime a, are loc egalitatea $a^2 \cdot \cos B \cdot \cos C = 2S$.

Subiectul II

1. Se consideră determinantul $\triangle(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\triangle(1, 2, 3)$.

b) Să se arate că $\triangle(a, b, c) = abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Ştiind că legea "$*$" este asociativă, să se rezolve ecuaţia $x * x * x = x$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \cdots * \frac{1}{2014}$.

Subiectul III

1. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$.

a) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Să se demonstreze că $\frac{7}{6} \leq f(x) \leq 2$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

2. Se consideră funcţiile f, $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, date prin $f(x) = 3x^2 + 2x + 1 + \ln x$ şi $F(x) = x^3 + x^2 + x \ln x$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f

b) Să se calculeze $\int \frac{f(x) - F(x)}{e^x} dx$, $x \in (0, \infty)$.

Test selectat de:
Prof. Adela Tezeria Pop, C. T. "Aurel Vlaicu"
Prof. Adrian Pop, C. N. "Gheorghe Şincai"

Premianţii

Clasa a VIII-a

Excelenţă. *Bojor Barbu* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul I. *Pop Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Neţa Răzvan* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Horţ Iulia* (Şc. Gim. "Lucian Blaga), *Popa Beatrix* (Şc. Gim. "Dr. Victor Babeş").

Premiul al II-lea. *Buciuman Adrian* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga), *Lucaciu Sergiu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tămâian Andrei* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Teodorescu Aexandru* (Şc. Gim. "Dr. Victor Babeş"), *Palca Mihaela* (Şc. Gim. "Octavian Goga"), Berinde Thomas (Şc. Gim. "Avram Iancu"), *Hagău Iulian* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Lendesch Karina* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Paşca Laura* (Şc. Gim. "Al. I. Cuza"), *Petca Diana* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga"), *Vzsdulski Mihai* (Şc. Gim. "Dr. V. Babeş").

Premiul al III-lea. *Mărieş Maria* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Suciu Răzvan* (Şc. Gim. "Lucian Blaga"), *Colţan Cosmin Raul* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Darolţi*

Larisa (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Dragoş Paul* (Şc. Gim. ”Lucian Blaga”), *Damşa Dinu* (Şc. Gim. ”Nichita Stănescu”), *Dunka Gianina* (Şc. Gim. ”Lucian Blaga”), *Gâta Anamaria* (Şc. Gim. ”Lucian Blaga”), *Glodan Mara* (Şc. Gim. ”Lucian Blaga” Fărcaşa), *Maxim Adriana* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Andreicuţ Mădălina* (Şc. Gim. ”Lucian Blaga” Fărcaşa), *Hossu Oana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Şofric Maria* (Liceul de Artă), *Ofrim Marcus* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Clasa a IX-a

Excelenţă. *Zelina Mihai* (C. N. ”Vasile Lucaciu”).

Premiul I. *Sântejudean Tudor* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Crăciun George* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Rednic Paul* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Chişcă Andrei* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al II-lea. *Kando Edina* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Dunca Dan* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al III-lea. *Mureşan Ionel* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Trif Raluca* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Sălăjanu anamaria* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Oana Laura* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Brânduşe Oana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Chindea Miruna* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Herţeg Alexandra* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Ionaş Emanuela* (L. T. ”Petru Rareş”), *Lenghel Oana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Mariş Oana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Mureşan Diana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Clasa a X-a

Excelenţă. *Cotan Paul* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul I. *Ţînţar Oana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Butnar Adrian* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Chiş Selena* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al II-lea. *Zicher Blanka* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Bob Raul* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Voiţ Radu* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Cordea Claudia* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al III-lea. *Avram Lara* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Kalisch Denisa* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Tyekar Dan* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Ari Paul* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Todoran Larisa* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Oniga Robert* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Onţ Rareş* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Sabou Marcela* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Clasa a XI-a

Excelenţă. *Bud Cristian* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Ciurte Tudor* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul I. *Gotha Güntter* (L. T. ”Nemeth Laszlo”).

Premiul al II-lea. *Şimon Gheorghe Ionuţ* (L. T. ”Bogdan Vodă” Vişeu de Sus).

Premiul al III-lea. *Miclea Andrei* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Clasa a XII-a M1

Excelenţă. *Pop Roxana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul I. *Ignatyuk Florin* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Trif Dan* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Şandor Martin Filip* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Vişovan Adrian.* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al II-lea. *Ofrim Adriana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Topan Andra* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Bozântan Iuliana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Pricop Gabriela* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Bretan Alice* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Medan Florin* (L. T. ”Petru Rareş”), *Ulici Diana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Ciocotişan Iulia* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al III-lea. *Pop Dan* (L. T. ”Petru Rareş”), *Vedinaş Olimpiu* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Conea Andrada* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Iuga Denisa* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Mătieş Ioan* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Petruţ Alexandra* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Wegroszta Andrei* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Iuga Ancuţa* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Turlaş Anuţa* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Culcear Gheorghe* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Clasa a XII-a M2

Excelenţă. *Frâncău Paula* (C. N. ”Vasile Lucaciu”).

Premiul I. *Pricop Dumitriţa* (C. E. ”Nicolae Titulescu”), *Medan Anamaria* (C. N. ”Vasile Lucaciu”).

Premiul al II-lea. *Ile Lidia* (C. E. ”Nicoale Titulescu”), *Lazăr Ioana* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Chereş Cristian* (C. N. ”Vasile Lucaciu”).

Premiul al III-lea. *Avram George* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Satmari Raluca* (C. E. ”Nicolae Titulescu”), *Hozan Dan* (C. T. ”George Bariţiu”), *Pop Mădălina* (C. E. ”Nicolae Titulescu”), *Balasz Noemi* (C. E. ”Nicolae Titulescu”).

Argument 16

Tabăra Judeţeană de Excelenţă
31 august - 5 septembrie 2014, Vaser

În perioada 31 august - 5 septembrie 2014, s-a desfăşurat pe Vaser, Tabăra Judeţeană de Excelenţă la matematică. La această tabără au participat elevi de gimnaziu şi de liceu care au fost clasaţi pe primele locuri la Olimpiada judeţeană de matematică.

Profesorii care au însoţit grupul şi au ţinut lecţii în această tabără au fost: Andrei Bretan (C. N. "Vasile Lucaciu") - directorul taberei, Florin Bojor, Gheorghe Boroica, Nicolae Muşuroia, Adrian Pop (C. N. "Gheorghe Şincai") şi Ştefan Zah (Şc. gim. "Nicolae Iorga").

Subiectele propuse la tesul final, clasele a IX-a, a XI-a şi a XII-a sunt prezentate mai jos.

Clasa a IX-a

1. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{5x^2 - 10x + 7}{2x^2 - 4x + 3}$, $x \in \mathbb{R}$.
a) Rezolvaţi ecuaţia $E(x) = 2$.
b) Calculaţi $E(x_1) + E(x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$.
c) Determinaţi cea mai mică valoare a expresiei $E(x)$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ cu $a^3 + b^3 = 2014ab$. Să se arate că $a + b \leq 2014$.

3. Se consideră triunghiul ABC. Fie A', B', C' simetricele punctelor A, B, C faţă de mijloacele segmentelor $[BG]$, $[CG]$ respectiv $[AG]$.
Să se arate că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate.

Subiect propus de: Prof. Nicolae Muşuroia

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ c & d & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ dat prin relaţia de recurenţă:

$$3n(a_{n+1} - a_n) - 4(a_n + 5) = 5n(9n + 15) - a_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_1 = 4.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+3}}{1 + 8 + 15 + \cdots + (7n - 6)}$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + a \cdot A$, $a \in \mathbb{R}$.
a) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 9ab)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
b) Să se calculeze $(X(a))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiect propus de: Prof. Adrian Pop

Clasa a XII-a

1. a) Daţi un exemplu de funcţie $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ bijectivă şi care are primitive.
b) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie bijectivă. Demonstraţi că f nu are primitive.

2. a) Calculaţi
$$\int x \cdot e^{-2x} dx,\ x \in \mathbb{R} \text{ şi } \int \frac{x \cdot \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \quad x \in (-1, 1).$$
b) Fie $a > 0$, $b < 0$ astfel încât $a^2 + b \leq 0$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie, astfel încât $(f \circ f)(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că f nu are primitive.

3. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Câte legi de compoziţie comutative şi cu element neutru se pot defini pe o mulţime cu n elemente?
b) Pe $M = \mathbb{Z} \times Z$ se consideră operaţia $*$ definită astfel:
$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2).$$
Ştiind că $(M, *)$ este monoid, să se afle elementele simetrizabile ale acestui monoid.

Subiect propus de: Prof. Gheorghe Boroica

Argument 16

Concursul ”Argument” al Colegiului Naţional ”Gheorghe Şincai” Ediţia a V-a

În 8–9 noiembrie 2013 a avut loc la Colegiul Naţional ”Gheorghe Şincai” din Baia Mare cea de-a cincea ediţie a concursului de matematică ”Argument”, cu participarea loturilor de elevi ale unor licee de elită: C. N. ”Liviu Rebreanu” Bistriţa, C. N. ”Andrei Mureşanu” Dej, C. N. ”Alexandru Papiu-Ilarian” Târgu Mureş, C. N. ”Mihai Eminescu” Satu Mare, C. N. ”Silvania” Zalău, C. N. ”Dragoş Vodă” Sighetu Marmaţiei, C. N. ”Vasile Lucaciu” şi C. N. ”Gheorghe Şincai” din Baia Mare. Preşedintele concursului a fost şi de data aceasta dl. conf. univ. dr. Vasile Pop de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca.

Clasa a V-a

Fiecare problemă are un singur răspuns corect

1. Numărul $320 - 4^4 : 8^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 7^2$ este egal cu:
a) 198 b) 83 c) 508 d) 393

2. Numărul $2^{3^0} - 2^{0^3} + (3^5 \cdot 7^4) : (3^4 \cdot 7^3) + 64^3 \cdot 25^3 - 4^9 \cdot 125^2$ este egal cu:
a) 807 b) 100 c) 22 d) 21

3. Diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic număr de 4 cifre distincte este:
a) 8999 b) 8853 c) 8642 d) 8646

4. Suma dintre câtul şi restul împărţirii lui 20.134.030 la 2013 este:
a) 18 b) 1006 c) 106 d) 10006

5. Dacă a, b şi c sunt numere naturale astfel încât $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 99$, atunci numărul $\overline{a9b} + \overline{b9c} + \overline{c9a}$ este egal cu:
a) 1719 b) 1179 c) 936 d) 1000

6. Dacă a şi b sunt numere naturale astfel încât $a^2 + b^3 = 108$ şi $n = 3a + b$, atunci produsul dintre cea mai mică şi cea mai mare valoare pe care o poate avea n este:
a) 990 b) 960 c) 1000 d) 118

7. Ultima cifră a numărului $16^{80} \cdot 2013^{70} + 19^{2014}$ este:
a) 5 b) 9 c) 6 d) 0

8. Restul împărţirii numărului $1 + 2 + \cdots + 2013 + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2012$ la 2013 este:
a) 2 b) 1006 c) 2011 d) 0

Argument 16

La următoarele probleme se cer soluţiile complete

9. Se consideră numerele naturale a şi b. Notăm cu $p(a,b)$ suma puterilor numărului 2 care au exponentul între a şi b, inclusiv a şi b.

a) Calculaţi $p(0,5)$.

b) Determinaţi numărul natural x, ştiind că $p(1,7) = x^2 - 2$.

c) Demonstraţi că numărul $p(0,2012)$ se împarte exact la 7.

10. La o masă rotundă sunt aşezaţi 10 copii, cărora li se împart într-o ordine oarecare 10 cartonaşe numerotate de la 1 la 10.

a) Daţi două exemple de împărţire a cartonaşelor, astfel încât diferenţa pozitivă dintre numerele de pe cartonaşele oricăror doi vecini să fie mai mare sau egală cu 3.

b) Demonstraţi că nu se poate ca, oricum am alege un copil, suma numerelor de pe cartonaşul său şi de pe cele ale vecinilor săi să fie divizibilă cu 3.

Prof. Dana Heuberger

Clasa a VI-a

Fiecare problemă are un singur răspuns corect

1. Cel mai mic multiplu de patru cifre al numărului 11, format cu cifre distincte, este egal cu:

a) 1001 b) 1234 c) 1023 d) 1111

2. Restul împărţirii numărului $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2013}$ la 13 este egal cu:

a) 1 b) 4 c) 0 d) 3^{2014}

3. Cel mai mic număr natural mai mare decât 3 şi care împărţit la 12, 21 respectiv 105, dă restul 3, este egal cu:

a) 3 b) 420 c) 423 d) 7

4. Suma numerelor prime de două cifre mai mici decât 30 este:

a) 101 b) 112 c) 109 d) 139

5. Suma cifrelor celui mai mic multiplu comun al numerelor 42, 144 şi 252 este:

a) 1008 b) 6 c) 10 d) 9

6. Numărul cifrelor numărului $2^{2017} \cdot 5^{2013} + 2013$ este:

a) 10 b) 2013 c) 2014 d) 2015

7. Dacă numerele naturale a, b, c verifică egalitatea $2^a + 4^b + 6^c = 8801$, atunci $a \cdot b \cdot c$ este:

a) 28 b) 0 c) 48 d) 18

8. Se consideră $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ coliniare şi în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 2^0$ cm, $A_2A_3 = 2^1$ cm, $\ldots, A_{10}A_{11} = 2^9$ cm. Dacă $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$ sunt mijloacele segmentelor $[A_1A_2], [A_2A_3], \ldots, [A_{10}A_{11}]$, atunci $B_1B_2 + B_3B_4 + B_5B_6 + \cdots + B_9B_{10}$ este:

a) $2^9 - 1$ b) $\dfrac{2^9 - 1}{2}$ c) B_1B_{10} d) $\dfrac{1023}{2}$

La următoarele probleme se cer soluţiile complete

9. Un număr se numeşte *număr complet* dacă este format cu cifre distincte nenule şi se divide cu fiecare dintre cifrele sale.

a) Să se determine toate *numerele complete* de două cifre.

b) Să se demonstreze că, dacă un *număr complet* conţine cifra 5, atunci el are doar cifre impare.

c) Să se demonstreze că orice *număr complet* are cel mult 7 cifre.

10. Se consideră unghiul alungit AOB. Fie n cel mai mare număr natural pentru care există semidreptele $[OA_1, [OA_2, \ldots, [OA_n$, toate situate în acelaşi semiplan determinat de dreapta AB, astfel încât $m(\sphericalangle AOA_1) = 1^\circ$, $m(\sphericalangle A_1OA_2) = 2^\circ, \ldots, m(\sphericalangle A_{n-1}OA_n) = n^\circ$ şi oricare două dintre unghiurile anterioare au interioarele disjuncte.

a) Să se determine n.

b) Verificaţi dacă există $p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_{p-1}OA_p$ şi $\sphericalangle A_{q-1}OA_q$ să formeze un unghi de $45^\circ 30'$.

Prof. Florin Bojor

Clasa a VII-a

Fiecare problemă are un singur răspuns corect

1. Numărul $\dfrac{|2^{90} - 3^{60}| - |3^{60} - 4^{40}|}{2^0 - 2^{10}} \cdot 2^{-80}$ este egal cu:

a) 4 b) 2 c) 1 d) 23

2. Numărul de soluţii $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale ecuaţiei $x^3 + x^2y = 36$ este:

a) 7 b) 5 c) 6 d) 8

3. Dacă $F + \dfrac{2012^{2013} + 2013^{2012}}{2012^{2012} + 2013^{2013}}$, atunci

a) $F \in \mathbb{N}$ b) $F > 1$ c) $F < 1$ d) $F = 1$

4. Soluţia ecuaţiei $\overline{0,(1x)} + \overline{0,(2x)} + \overline{0,(3x)} + \cdots + \overline{0,(9x)} = x$, $x \in \mathbb{Q}$ este:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

5. Dacă $A = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{100}\right)$, $B = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \dfrac{1}{99}\right)$, atunci $2AB$ este:

a) 1 b) 5 c) 10 d) $0,5$

6. Pe diagonala BD a pătratului $ABCD$ se iau punctele E şi F, astfel încât dreapta AE intersectează latura (BC) în punctul M, dreapta AF intersectează latura (CD) în punctul N şi $CM = CN$. Dacă $BE = 5$ cm, $EF = 6$ cm, atunci lungimea diagonalei pătratului este:

a) 15 cm b) 16 cm c) 17 cm d) 20 cm

7. Înălţimile AA_1 şi BB_1 ale triunghiului ABC se intersectează în H, astfel încât $HA = HB$. Dacă $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm, perimetrul triunghiului ABC este:
a) 17 cm b) 18 cm c) 19 cm d) 21 cm

8. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 15$ cm şi $BC = 45$ cm. Dacă bisectoarele unghiurilor D şi A intersectează latura (BC) în punctele E respectiv F, atunci lungimea lui $[EF]$ este:
a) 15 cm b) 16 cm c) 25 cm d) 30 cm

La următoarele probleme se cer soluţiile complete

9. a) Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x-a}{b+c+d} + \frac{x-b}{a+c+d} + \frac{x-c}{a+b+d} + \frac{x-d}{a+b+c} = 4, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Q}_+^*.$$

b) Fie p un număr prim. Să se determine $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$.

10. Se consideră un punct oarecare O, în interiorul triunghiului ascuţitunghic ABC. Fie M, N, P simetricele punctului O faţă de mijloacele A', B' respectiv C' ale segmentelor $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$.
a) Să se arate că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente într-un punct O'.
b) Să se arate că dacă pentru punctul O', determinat la a), avem $O'A' = O'B' = O'C'$, atunci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
c) Să se arate că dacă O este ortocentrul triunghiului ABC, atunci O' este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$.

Prof. Gheorghe Boroica
Prof. Nicolae Muşuroia

Clasa a VIII-a

Fiecare problemă are un singur răspuns corect

1. Numărul $a = -2\sqrt{49} + \left(\sqrt{289} - 25\right) \cdot \left(-25 + \sqrt{324}\right)^3 : 49$ este egal cu:
a) 154 b) 42 c) 60 d) -14

2. Dublul mediei geometrice a numerelor $x = 4\sqrt{3} - \sqrt{32}$ şi $y = 2\sqrt{12} + 4\sqrt{2}$ este:
a) 32 b) 16 c) 4 d) 8

3. Soluţia ecuaţiei $3\left(\sqrt{2} - 3x\right) - 2\left(1,5 + x\sqrt{2}\right) = 5\left(-x\sqrt{0,32} + 3\sqrt{0,08}\right)$ este:
a) $x = 0,(3)$ b) $x = -3^{-1}$ c) $x = -3$ d) $x = 0,5$

4. Numărul $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ este egal cu:
a) 8 b) $6 + 2\sqrt{3}$ c) $2\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)$ d) $2\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$

5. Dacă $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=13$, atunci:
a) $n=169$ b) $n=144$ c) $n=196$ d) $n=14$

6. Un dreptunghi $ABCD$ are laturile de lungimi 6 cm şi 8 cm. Cercurile înscrise în triunghiurile ABC şi ADC intersectează AC în E şi F. $[EF]$ are lungimea:
a) 1 cm b) 50 mm c) $3,(3)$ cm d) $0,2$ dm

7. În tetraedrul $ABCD$, feţele ABC şi DBC sunt triunghiuri echilaterale de latură a. Fie M mijlocul muchiei $[BC]$. Dacă $AD=9\sqrt{2}$ şi $AM\perp DM$, atunci:
a) $a=10$ b) $a=3\sqrt{3}$ c) $a=6\sqrt{3}$ d) $a=10$

8. Fie mulţimea $A=\{2,3,5\}$. Probabilitatea ca alegând o submulţime a mulţimii A, aceasta să aibă suma elementelor divizibilă cu 5 este:
a) 25% b) $0,4$ c) $\dfrac{3}{7}$ d) $0,375$

La următoarele probleme se cer soluţiile complete

9. a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(ax^2+b)(a+bx^2)=cx^2$, pentru $a=1$, $b=2$, $c=9$.

b) Demonstraţi că ecuaţia $(ax^2+b)(a+bx^2)=cx^2$, $a,b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}$, are o singură rădăcină pozitivă dacă şi numai dacă $(a+b)^2=c$.

10. Pe muchiile (OA), (OB), (OC) ale tetraedrului $OABC$ se consideră punctele A', B' respectiv C', astfel încât $BC\|B'C'$ şi fie G şi G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv $A'B'C'$.

a) Demonstraţi că centrul de greutate al triunghiului $AB'C'$ nu se află pe (OG).

b) Demonstraţi că dacă O, G' şi G sunt coliniare, atunci $(ABC)\|(A'B'C')$.

Prof. Cristian Heuberger

Clasa a IX-a

1. Se consideră în plan punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi M şi se notează cu B_1 simetricul lui M faţă de centrul de greutate al sistemului de puncte $\{A_2, A_3, \ldots, A_n\}$. Analog se definesc punctele $B_1, B_2, \ldots, B_n\}$.

a) Să se arate că dreptele $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ sunt concurente într-un punct I.

b) Să se arate că punctele M, I şi G sunt coliniare (unde G este centrul de greutate al sistemelor de puncte $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$). (Centrul de greutate al unui sistem de puncte $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ este Y definit prin relaţia $\overline{YX}_1+\overline{YX}_2+\cdots+\overline{YX}_k=\overline{0}$.

2. Să se arate că pentru orice numere întregi a, b, c, ecuaţia $3^a\cdot x^2+3^b\cdot x+3^c=0$, nu are rădăcini raţionale.

3. Se consideră şirurile de numere naturale nenule $A = 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, \dots$ (apare fiecare număr impar de atâtea ori cât este numărul), $B = 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ (apare fiecare număr natural de atâtea ori cât este numărul).

Să se arate că al n-lea număr din şirul A este $a_n = 2\left[\sqrt{n-1}\right] + 1$, iar al n-lea număr din şirul B este $b_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$.

Clasa a X-a

1. Fie $(a)_n)$ o progresie aritmetică de numere naturale.

a) Să se arate că dacă unul din termenii progresiei este un pătrat perfect, atunci există o progresie aritmetică de numere naturale $(b)_n$, astfel ca b_n^2 să fie termen al progresiei $(a)_n$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că dacă unul din termenii progresiei $(a)_n$ este un cub perfect, atunci progresia conţine o infinitate de cuburi perfecte.

2. Fie M o mulţime finită şi $\wp(M)$ mulţimea părţilor sale. Să se determine funcţiile $f : \wp(M) \to \wp(M)$ cu proprietatea: $f(X) \cap f(Y) = X \cap Y$, $\forall X, Y \subset M$, $X \neq Y$.

3. Fie f, g, h trei funcţii de gradul doi cu coeficienţi reali. Să se arate că ecuaţia $f(g(h(x))) = 0$ nu poate avea opt rădăcini reale, distincte în progresie aritmetică.

Clasa a XI-a

1. Se consideră şirurile de numere reale $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, definite prin relaţiile de recurenţă: $a_{n+1}\frac{a_n + 2b_n}{3}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, şi $a_0 = 1$, $b_0 = 4$.

a) Să se arate că şirurile sunt monotone şi mărginite.

b) Să se arate că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, astfel că şirul $(c_n)_n$ definit prin $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ este o progresie geometrică.

c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2. a) Să se arate că există $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel ca $\det(XY + YX) > 0$ şi $\det(X^2 + Y^2) < 0$.

b) Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\det(AB + BA) \leq 0$, atunci $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

3. Fie p, q numere raţionale prime între ele, n un număr raţional nenul şi $N = npq$. Se notează cu $S(n, p, q)$ numărul permutărilor $\sigma : \{1, 2, \dots, \mathbb{N}\} \to \{1, 2, \dots, \mathbb{N}\}$ cu proprietăţile:

$\sigma(p) < \sigma(2p) < \sigma(3p) < \cdots < \sigma(npq)$ şi

$\sigma(p) < \sigma(2q) < \sigma(3q) < \cdots < \sigma(npq)$.

a) Să se determine $S(1, 2, 3)$.

b) Să se determine $S(n, p, q)$.

Clasa a XII-a

1. a) Să se arate că nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca $F(0) = 0$ şi $F(-x) \cdot f(x) = x^5$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu primitiva $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţiile: $F(0) = 0$ şi $F(-x) \cdot f(x) = x^7$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea numerelor naturale impare $M = \{1, 3, 5, \dots\}$ se defineşte legea de compoziţie: $x \circ y = 2^{[\log_2 x]}(y - 1) + x$. Să se precizeze dacă legea are proprietăţile:

a) Există element neutru?

b) Este comutativă?

c) Este asociativă?

3. Fie $A = \{((a + c)^2 - (b + d)^2) \cdot ((a - c)^2 + (b - d)^2) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\{\subset \mathbb{Z}$.

a) Să se calculeze valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$. b) Să se arate că mulţimea A este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor întregi.

c) Să se determine elementele inversabile din $(A, \cdot)$.

Notă. *Toate problemele de la clasele IX–XII au ca autor pe domnul conf. univ. dr. Vasile Pop de la Universitatea Tehnică Cluj-Napoca.*

Premianţii concursului "Argument", ediţia a V-a

Clasa a V-a

Premiul I. *Herzal Radu* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Maxim Sonia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Turda Raul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Biriş Erik* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Teglaş Bogdan* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Belous Basil* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Riglea Teodora* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Săsăran Tania* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Mihaşca Rareş* (Şc. Gim. "Lucian Blaga"), *Talpoş Carina* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga").

Menţiune specială. *Farcaş Alex* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Haragîş Horia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ivanciuc Dragoş* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Giuroiu Tudor* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tătaru Mihai* (C. N. "Gheorghe Şincai"), emphŞulean Andrei (C. N. "Vasile Lucaciu").

Menţiune. *Cincean Mădălina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Dragoş Monica* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Ghişe Teodora* (Liceul de Arte), *Szekely Bianca* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Verdeş Mara* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Lujerdean Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Urda Denisa* (Liceul de Arte), *Rob Daniela* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Gîrboan Iulian* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Marc Cristian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Cionte Sergiu Ionuţ* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ivanciuc Adrian* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Maticu Flavia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Revnic Răzvan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Zăgreanu Luca* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Jeler Bogdan* (Şc. Gim. "George Coşbuc").

Clasa a VI-a

Premiul I. *Moldovan Nicolae* (Şc. Gim. "George Coşbuc").

Premiul al II-lea. *Robu Vlad* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Boroica Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Andreicuţ Teofil* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Becsi Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Călin* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Corneştean Jasmina* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Ilieş Iulia* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Menţiune specială. *Giesswien Alexia* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Francioli Daria* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Onea Vlad* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Filipaş Răzvan* (Şc. Gim. nr.1), *Ţiplea Ştefan* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Menţiune. *Uhl Andrada* (C. N. "Mihai Eminescu"), *Roman Ioana* (C. N. "Mihai Eminescu"), *Breban Alexandru* (Şc. Gim. "Nichita Stănescu"), *Dunca Alina* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Rusznak Erika* (Şc. Gim. "Octavian Goga"), *Mociran Iulia* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Palca Robert* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a VII-a

Premiul I. *Zelina Paul* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al II-lea. *Cotârlan Codrin* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Stepan Dacian* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Diaconescu Mălina* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al III-lea. *Mercea Ioana* (C. N. "Gheorghe Şincai") , *Miron Mihnea* (C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare), *Petz Alin* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Matei Bledea Alexandru* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Mureşan Ioan* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Menţiune specială. *David Cătălin* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Buşecan Ioana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bledea Dragoş* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Mardar Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Conţiu Alexandru* (Şc. Gim. "Nicoale Iorga").

Menţiune. *Buzilă-Gârda Andra* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Băban Diana* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Ghişa Remus* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Oneţ George* (C. N. "Mihai Eminescu"), *Şuteu Ionuţ* (Şc. Gim. "Octavian Goga"), *Ardelean Ariana* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Tămîian Rareş* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a VIII-a

Premiul I. *Lucaciu Sergiu* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Pop Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Hagău Iulian* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Mărieş Maria* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tămâian Andrei* (Şc. Gim. "George Coşbuc"), *Cudrici Carina* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Menţiune specială. *Popa Beatrix* (Şc. Gim. "Dr. Victor Babeş"), *Teglaş Marian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Teodorescu Alexandru* (Şc. Gim. "Dr. Victor Babeş"), *Darolţi Larisa* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Palca Mihaela* (Şc. Gim. "Octavian Goga"), *Petca Diana* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga").

Menţiune. *Bojor Barbu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Neţa Răzvan* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga"), *Roşca Oana* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Salamon Timea* (Şc. Gim. "Nicolae Iorga").

Clasa a IX-a

Premiul I. *Buna-Mărginean Alex* (C. N. "Al. Papiu-Ilarian") Târgu Mureş), *Zelina Mihai* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al II-lea. *Sântejudean Tudor* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Nicuşan Andrei* (C. N. "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş).

Menţiune specială. *Vraja Iulian* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Chişcă Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Răzvan* (C. N. "Liviu Rebreanu") Bistriţa.

Menţiune. *Fülop Anna* (C. N. "Liviu Rebreanu" Bistriţa).

Clasa a X-a

Premiul I. *Cotan Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Sabău Vlad* (C. N. "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş), *Butnar Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Danci Bianca Dorina* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Onul Ingrid Fara* (C. N. "Petru Rareş" Beclean), *Florea ătălin* (C. N. "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş).

Menţiune specială. *Teykar Dan* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Galu Bogdan* (C. N. "Andrei Mureşanu" Dej).

Menţiune. *Zicher Blanka* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Chiş Selena* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bonta Florin* (C. N. "Andrei Mureşanu" Dej).

Clasa a XI-a

Premiul I. *Şerban Ştefana* (L. T. "Petru Maior" Reghin), *Moldovan Bogdan* (L. T. "Onisifor Ghibu" Cluj-Napoca).

Premiul al II-lea. *Petruş Andrei* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al III-lea. *Bud Cristian* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Menţiune specială. *Poenar Bianca Liana* (C. N. "Petru Rareş" Beclean), *Nagy Istvan* (C. N. "Silvania" Zalău), *Ciurte Tudor* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Menţiune. *Avram Diana* (C. N. "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş), *Cimpoeş George* (C. N. "Silvania" Zalău), *Miclea Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a XII-a

Premiul I. *Mihaly Vlad Mihai* (C. N. "Mircea Eliade" Sighişoara).

Premiul al II-lea. *Covaci Rareş* (C. N. "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş).

Premiul al III-lea. *Buboi Andrei* (C. N. "Silvania" Zalău).

Menţiune specială. *Buta Rareş* (C. N. "Al. Papiu-Ilarian" Târgu Mureş).

Menţiune. *Cortel Sven* (C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare), *Berce Vasile* (C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare), *Hodis Mircea* (C. N. "Silvania" Zalău).

Argument 16

Concursul "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni 2014

1. Considerăm numerele:

$a = 140 - 3 \times [487 - (15 : 5 + 3) \times 75]$

$b = \{4 + 126 : 9 - [29 - 96 : 6 - (298 - 199) : 11] \times 2\} \times 5$

iar c verifică relaţia $68 + \{4 \times [30 - 18 : c] + 117\} : 5 = 113$.

1) Aflaţi numerele a, b, c;

2) Să se demonstreze că $4 \times a + 2 \times b - 2 \times c$ este egal cu cel mai mic număr de trei cifre distincte care conţine doar cifre pare;

3) Dacă numărul x este dublul produsului dintre succesorul lui a şi predecesorul lui c, să se determine numărul cifrelor de zero în care se termină numărul $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{de\ 10\ ori\ x}$.

2. Suma a trei numere este 3139. Dacă din fiecare număr se scade 1023, se obţin trei diferenţe: prima diferenţă este de două ori mai mare decât a doua diferenţă, iar a treia diferenţă este cât jumătate din a doua diferenţă.

1) Cât este suma celor trei diferenţe?

2) Care sunt cele trei numere?

3. Se consideră şirul de numere naturale: $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

1) Calculaţi suma primilor 16 termeni.

2) Pe ce poziţie în şir apare prima dată 100?

3) Care este al 200-lea termen al şirului?

Testul a fost elaborat de: Prof. Meda Bojor
Prof. Nicolae Muşuroia

Notă. *La concurs au participat aproximativ 100 de elevi de clasa a IV-a de la şcolile generale din Baia Mare.*

Matematică

Test pentru admiterea în clasa a V-a, anul şcolar 2014-2015

1. a) Să se calculeze $2 + 202 \times 6 - 14 \times 15 : 6 - 6 - 24 : 6$.

b) Dacă a este cel mai mic număr de trei cifre, cu cifre distincte, să se calculeze

$$2 + 4 \times [49 : 7 - (111 - 99) : 12 + a : 6] : 2.$$

c) Să se determine numărul natural x care verifică egalitatea:

$$\{[(8 + x - 98) : 2 - 56] \times 6 - 268\} : 2 = 55.$$

2. Într-un depozit încap 50 de tone de marfă. Acesta este aprovizionat de un camion care face o singură cursă pe zi. Camionul plin cântăreşte 7000 kilograme, iar pe jumătate plin cântăreşte 4700 kilograme.

a) Câte kilograme cântăreşte camionul gol? Justificare.

b) Care este cel mai mic număr de zile în care se poate umple depozitul? Justificare.

c) Câte kilograme trebuie să transporte camionul în ultima zi, pentru a umple depozitul, ştiind că în celelalte zile camionul a fost plin?

3. Se consideră şirul: $n, n+5, n+10, n+15, \ldots$, unde n este un număr natural.

a) Să se determine n ştiind că al cincilea termen este 2014.

b) Să se determine n ştiind că suma primilor 20 de termeni este 2010.

c) Să se determine n ştiind că şirul are 2015 termeni, iar termenul din mijloc este egal cu 7049.

Testul a fost elaborat de: Prof. Meda Bojor
Prof. Nicolae Muşuroia

Argument 16

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Să se rezolve în* $\mathbb{N}^3$ *ecuaţia*

$$(x+2y)^2+5x+6y+4=z^2.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Deoarece $x, y \in \mathbb{N}$, avem că

$$(x+2y)^2<z^2<(x+2y+3)^2=(x+2y)^2+6(x+2y)+9$$

şi deci $z \in \{x+2y+1,\ x+2y+2\}$.

Dacă $z=x+2y+1$, ecuaţia se scrie

$$(x+2y)^2+5x+6y+4=(x+2y)^2+2(x+2y)+1$$

de unde rezultă $3x+2y+3=0$, fals.

Dacă $z=x+2y+2$, atunci ecuaţia se scrie

$$(x+2y)^2+5x+6y+4=(x+2y)^2+4(x+2y)+4 \Leftrightarrow x=2y.$$

Aşadar, soluţia problemei este $x=2k$, $y=k$, $z=4k+2$, unde $k \in \mathbb{N}$.

2. *Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia*

$$2^x+3^x+6^x=2x^3+5x^2+5x+3.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie $x \in \mathbb{Z}$ soluţie pentru ecuaţie şi $f(x)=2x^3+5x^2+5x+3$.

Pentru $x \le -2$ avem că $0<2^x+3^3+6^x \le \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{14}{36}<1$ şi $f(x) \in \mathbb{Z}$, deci ecuaţia nu are soluţie.

Numerele $x=-1$, $x=0$ şi $x=2$ sunt soluţii, iar $x=1$ nu este soluţie.

Dacă $x \in \mathbb{N}$, $x \ge 3$, atunci $2^x+3^x+6^x>2x^3+5x^2+5x+3$ (eventual inducţie matematică), deci ecuaţia dată nu are soluţie. Aşadar, $S=\{-1,0,2\}$.

3. *Să se determine cel mai mic număr real a, ştiind că*

$$15xy+10xz+6yz \le a\,xyz,$$

pentru orice numere prime distincte x, y, z.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Relaţia din ipoteză se scrie:

$$\frac{15}{z}+\frac{10}{y}+\frac{6}{x} \le a,\ \forall\, x,y,z \text{ numere prime distincte.}$$

Folosind inegalitatea $C-B-S$, obţinem:

$$E^2 \leq (15^2+10^2+6^2)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right) \overset{ip}{\leq} 361\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right) = \frac{361^2}{30^2},$$

deci $E \leq \dfrac{361}{30}$, cu egalitate dacă

$$\frac{\frac{1}{z}}{15} = \frac{\frac{1}{y}}{10} = \frac{\frac{1}{x}}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 15z = 10y = 6x \\ \{x,y,z\} = \{2,3,5\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Atunci $E \leq E_{\max} = \dfrac{361}{30} \leq a$, deci $a = \dfrac{361}{30}$.

4. *Numărul $N = 100\ldots001$ are 2013 zerouri. Demonstraţi că N^2 se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule.*

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Avem $N = k^2+1$, unde $k = 10^{2007}$. Atunci

$$(k^2+1)^2 = (2k)^2 + (k^2-1)^2,$$

de unde se obţine concluzia.

5. *Numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfac relaţia*

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-z)^2+(y-z)^2} = \sqrt{2}.$$

Aflaţi $x+y$ şi z.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Fie $A(1,3)$, $B(x,y)$, $C(z,z)$ şi dreapta $d: y = x$. Avem, ţinând seama că C parcurge d,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-z)^2+(y-z)^2}$$
$$= AB + BC \geq AC \geq \operatorname{dist}(A,d) = \sqrt{2}.$$

Rezultă că C trebuie să fie proiecţia lui A pe d, adică $C = D(2,2)$.
Rezultă $z = 2$. Din condiţia $B \in AD$, obţinem $x+y = 4$.

6. *Să se rezolve ecuaţia $\left[\sqrt{x}\right] + \sqrt{[x]} = 2\sqrt{x}$.*
(Am notat cu $[\alpha]$ partea întreagă a numărului real α).

Dana Heuberger

Soluţie. Condiţii de existenţă: $x \geq 0$.

I. Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci ecuaţia devine $[\sqrt{x}] = \sqrt{x}$ cu soluţiile $x = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

II. Dacă $x \in (k, k+1)$, cu $k \in \mathbb{N}$, atunci ecuaţia devine $[\sqrt{x}] = 2\sqrt{x} - \sqrt{k}$. Dar $[\sqrt{x}] \leq \sqrt{x}$, deci $2\sqrt{x} - \sqrt{k} \leq \sqrt{x}$, de unde rezultă $x \leq k$, contradicţie. Soluţia este $S = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

7. *Fie X o mulţime cu $|X| = n \geq 4$ şi funcţia $f : X \to X$.*

a) Să se determine f, dacă există $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, astfel încât $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$ cu $|A| = k$, avem $f(A) = A$.

b) Să se demonstreze că nu există f astfel încât $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(X)$, cu $A \cap B = \emptyset$ şi $|A| = |B| = 2$, să avem $f(A) = B$ sau $f(B) = A$.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Fie $a \in X$. Alegem $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b \in X \setminus \{a\}$ distincte.
Fie mulţimile $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a\}$ şi $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b\}$.
Deoarece $f(A) = A$ şi $f(A') = A'$, rezultă

$$\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{k-1})\} = A \cap A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$$

şi apoi $f(a) = a$. Cum $a \in X$ a fost oarecare, rezultă că $f = 1_X$.

b) Presupunem că există o funcţie f ca în enunţ. Presupunem $|X| \geq 6$.
Fie $a, b, c, d, e, f \in X$ distincte, astfel încât $f(\{a, b\}) = \{c, d\}$.
Atunci, $f(\{a, b\}) \neq \{e, f\}$, deci $f(\{e, f\}) = \{a, b\}$.
Deoarece $\{a, c\} \cap \{e, f\} = \emptyset$ şi $f(a) \notin \{e, f\}$, rezultă $f(\{e, f\}) = \{a, c\}$, fals. Aşadar $|X| \leq 5$.

Dacă $X = \{a, b, c, d, e\}$, considerăm că $f(\{a, b\}) = \{c, d\} \neq \{c, e\}$. Obţinem că

$$f(\{c, e\}) = \{a, b\} \tag{1}$$

şi apoi

$$f(\{d, e\}) = \{a, b\}. \tag{2}$$

Deoarece $f(e) \in \{a, b\}$, rezultă $f(\{a, e\}) \neq \{c, d\}$, deci

$$f(\{c, d\}) = \{a, e\}. \tag{3}$$

Din (1) şi (3) deducem că $f(c) = a$, $f(e) = b$ şi folosind (2) obţinem $f(d) = a$. Aşadar $f(\{c, d\}) = \{a\}$, fals. Rezultă că $|X| = 4$.

Fie $X = \{a, b, c, d\}$, cu

$$f(\{a, b\}) = \{c, d\}. \tag{4}$$

Avem $f(\{a, c\}) = \{b, d\}$ sau $f(\{b, d\}) = \{a, c\}$.

i) Dacă $f(\{a, c\}) = \{b, d\}$, din (4) deducem că $f(a) \neq b$, apoi că $f(a) = d$, $f(b) = c$ şi $f(c) = b$, aşadar $f(\{b, c\}) = \{b, c\}$, fals.

ii) Dacă $f(\{b, d\}) = \{a, c\}$, din (4) deducem că $f(b) \neq a$, apoi că $f(b) = c$, $f(a) = d$ şi $f(d) = a$, aşadar $f(\{a, d\}) = \{a, d\}$, fals.

În concluzie, nu există f.

8. *Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu proprietatea $x + y + z = 2013$.*

a) Să se arate că $\sqrt{2013x + yz} \leq \dfrac{2x + y + z}{2}$.

b) *Să se arate că*

$$\frac{1}{\sqrt{2013x+yz}}+\frac{1}{\sqrt{2013y+xz}}+\frac{1}{\sqrt{2013z+xy}}\geq\frac{3}{1342}.$$

Florin Bojor şi Adrian Pop

Soluţie. a) $2013x+yz=(x+y+z)x+yz=x^2+xy+xz+yz=(x+y)(x+z)\Rightarrow$ $\sqrt{2013x+yz}=\sqrt{(x+y)(x+z)}\overset{ineg.mediilor}{\leq}\dfrac{2x+y+z}{2}$.

b) Conform punctului a), avem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2013x+yz}}&\geq\frac{2}{2x+y+z}=\frac{2}{x+2013}\\ \frac{1}{\sqrt{2013y+xz}}&\geq\frac{2}{2y+x+z}=\frac{2}{y+2013}\\ \frac{1}{\sqrt{2013z+xy}}&\geq\frac{2}{2z+x+z}=\frac{2}{z+2013}.\end{aligned}$$

Prin însumare obţinem

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2013x+yz}}+\frac{1}{\sqrt{2013y+xz}}+\frac{1}{\sqrt{2013z+xy}}\\ &\geq 2\left(\frac{1}{x+2013}+\frac{1}{y+2013}+\frac{1}{z+2013}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Folosind inegalitatea lui Titu Andreescu

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\frac{a_3^2}{x_3}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{x_1+x_2+x_3},\quad\forall\, a_i\in\mathbb{R},\ x_i>0,\ i=\overline{1,3},$$

deducem că

$$\frac{1}{x+2013}+\frac{1}{y+2013}+\frac{1}{z+2013}\geq\frac{(1+1+1)^2}{x+y+z+3\cdot 2013}=\frac{3^2}{4\cdot 2013}=\frac{3}{4\cdot 671}.\tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2013x+yz}}+\frac{1}{\sqrt{2013y+xz}}+\frac{1}{\sqrt{2013z+xy}}\\ &\geq 2\left(\frac{1}{x+2013}+\frac{1}{y+2013}+\frac{1}{z+2013}\right)\geq 2\frac{3}{4\cdot 671}=\frac{3}{1342}.\end{aligned}$$

Observaţie. În rezolvare se poate folosi şi inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz.

9. *Fie n un număr natural nenul fixat. Să se determine numerele pozitive $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ştiind că $x_1+2\cdot x_2+\cdots+n\cdot x_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ şi $x_1+x_2^2+\cdots+x_n^n\leq n$.*

Meda Bojor

Soluţie. Se ştie că $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \geq -1$ şi are loc egalitate dacă $x=0$ şi $n \geq 2$ sau $x \geq -1$ şi $n=1$. Atunci

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n &= 1 + x_1 - 1 + (1 + x_2 - 1)^2 + \cdots + (1 + x_n - 1)^2 \\ &\geq 1 + x_1 - 1 + 1 + 2(x_2 - 1) + \cdots + 1 + n(x_n - 1) = n. \end{aligned}$$

Deci avem egalitate în fiecare inegalitate pe care am aplicat-o, de unde $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

10. *Se consideră triunghiul ABC şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Notăm cu A_2, B_2, C_2 intersecţiile segmentelor (AA_1), (BB_1), (CC_1) cu cercul înscris în triunghi. Să se arate că $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ are laturile paralele şi proporţionale cu laturile triunghiului ABC.*

Florin Bojor

Soluţie. Deoarece $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, avem că

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \overrightarrow{0}. \tag{1}$$

Dacă notăm $\overrightarrow{GA_1} = k \cdot \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB_1} = p \cdot \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC_1} = q \cdot \overrightarrow{GC}$, atunci relaţia (1) este echivalentă cu

$$k\overrightarrow{GA} + p\overrightarrow{GB} + q\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (k-q)\overrightarrow{GA} + (p-q)\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}. \tag{2}$$

Dar vectorii $\overrightarrow{GA}$ şi $\overrightarrow{GB}$ sunt necoliniari, deci relaţia (2) $\Leftrightarrow k = p = q \Leftrightarrow \triangle GA_1B_1 \sim \triangle GAB$, $\triangle GB_1C_1 \sim GBC$ şi $GC_1A_1 \sim \triangle GCA \Leftrightarrow$ triunghiul $A_1B_1C_1$ are laturile paralele şi proporţionale cu laturile triunghiului ABC.

11. *Să se determine rădăcinile reale ale ecuaţiei*

$$(x^2 - 2x) \cdot (x^2 - x - 6) \cdot (x^2 - 3x - 4) + 36 = 0.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. $(x^2 - 2x)(x+2)(x-3)(x+1)(x-4) + 36 = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)(x+2)(x-4)(x+1)(x-3) + 36 = 0$
$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 3) + 36 = 0.$

Notăm $y = x^2 - 2x$ şi obţinem
$y(y-8)(y-3) + 36 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 11y^2 + 24y + 36 = 0$
$\Leftrightarrow (y+1)(y-6)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 6.$

Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu
$(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1,$
$x_3 = x_4 = 1 - \sqrt{7}$, $x_5 = x_6 = 1 + \sqrt{7}$.

12. *Fie $a, b \in [0, \pi]$. Să se afle valoarea minimă şi valoarea maximă a expresiei*

$$E(a,b) = 7 - \cos(2a) + 4\cos(2b) - 8\sin a \cdot \cos b - 5\sin a + 10\cos b.$$

Ludovic Longaver

Soluţie.

$$\begin{aligned}E &= 7 - \cos 2a + 4\cos 2b - 8\sin a \cdot \cos b - 5\sin a + 10\cos b\\ &= 2\sin^2 a + 8\cos^2 b - 8\sin a \cdot \cos b - 5\sin a + 10\cos b + 2\\ &= 2(\sin a - 2\cos b)^2 - 5(\sin a - 2\cos b) + 2 = 2\cdot t^2 - 5\cdot t + 2,\\ t &= \sin a - 2\cos b.\end{aligned}$$

$$a, b \in [0, \pi] \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \sin a \le 1 \\ -1 \le \cos b \le 1 \end{cases} \Rightarrow t \in [-2, 3].$$

Considerăm funcţia $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(t) = 2\cdot t^2 - 5\cdot t + 2$.
$E_{\max} = f_{\max} = \max\{f(-2), f(3)\} = \max\{20, 5\} = 20$, cu egalitate pentru $t = -2$.
$E_{\min} = f_{\min} = f\left(\frac{5}{4}\right)$. Se verifică faptul că atât maximul cât şi minimul sunt atinse.

13. *Arătaţi că, dacă $x, y, z > 0$, atunci*

$$\frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} \ge 2(x + y + z).$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Să arătăm mai întâi că:
$\frac{x^2 + y^2}{z} \ge 2x + 2y - 2z$, $\forall\, x, y, z > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2xz + 2yz - 2z^2$, $\forall\, x, y, z > 0$
$\Leftrightarrow (x - z)^2 + (y - z)^2 \ge 0$, $\forall\, x, y, z > 0$, ceea ce este adevărat, cu egalitate pentru $x = y = z$. Atunci avem:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} &\ge 2x + 2y - 2z + 2y + 2z - 2x + 2z + 2x - 2y\\ &= 2(x + y + z),\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

14. *Arătaţi că, dacă $x, y, z > 0$, atunci*

$$\frac{a}{x + y} + \frac{b}{y + z} + \frac{c}{z + x} \le \frac{1}{4}\left(\frac{a + c}{x} + \frac{a + b}{y} + \frac{c + b}{z}\right).$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Avem: $\frac{4}{x + y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\forall\, x, y > 0 \Leftrightarrow 4xy \le (x + y)^2$, $\forall\, x, y > 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \ge 0$, $\forall\, x, y > 0$, adevărat. Avem egalitate pentru $x = y$.

Atunci avem:

$$\frac{a}{x+y}+\frac{b}{y+z}+\frac{c}{z+x}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{x}+\frac{a}{y}+\frac{b}{y}+\frac{b}{z}+\frac{c}{z}+\frac{c}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{a+c}{x}+\frac{b+a}{y}+\frac{c+b}{z}\right),$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x=y=z$.

15. *Să se arate că dacă $x, y, z > 0$, atunci*

$$2xyz+3(x^2+y^2+z^2)+27\ge 6(xy+yz+zx).$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Se observă că $x=y=z=3$ verifică relaţia cerută (avem chiar egalitate). Din principiul cutiei, deducem că cel puţin două dintre numerele x, y, z sunt mai mari sau egale cu 3, sau mai mici sau egale cu 3. Fie acestea x şi y. Atunci, $(x-3)(y-3)\ge 0$, deci $z(x-3)(y-3)\ge 0$, de unde

$$xyz+9z\ge 3xz+3yz,$$

deci

$$2xyz+18z\ge 6xz+6yz.$$

Deoarece $3(x^2+y^2)\ge 6xy$, folosind inegalitatea precedentă, găsim că

$$3(x^2+y^2)+2xyz+18z\ge 6(xy+yz+zx). \tag{1}$$

Cum $3z^2+27\ge 18z$, folosind (1) se obţine inegalitatea cerută.

Clasa a X-a

1. *Să se rezolve ecuaţia* $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]+\sqrt[4]{[x]}=2\sqrt[4]{x}$.
(*Am notat cu* $[\alpha]$ *partea întreagă a numărului real* α).

Dana Heuberger

Soluţie. Condiţii de existenţă: $x\ge 0$.
I. Dacă $x\in\mathbb{N}$, atunci ecuaţia devine $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\sqrt[4]{x}$ cu soluţiile $x=t^4$, $t\in\mathbb{N}$.
II. Dacă $x\in(k,k+1)$, cu $k\in\mathbb{N}$, atunci ecuaţia devine $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{k}$.
Dar $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]\le\sqrt{[\sqrt{x}]}$, deci

$$2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{k}\le\sqrt{[\sqrt{x}]}. \tag{1}$$

Membrul stâng al inegalităţii (1) este pozitiv, deci ridicând la pătrat obţinem:

$$(1)\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{k}+\sqrt{k}\le[\sqrt{x}]\le\sqrt{x},$$

adică $3\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{k} + \sqrt{k} \le 0$. Obţinem că $\frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{k} \le \sqrt[4]{x} \le \sqrt[4]{k}$, deci $x \le k$, contradicţie. Soluţia este $S = \{t^4 \mid t \in \mathbb{N}\}$.

2. *Se consideră funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = g(h(x)) = -x$.*

a) Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + h(-x) = 0$.

b) Să se arate că există o infinitate de funcţii nemonotone f, g, h care verifică relaţia din enunţ.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Deoarece funcţia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = -x$ este bijectivă, rezultă că şi funcţia g este bijectivă şi apoi că $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -g^{-1}(x)$ şi $h(x) = g^{-1}(-x)$, de unde obţinem concluzia.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim funcţiile $f_n, g_n, h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x = -n \\ n, & x = 0 \\ -n, & x = n \\ x, & x \in \mathbb{R}\setminus\{-n, 0, n\} \end{cases}, \quad f_n(x) = -g_n^{-1}(x) = \begin{cases} n, & x = 0 \\ 0, & x = n \\ -n, & x = -n \\ -x, & x \in \mathbb{R}\setminus\{-n, 0, n\} \end{cases}$$

şi $h_n(x) = g_n^{-1}(-x) = \begin{cases} -n, & x = 0 \\ 0, & x = -n \\ n, & x = n \\ -x, & x \in \mathbb{R}\setminus\{-n, 0, n\} \end{cases}$.

3. *Fie $p \ge 2$ un număr natural fixat. Să se rezolve ecuaţia*

$$x\left(1 + 2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} + \cdots + p^{\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{x}(1 + 2^x + 3^x + \cdots + p^x) = p(p+1).$$

Adrian Pop

Soluţie. Condiţie: $x \ne 0$.

Cazul **I**. Dacă $x < 0$, ecuaţia nu are soluţie, deoarece membrul stâng este negativ iar membrul drept este pozitiv.

Cazul **II**. Dacă $x > 0$, ecuaţia devine:

$$x + \frac{1}{x} + \left(x\cdot 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\cdot 2^x\right) + \left(x\cdot 3^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\cdot 3^x\right) + \cdots + \left(x\cdot p^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\cdot p^x\right) = p(p+1).$$

Din inegalitatea mediilor rezultă:

$$x\cdot k^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\cdot k^x \ge 2\sqrt{x\cdot k^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot k^x} = 2\sqrt{k^{x+\frac{1}{x}}} \ge 2k,\ k = \overline{1,p}.$$

Însumând, obţinem:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x\cdot 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\cdot 2^x\right) + \cdots + \left(x\cdot p^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\cdot p^x\right) \ge p(p+1),\ \forall x > 0,$$

cu egalitate dacă $x \cdot k^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x} \cdot k^x$, $k = \overline{1,p}$, $x > 0$. Obţinem $x = 1$.

4. *Să se afle minimul expresiei*

$$E = \log_6^3(2x+3y+1) + \log_6^3(2y+3z+1) + \log_6^3(2z+3x+1),$$

ştiind că $x, y, z > 0$ *şi* $x \cdot y \cdot z = 1$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este convexă, deci

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \le \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}, \ \forall\, a, b, c \ge 0.$$

Atunci

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge \frac{1}{9}(a+b+c)^3, \ \forall\, a, b, c \ge 0.$$

Deoarece $2x + 3y + 1 = x + x + y + y + y + 1 \ge 6\sqrt[6]{xy}$ (inegalitatea mediilor) şi analoagele, folosind şi inegalitatea precedentă, obţinem:

$$\begin{aligned} E &\ge \frac{1}{9}\Big(\log_6(2x+3y+1) + \log_6(2y+3z+1) + \log_6(2z+3x+1)\Big)^3 \\ &\ge \frac{1}{9}\left[\log_6(6 \cdot \sqrt[6]{xy}) + \log_6(6 \cdot \sqrt[6]{yz}) + \log_6(6 \cdot \sqrt[6]{zx}\right]^3 \\ &= \frac{1}{9}\log_6^3\left(6^3 \cdot \sqrt[6]{(xyz)^2}\right) = \frac{27}{9} = 3. \end{aligned}$$

Deoarece pentru $x = y = z = 1$, obţinem că $E = 3$, deducem că minimul expresiei din enunţ este 3.

5. *Să se determine* $a \in \mathbb{R}$ *şi să se rezolve ecuaţia*

$$2^{ax^2-2ax+3} + (x-1)^2 = 4,$$

ştiind că aceasta are o unică soluţie reală.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Ecuaţia se scrie

$$2^{a(x^2-2x)+3} + (x^2-2x) = 3. \tag{1}$$

Dacă notăm $g(x) = x^2 - 2x$, atunci avem că $g(2-x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Aşadar, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ e soluţie, atunci şi $2 - x_0$ e soluţie pentru ecuaţia (1) şi reciproc. Cum ecuaţia are soluţie unică, deducem că $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Atunci din (1) obţinem $2^{-a+3} = 4 \Leftrightarrow a = 1$. Pentru $a = 1$, ecuaţia devine $2^{2+(x-1)^2} + (x-1)^2 = 3 \overset{(x-1)^2=t}{\Longleftrightarrow} 2^{2+t} + t^2 = 3$. Aceasta are o unică soluţie pozitivă $t = 1$, căci membrul stâng este o funcţie strict crescătoare pe $[0, \infty)$, deci $x = 1$ e unica soluţie. Aşadar, $a = 1$ convine.

6. *Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z| = r$. Să se afle minimul expresiei*

$$E(z) = \sqrt{r - Re\, z} + \sqrt{r + Im\, z}\,.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci $|z| = r \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$. Avem:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\sqrt{2r(r-x)} + \sqrt{2r(r+y)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\sqrt{r^2 + x^2 + y^2 - 2rx} + \sqrt{r^2 + x^2 + y^2 + 2ry}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\sqrt{y^2 + (x-r)^2} + \sqrt{x^2 + (y+r)^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2r}}\,(PA + PB) \geq \frac{1}{\sqrt{2r}}\,AB = \sqrt{r}, \end{aligned}$$

unde $P(x, y)$, $A(0, -r)$, $B(r, 0) \in C(0, r)$.
Aşadar, minimul lui $E(z)$ este $\sqrt{r}$ şi se atinge dacă $P = A$ sau $P = B$, adică $z = -ri$ sau $z = r$.

7. *Se consideră tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ şi care nu are feţele perpendiculare. Notăm: $S_1 = S_{[A_2A_3A_4]}$, $S_2 = S_{[A_1A_3A_4]}$, $S_3 = S_{[A_1A_2A_4]}$, $S_4 = S_{[A_1A_2A_3]}$; α_{ij} = unghiul dintre feţele tetraedrului de arie S_i şi S_j, $i, j = \overline{1,4}$, $i \neq j$.*

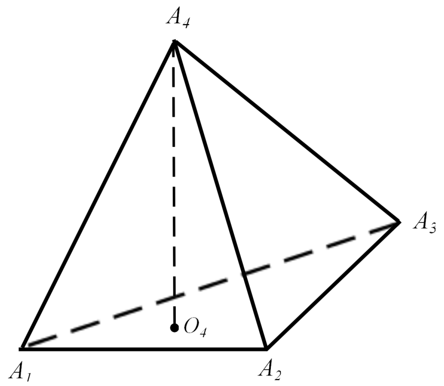
Să se arate că

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{S_i + S_j}{\cos \alpha_{ij}} \geq 9S,$$

unde S reprezintă aria totală a tetraedrului.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie $\{O_4\} = pr_{(A_1A_2A_3)}(A_4)$.



Atunci:
$S_3 \cdot \cos \alpha_{43} = S_{A_1O_4A_2}$;
$S_2 \cdot \cos \alpha_{42} = S_{A_1O_4A_3}$;
$S_1 \cdot \cos \alpha_{41} = S_{A_2O_4A_3}$.

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{\cos\alpha_{41}}+\frac{S_2}{\cos\alpha_{42}}+\frac{S_3}{\cos\alpha_{43}}&=\frac{S_1^2}{S_1\cos\alpha_{41}}+\frac{S_2^2}{S_2\cos\alpha_{42}}+\frac{S_3^2}{S_3\cos\alpha_{43}}\\&=\frac{S_1^2}{S_{A_2O_4A_3}}+\frac{S_2^2}{S_{A_1O_4A_3}}+\frac{S_3^2}{S_{A_1O_4A_2}}\\&\geq\frac{(S_1+S_2+S_3)^2}{S_{A_2O_4A_3}+S_{A_2O_4A_3}+S_{A_1O_4A_2}}=\frac{(S_1+S_2+S_3)^2}{S_4}.\end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned}\sum\frac{S_i+S_j}{\cos\alpha_{ij}}&\geq\frac{(S_1+S_2+S_3)^2}{S_4}+\frac{(S_1+S_2+S_4)^2}{S_3}\\&+\frac{(S_1+S_3+S_4)^2}{S_2}+\frac{(S_2+S_3+S_4)^2}{S_1}\\&\geq\frac{[3(S_1+S_2+S_3+S_4)]^2}{S_1+S_2+S_3+S_4}=9S.\end{aligned}$$

8. *Fie M un punct în interiorul tetraedrului $ABCD$. Notăm cu $d_a = d(M,(BCD))$ şi cu $h_a = d(A,(BCD))$. Să se arate că*

$$\sum\left(\frac{d_a}{h_a}+\frac{h_a}{d_a}\right)\geq 17.$$

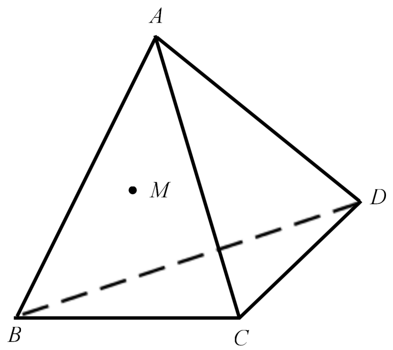
Nicolae Muşuroia

Soluţie.

$$\begin{aligned}\sum\left(\frac{d_a}{h_a}+\frac{h_a}{d_a}\right)&=\sum\frac{d_a}{h_a}+\sum\frac{h_a}{d_a}=\sum\frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}}+\sum\frac{V_{ABCD}}{V_{MBCD}}\\&=1+V_{ABCD}\cdot\sum\frac{1}{V_{MBCD}}\\&=1+(V_{MBCD}+V_{MABC}+V_{MACD}+V_{MABD})\cdot\\&\quad\cdot\left(\frac{1}{V_{MBCD}}+\frac{1}{V_{MABC}}+\frac{1}{V_{MACD}}+\frac{1}{V_{MABD}}\right)\\&\geq 1+16=17\end{aligned}$$

cu egalitate dacă $V_{MBDC} = V_{MABC} = V_{MACD} = V_{MABD}$, adică M = centrul de greutate al tetraedrului.

Argument 16



9. *a) Să se arate că funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} - [x]$ *este bijectivă.*
b) Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}$ *ecuaţia:*

$$\operatorname{tg} x + 2 = 2[\operatorname{tg} x] + \sqrt{3}.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. a) Scriem funcţia f sub forma: $f(x) = x - 2[x]$.

$$(f \circ f)(x) = f(x) - 2[f(x)] = x - 2[x] - 2[x - 2[x]] = x - 4[x] + 4[x] = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

ceea ce înseamnă că funcţia f este inversabilă, deci bijectivă.

b) $\operatorname{tg} x + 2 = 2[\operatorname{tg} x] + \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x - 2[\operatorname{tg} x] = \sqrt{3} - 2[\sqrt{3}] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\operatorname{tg} x) = f(\sqrt{3}) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

10. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\{\log_{27} x\} + \{\log_{27}(3x)\} + \{\log_{27}(9x)\} = 3\log_{27} x - 2.$$

Ludovic Longaver

Soluţie.

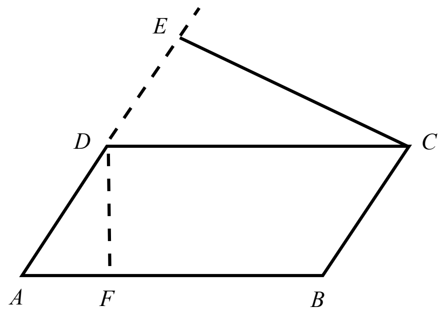
$$\begin{aligned}
&\{\log_{27} x\} + \{\log_{27} 3x\} + \{\log_{27} 9x\}\\
&= 3\log_{27} x - 2 \Leftrightarrow \log_{27} x - [\log_{27} x] + \log_{27} 3x - [\log_{27} 3x] + \log_{27} 9x - [\log_{27} 9x]\\
&= 3\log_{27} x - 2 \Leftrightarrow \log_{27} 27x^3 - [\log_{27} x] - [\log_{27} 3x] - [\log_{27} 9x]\\
&= 3\log_{27} x - 2 \Leftrightarrow [\log_{27} x] + [\log_{27} 3x] + [\log_{27} 9x]\\
&= 3 \Leftrightarrow [\log_{27} x] + \left[\log_{27} x + \frac{1}{3}\right] + \left[\log_{27} x + \frac{2}{3}\right]\\
&= 3 \Leftrightarrow [3\log_{27} x] = 3 \Leftrightarrow 3 \le 3\log_{27} x < 4 \Leftrightarrow 1 \le \log_{27} x < \frac{4}{3} \Leftrightarrow\\
&\qquad \Leftrightarrow 27 \le x < 81 \Leftrightarrow x \in [27, 81).
\end{aligned}$$

11. *Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\widehat{A}) = 60^\circ$. Să se arate că*

$$AC + BD \geq \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,(AB + AD).$$

Gheorghe Râmbu

Soluţie.



Fie $AB = a$, $BC = b$ şi $CE \perp AD$, $E \in AD$, $DF \perp AB$, $F \in AB$. Atunci $DE = \frac{a}{2}$, $CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AF = \frac{b}{2}$ şi $DF = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice EAC şi FDB, obţinem:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,a^2 = a^2 + ab + b^2 \geq \frac{3}{4}\,(a+b)^2,$$

deci

$$AC \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\,(AB + AD) \tag{1}$$

şi

$$BD^2 = FD^2 + FB^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,b^2 = a^2 - ab + b^2 \geq \frac{1}{4}\,(a+b)^2,$$

deci

$$BD \geq \frac{1}{2}\,(AB + AD). \tag{2}$$

Adunând relaţiile (1) şi (2) obţinem:

$$AC + BD \geq \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,(AB + AD),$$

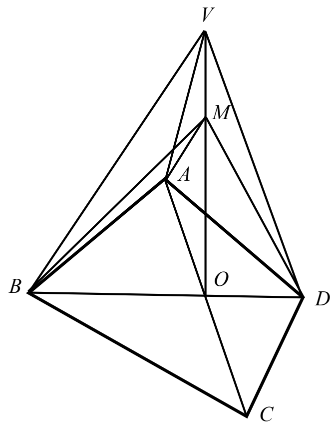
cu egalitate pentru $a = b$, deci $ABCD$ este romb cu $m(\widehat{A}) = \frac{\pi}{3}$.

12. *Fie patrulaterul convex $ABCD$ şi $\{O\} = AC \cap BD$. Pe planul patrulaterului se ridică o perpendiculară în punctul O şi pe care se ia un punct V. Considerând un punct $M \in (VO)$, să se arate că*

$$V_{[VMAB]} = V_{[VMAD]} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{[ABC]} = \mathcal{A}_{[ADC]}.$$

Gheorghe Râmbu

Soluţie.



$$\begin{aligned}
V_{[VMAB]} = V_{[VMAD]} &\Leftrightarrow V_{[VOAB]} - V_{[MOAB]} = V_{[VOAD]} - V_{[MOAD]} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}\,|VO|\,A_{[OAB]} - \frac{1}{3}\,|MO|\,A_{[OAB]} = \frac{1}{3}\,|VO|\,A_{[OAD]} - \frac{1}{3}\,|MO|\,A_{[OAD]} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}\,(|VO| - |MO|)\,A_{[OAB]} = \frac{1}{3}\,(|VO| - |MO|)\,A_{[OAD]} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}\,|VM|\,A_{[OAB]} = \frac{1}{3}\,|VM|\,A_{[OAD]} \Leftrightarrow A_{[OAB]} = A_{[OAD]} \\
&\Leftrightarrow d(B, AC) = d(D, AC) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,d(B, AC)\,|AC| = \frac{1}{2}\,d(D, AC)\,|AC| \\
&\Leftrightarrow A_{[ABC]} = A_{[ADC]}.
\end{aligned}$$

13. *Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia*

$$\left[\frac{2^a}{\{2^a\}}\right] = 2.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. Fie $2^a = x$. Este necesar ca $\{x\} \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$.

$\left[\dfrac{x}{\{x\}}\right] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq \dfrac{x}{\{x\}} < 3 \Rightarrow x > 0$ şi $2 \cdot \{x\} \leq x < 3 \cdot \{x\}$. Atunci $0 < x < 3\{x\} < 3 \Rightarrow [x] \in \{0, 1, 2\}$.

Cazul **I**. $[x] = 0 \Rightarrow \{x\} = x \Rightarrow 2 \cdot x \leq x < 3 \cdot x \Rightarrow x \in \emptyset$.

Cazul **II**. $[x] = 1 \Rightarrow \{x\} = x - 1 \Rightarrow 2(x-1) \leq x < 3(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

Cazul **III**. $[x] = 2 \Rightarrow \{x\} = x - 2 \Rightarrow 2(x-2) \leq x < 3(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow$ $x \in (3, 4)$, nu se acceptă.

Soluţia ecuaţiei este $x \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$, deci $\dfrac{3}{2} < 2^a < 2 \Leftrightarrow a \in \left(\log_2 \dfrac{3}{2}; 1\right)$.

14. *Să se determine numerele $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că*

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt[3]{a_3} + \cdots + \sqrt[n]{a_n} = \frac{n \sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Pentru $n = 1$, $a_1 = \dfrac{\sqrt{a_2}}{2} \Rightarrow a_2 = 2^2$. Din

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt[3]{a_3} + \cdots + \sqrt[n]{a_n} = \frac{n \sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{2}$$

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt[3]{a_3} + \cdots + \sqrt[n]{a_n} + \sqrt[n+1]{a_{n+1}} = \frac{(n+1) \sqrt[n+2]{a_{n+2}}}{2}$$

rezultă

$$\sqrt[n+1]{a_{n+1}} = \frac{(n+1) \sqrt[n+2]{a_{n+2}} - n \sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{2},$$

deci

$$\begin{cases} \sqrt[n+2]{a_{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+1} \sqrt[n+1]{a_{n+1}}, & n \in \mathbb{N}^* \\ a_1 = 1, & a_2 = 2^2 \end{cases}.$$

Folosind metoda inducţiei matemeatice, rezultă $a_n = n^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

15. *Fie M, N, P, Q puncte coplanare situate pe muchiile (AB), (BC), (CD), (DA) ale tetraedrului $ABCD$. Să se arate că*

$$MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM \geq$$
$$\geq 16 \cdot AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ \sin \frac{\widehat{ABC}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{BCD}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{CDA}}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{DAB}}{2}.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. În $\triangle BMN$:

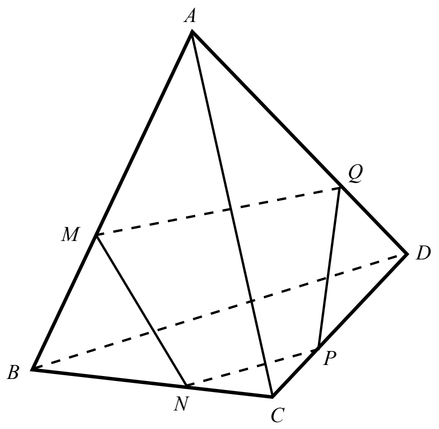
$$MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2BM \cdot BN \cdot \cos B \geq$$
$$\geq 2BM \cdot BN - 2BM \cdot BN \cdot \cos B = 4BM \cdot BN \cdot \sin^2 \frac{B}{2}$$

cu egalitate pentru $BM = BN$.

Deci $MN^2 \geq 4BM \cdot BN \cdot \sin^2 \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$ şi în mod analog obţinem:

$$NP^2 \geq 4 \cdot CN \cdot CP \cdot \sin^2 \frac{\widehat{BCD}}{2}$$

$$PQ^2 \geq 4 \cdot DP \cdot DQ \cdot \sin^2 \frac{\widehat{CDA}}{2}$$
$$QM^2 \geq 4 \cdot QA \cdot AM \cdot \sin^2 \frac{\widehat{DAB}}{2}.$$



Prin înmulţire rezultă:

$$MN^2 \cdot NP^2 \cdot PQ^2 \cdot QM^2 \geq 4^4 \cdot AM \cdot MB \cdot BN \cdot NC \cdot CP \cdot PD \cdot DQ \cdot QA \cdot$$
$$\cdot \sin^2 \frac{\widehat{ABC}}{2} \cdot \sin^2 \frac{\widehat{BCD}}{2} \cdot \sin^2 \frac{\widehat{CDA}}{2} \cdot \sin^2 \frac{\widehat{DAB}}{2}.$$

Dar $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{PQ}{QA} = 1$. Rezultă:

$$MN^2 \cdot NP^2 \cdot PQ^2 \cdot QM^2 \geq 4^4 AM^2 \cdot BM^2 \cdot CP^2 \cdot DQ^2 \cdot$$
$$\cdot \sin^2 \frac{\widehat{ABC}}{2} \cdot \sin^2 \frac{\widehat{BCD}}{2} \cdot \sin^2 \frac{\widehat{CDA}}{2} \cdot \sin^2 \frac{\widehat{DAB}}{2},$$

şi de aici se obţine inegalitatea cerută.

Clasa a XI-a

1. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, iar $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcţie surjectivă şi continuă.*

Demonstraţi că cel puţin una din mulţimile $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) = x\}$, $B = \{x \in [a, b] \mid f(x) = a + b - x\}$, are cardinalul mai mare sau egal cu 2.

Cristian Heuberger

Soluţie. Ştim că mulţimile A şi B sunt nevide. Presupunem că A şi B au fiecare câte un singur element. Considerăm $A = \{c\}$ şi $B = \{d\}$. De asemenea funcţia f fiind surjectivă, există $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha \neq \beta$, astfel încât $f(\alpha) = a$ şi $f(\beta) = b$.

Fie funcţiile $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - x$, $\psi(x) = f(x) - (a + b - x)$. Aceste două funcţii sunt continue. Deoarece singura rădăcină a funcţiei φ este c, rezultă că φ are semn constant pe $[a, c]$, respectiv pe $[c, b]$. Cum $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$ şi $\varphi(b) = f(b) - b \leq 0$, deducem că $\varphi(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, c]$ şi $\varphi(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [c, b]$, sau altfel, $f(x) \geq x$, $\forall\, x \in [a, c]$ şi $f(x) \leq x$, $\forall\, x \in [c, b]$.
Deoarece $f(\alpha) = a \leq \alpha$, rezultă $\alpha \in [c, b]$, şi deoarece $f(\beta) = b \geq \beta$, rezultă $\beta \in [a, c]$. Cum $\alpha \neq \beta$, obţinem

$$\alpha > \beta. \tag{1}$$

Deoarece singura rădăcină a funcţiei ψ este d, rezultă că ψ are semn constant pe $[a, d]$, respectiv pe $[d, b]$.
Cum $\psi(a) = f(a) - (a+b-a) = f(a) - b \leq 0$ şi $\psi(b) = f(b) - (a+b-b) = f(b) - a \geq 0$, deducem că $\psi(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [a, d]$ şi $\psi(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [d, b]$, sau altefl, $f(x) \leq a + b - x$, $\forall\, x \in [a, d]$ şi $f(x) \geq a + b - x$, $\forall\, x \in [d, b]$.
Deoarece $f(\alpha) = a = a + b - b \leq a + b - \alpha$, rezultă $\alpha \in [a, d]$, şi deoarece $f(\beta) = b = a + b - a \geq a + b - \beta$, rezultă $\beta \in [d, b]$. Cum $\alpha \neq \beta$, obţinem

$$\alpha < \beta. \tag{2}$$

Relaţiile (1) şi (2) fiind contradictorii, rezultă că presupunerea făcută iniţial este falsă. Aşadar, cel puţin una dintre mulţimile A, B are cardinalul mai mare sau egal cu 2.

2. *Fie $\alpha \in (0, 1]$. Demonstraţi că:*

a) există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_0$, există şi este unic $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, cu proprietatea că $\sin^n x_n + \cos^n x_n = \alpha$;

b) şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent şi calculaţi limita lui.

Cristian Heuberger

Soluţie. Pentru $n \geq 3$, funcţia $f_n : \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$ este strict descrescătoare. Într-adevăr

$$f_n'(x) = (\sin^n x + \cos^n x)' = n \cdot \sin x \cdot \cos^{n-1} x (\operatorname{tg}^{n-2} x - 1) \leq 0,$$

singurul punct critic fiind $x = \dfrac{\pi}{4}$,.

a) *Cazul* **I**. $\alpha = 1$. Alegem $n_0 = 3$.

Pentru orice $n \geq n_0$, luând $x_n = 0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, avem $\sin^n 0 + \cos^n 0 = 1 = \alpha$.
x_n este unic deoarece f_n este strict monotonă.

Cazul **II**. $\alpha < 1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\frac{\pi}{4}+\cos^n\frac{\pi}{4}\right) = 0 < \alpha$. Există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $n_0 \geq 3$ astfel încât $\sin^{n_0}\frac{\pi}{4}+\cos^{n_0}\frac{\pi}{4} < \alpha$. Pentru fiecare $n \geq n_0$, avem:

$$f_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^n\frac{\pi}{4}+\cos^n\frac{\pi}{4} \leq \sin^{n_0}\frac{\pi}{4}+\cos^{n_0}\frac{\pi}{4} < \alpha.$$

Dar $f_n(0) = 1 > \alpha$ şi cum f_n fiind continuă, are proprietatea lui Darboux, rezultă că există $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel încât $f_n(x_n) = \alpha$. Funcţia f_n fiind strict monotonă, x_n este unic.

b) *Cazul* **I**. $\alpha = 1$. Şirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ este constant nul şi deci este convergent la 0.
Cazul **II**. $\alpha < 1$

$$\alpha = f_n(x_n) = \sin^n x_n + \cos^n x_n + \cos^n x_n \geq \sin^{n+1} x_n + \cos^{n+1} x_n = f_{n+1}(x_n).$$

Cum însă $\alpha = f_{n+1}(x_{n+1})$, rezultă $f_{n+1}(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_n)$ şi de aici $x_{n+1} \leq x_n$. Şirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ fiind descrescător şi mărginit este convergent. Fie $l \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ limita şirului. Dacă am avea $l \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, atunci

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}(\sin^n x_n + \cos^n x_n) = (\sin l)^\infty + (\cos l)^\infty = 0 + 0 = 0,$$

ceea ce nu convine. Aşadar $l = 0$.

3. *Se consideră şirurile de numere strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = a_{n+1} - \frac{a_n}{1+a_n}$.*

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell > 0$, să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita acestuia.

Dana Heuberger

Soluţie. Ştim că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell > 0$. Dacă vom demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$, atunci, trecând la limită în relaţia din enunţ, vom obţine $\ell = a - \frac{a}{1+a}$, deci limita ar putea fi $a = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + 4\ell}}{2} > 0$.

Notăm $\alpha = \frac{1}{1+a} \in (0,1)$. Avem $1 - \alpha = \frac{a}{1+a} > 0$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*,\ \text{astfel încât}\ \forall\, n \geq n_\varepsilon,\ |b_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha). \tag{1}$$

Avem

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a|-\left|\frac{a}{1+a}-\frac{a_n}{1+a_n}\right| &\le \left|a_{n+1}-a+\frac{a}{1+a}-\frac{a_n}{1+a_n}\right|\\ &=\left|a_{n+1}-\frac{a_n}{1+a_n}-\left(a-\frac{a}{1+a}\right)\right|=|b_n-\ell|\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a| &\le |b_n-\ell|+\left|\frac{a_n}{1+a_n}-\frac{a}{1+a}\right|\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)+\frac{|a_n-a|}{(1+a_n)(1+a)}<\frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)+\frac{|a_n-a|}{1+a}\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

Notând $\beta=\dfrac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)$, din (2) obţinem: $\forall\, n\ge n_\varepsilon,\ |a_{n+1}-a|\le\beta+\alpha|a_n-a|$. Inductiv, deducem că

$$\forall\, n>n_\varepsilon,\ |a_n-a|\le\beta(1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-n_\varepsilon-1})+\alpha^{n-n_\varepsilon}|a_{n_\varepsilon}-a|,$$

adică

$$\forall\, n>n_\varepsilon,\ |a_n-a|\le\frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha^{n-n_\varepsilon})+\alpha^{n-n_\varepsilon}|a_{n_\varepsilon}-a|$$

sau

$$\forall\, n>n_\varepsilon,\ |a_n-a|\le\frac{\varepsilon}{2}+\alpha^{n-n_\varepsilon}\left(|a_{n_\varepsilon}-a|-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Deoarece $\alpha^n\to 0$, există $\exists\, n'_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\forall\, n\ge n'_\varepsilon,\ \alpha^{n-n_\varepsilon}\left(|a_{n_\varepsilon}-a|-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ cu $n>\max(n_\varepsilon,n'_\varepsilon)$, obţinem

$$|a_n-a|\le\frac{\varepsilon}{2}+\alpha^{n-n_\varepsilon}\left(|a_{n_\varepsilon}-a|-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\varepsilon.$$

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\dfrac{\ell+\sqrt{\ell^2+4\ell}}{2}$.

4. *Fie* $0<m<M$ *şi* $(a_n)_{n\ge0}$ *un şir de numere reale cu proprietatea* $m<a_n<M$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. *Definim şirul* $(x_n)_{n\ge0}$ *prin* $x_0>0$ *şi* $x_{n+1}=\dfrac{x_n^3+a_n}{x_n^2}$, $\forall\, n\ge0$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Florin Bojor

Soluţie. Se demonstrează prin inducţie că $x_n>0$, $\forall\, n\ge0$.

Atunci $x_{n+1}-x_n=\dfrac{a_n}{x_n^2}>0$, $\forall\, n\ge0$, deci şirul $(x_n)_{n\ge0}$ este strict crescător.

Presupunem că este mărginit superior, atunci el va fi convergent, deci $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ell\in\mathbb{R}$. Dar şirul $(a_n)_{n\ge0}$ este mărginit, deci are un subşir convergent, fie acesta $(a_{k_n})_{n\geq 0}$ şi notăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \ell_1$. Pentru $n := k_n$, relaţia de recurenţă devine $x_{k_n+1} = \dfrac{x_{k_n}^3 + a_{k_n}}{x_{k_n}^2}$, $\forall\, n \geq 0$ şi trecând la limită vom avea $\ell = \dfrac{\ell^3 + \ell_1}{\ell^2} \Leftrightarrow \ell_1 = 0$, ceea ce este fals deoarece $\ell_1 \geq m$. Deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior şi, fiind strict crescător, are limita $+\infty$.

Din lema lui Stolz-Cesaro avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n^2 + 2\frac{a_n}{x_n} + \frac{a_n^2}{x_n^4} - x_n^2 \right) = 0,$$

deoarece $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}} = 0$.

5. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii şi $x_0 \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $k > 0$ şi o vecinătate V a lui x_0, astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq k|g(x) - g(y)|$, $\forall\, x, y \in V$. Dacă funcţia g are limita finită în x_0, să se demonstreze că funcţia f are limită finită în x_0.*

Meda şi Florin Bojor

Soluţie. Fie $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ şi $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, atunci avem că $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \ell$.

Deoarece V este o vecinătate a lui x_0, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V$, $\forall\, n \geq n_0$. Dar şirul $(g(x_n))_{n\geq 0}$ este convergent, prin urmare este un şir fundamental.

Fie $\varepsilon > 0$, atunci $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|g(x_m) - g(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{k}$, $\forall\, m, n \geq n_1$. Atunci, pentru orice $m, n \geq \max\{n_0, n_1\}$ avem că

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leq k|g(x_m) - g(x_n)| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon,$$

adică şirul $(f(x_n))_{n\geq 0}$ este fundamental, deci convergent. În consecinţă, pentru orice şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$, de numere cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem că şirul $(f(x_n))_{n\geq 0}$ este convergent. Vom arăta că toate aceste şiruri au aceiaşi limită.

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Atunci există $n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n, y_n \in V$, $\forall\, n \geq n_2$, atunci, din ipoteză, avem că

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq k|g(x_n) - g(y_n)|, \quad \forall\, n \geq n_2.$$

Trecând la limită se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \leq k \lim_{n\to\infty} |g(x_n) - g(y_m)| = k|\ell - \ell| = 0,$$

adică $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. Prin urmare, funcţia f are limită în x_0.

6. *Fie n un număr natural nenul şi p, q două numere prime distincte.*

a) Să se dea un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ cu proprietatea că matricea $p \cdot A + q \cdot I_n$ nu este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

b) Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, atunci matricea $p \cdot A + q \cdot I_n$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. a) Dacă alegem $A = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{q}{p} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\dfrac{q}{p} & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn} & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde elementele de pe liniile $L_3, L_4, \dots, L_n$ sunt numere arbitrare din $\mathbb{Q}$, atunci matricea $p \cdot A + q \cdot I_n$ are primele două linii identice, deci aceasta nu este inversabilă.

b) Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ şi $B = p \cdot A + q \cdot I_n$. Atunci

$$\det(B) = \begin{vmatrix} p\cdot a_{11}+q & p\cdot a_{12} & \dots & p\cdot a_{1n} \\ p\cdot a_{21} & p\cdot a_{22}+q & \dots & p\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p\cdot a_{n1} & p\cdot a_{n2} & \dots & p\cdot a_{nn}+q \end{vmatrix} = \mathcal{M}_p + q^n \neq 0,$$

deci B este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

7. *Fie n un număr natural nenul şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 - A + a \cdot I_n = \mathcal{O}_n$, unde $a \in \mathbb{C}^*$.*

i) Să se arate că A este inversabilă.

ii) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_n \in \mathbb{C}$, astfel încât

$$A^n + a^n \cdot A^{-n} = x_n \cdot I_n$$

şi apoi stabiliţi relaţiile $x_{2n} = x_n^2 - 2a^n$ şi $x_{3n} = x_n^3 - 3a^n \cdot x_n$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. a) Din ipoteză $A(A - I_n) = (A - I_n)A = -a \cdot I_n$, deci A este inversabilă şi $A^{-1} = -\dfrac{1}{a}(A - I_n)$.

b) Înmulţind relaţia din ipoteză cu A^{-1}, obţinem $A + a \cdot A^{-1} = I_n$, deci $x_1 = 1$. Ridicând la pătrat egalitatea $A + a \cdot A^{-1} = I_n$, găsim $A^2 + a^2 \cdot A^{-2} = (1 - 2a)I_n$. Presupunând că $A^{k-1} + a^{k-1}A^{-(k-1)} = x_{k-1} \cdot I_n$ şi $A^k + a^k \cdot A^{-k} = x_k \cdot I_n$, avem:

$$\begin{aligned} A^{k+1} + a^{k+1} \cdot A^{-(k+1)} &= (A^k + a^k \cdot A^{-k})(A + a \cdot A^{-1}) - a(A^{k-1} + a^{k-1} \cdot A^{-(k-1)}) \\ &= x_k \cdot I_n(A + a \cdot A^{-1}) - a \cdot x_{k-1} \cdot I_n = (x_k - a \cdot x_{k-1})I_n, k \ge 2. \end{aligned}$$

Aşadar, are loc concluzia dacă $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - 2a$ şi $x_{n+1} = x_n - a \cdot x_{n-1}$, $\forall\, n \ge 2$.

Ridicând la pătrat relaţia $A^n + a^n \cdot A^{-n} = x_n \cdot I_n$, obţinem

$$A^{2n} + a^{2n}A^{-2n} + 2a \cdot I_n = x_n^2 \cdot I_n,$$

deci $x_{2n} = x_n^2 - 2 \cdot a^n$.
Din $A^n + a^nA^{-n} = x_n \cdot I_n$, rezultă că $(A^n + a^n \cdot A^{-n})^3 = x_n^3 \cdot I_n$, deci

$$x_{3n} \cdot I_n + 3A^n \cdot a^nA^{-n}(A^n + a^nA^{-n}) = x_n^3 \cdot I_n,$$

de unde

$$x_{3n} = x_n^3 - 3a^n \cdot x_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

8. *Arătaţi că, dacă $A_1A_2\dots A_n$ este un poligon convex, atunci are loc inegalitatea:*

$$\sqrt{\cos\frac{A_1}{2}} + \sqrt{\cos\frac{A_2}{2}} + \cdots + \sqrt{\cos\frac{A_n}{2}} \le n\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}}\,.$$

Adrian Pop

Soluţie. Fie $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{\cos x}$; $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$;

$$f''(x) = \frac{-1 - \cos^2 x}{4\cos x\sqrt{\cos x}} < 0 \Rightarrow f \text{ concavă}, \ \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Din inegalitatea lui Jensen aplicată funcţiei f pentru $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = \dfrac{1}{n}$ şi $x_1 = \dfrac{A_1}{2}$, $x_2 = \dfrac{A_2}{2}, \dots, x_n = \dfrac{A_n}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2} + \cdots + \frac{A_n}{2}}{n}\right) \ge \frac{f\left(\frac{A_1}{2}\right) + f\left(\frac{A_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{A_n}{2}\right)}{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\cos\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{2n}} \ge \frac{\sqrt{\cos\frac{A_1}{2}} + \sqrt{\cos\frac{A_2}{2}} + \cdots + \sqrt{\cos\frac{A_n}{2}}}{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\cos\frac{A_1}{2}} + \sqrt{\cos\frac{A_2}{2}} + \cdots + \sqrt{\cos\frac{A_n}{2}} \le n\sqrt{\cos\frac{\pi(n-2)}{2n}}$$

$$= n\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)} = n\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\cos\frac{A_1}{2}} + \sqrt{\cos\frac{A_2}{2}} + \cdots + \sqrt{\cos\frac{A_n}{2}} \le n\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}}\,.$$

9. *Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $Tr(A) = \det(A) = 1$. Să se calculeze*

$$\det(A - I_2) \cdot \det(A - \varepsilon \cdot I_2) \cdot \det(A - \varepsilon^2 \cdot I_2),$$

unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Marian Cârstea, Râmnicu Vâlcea

Soluţie. Fie $f = \det(A - XI_2)$, deci $f = X^2 - X \cdot Tr(A) + \det(A)$.
Cum $Tr(A) = \det(A) = 1$, obţinem $f = X^2 - X + 1$.
Cum $f(1) = 1$, $f(\varepsilon) = \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = -2\varepsilon$ şi $f(\varepsilon^2) = \varepsilon - \varepsilon^2 + 1 = -2\varepsilon^2$.

Prin urmare,

$$\det(A - I_2)\det(A - \varepsilon I_2)\det(A - \varepsilon^2 I_2) = f(1) \cdot f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon^2) = 4\varepsilon^3 = 4.$$

10. *Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, iar $a, b \in \mathbb{R}$.*

Să se arate că, dacă şirurile de termen general $y_n = \sqrt{x_n} \cdot \sin x_n + a$ şi $z_n = \sqrt{x_n} \cdot \cos x_n + b$ sunt convergente, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Marian Cârstea, Râmnicu Vâlcea

Soluţie. Dacă şirul y_n este convergent, rezultă că şirul $(\sqrt{x_n}\sin x_n)_{n\geq 0}$ e convergent, de unde şirul $(x_n \sin^2 x_n)_{n\geq 0}$ e convergent. Analog se obţine că şirul $(x_n \cos^2 x_n)_{n\geq 0}$ e convergent. Prin urmare, şirul $(x_n \cdot \sin^2 x_n + x_n \cdot \cos^2 x_n)_{n\geq 0}$ e convergent, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ e convergent.

11. *Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 2$, $a_2 = 12$ şi $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} + 4 \cdot a_n$, $n \geq 1$. Să se cerceteze existenţa limitei pentru şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \cos\left(\dfrac{a_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right)$.*

Ludovic Longaver

Soluţie. Observăm că $a_1 \vdots 2$, $a_2 \vdots 2^2$. Arătăm prin inducţie că $a_n \vdots 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $P(n) : a_n \vdots 2^n$. Întrucât $P(1)$ şi $P(2)$ sunt adevărate, şi din presupunerea că $a_k \vdots 2^k$, $a_{k+1} \vdots 2^{k+1}$, rezultă că $a_{k+2} = 2 \cdot a_{k+1} + 4 \cdot a_k = 2 \cdot 2^{k+1} \cdot z_k + 4 \cdot 2^k \cdot u_k = 2^{k+2}(z_k + u_k)$, $z_k, u_k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_{k+2} \vdots 2^{k+2}$.
Din relaţia $a_n = 2^n \cdot p_n$, $p_n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, obţinem că

$$x_n = \cos\left(\frac{a_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right) = \cos\left(\frac{2^n \cdot p_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right) = \cos(2 \cdot p_n \cdot \pi) = \cos 0 = 1,$$

este un şir convergent la 1.

12. *Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2n-3} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{2n-5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} \cdot \dfrac{1}{1}$.*

a) Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$;

b) Să se arate că şirul $\left(n \cdot a_n - \ln\left(2 \cdot \sqrt{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

Ludovic Longaver

Soluţie.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}\\
&= \frac{1}{2n}\left[\frac{(2n-1)+1}{1(2n-1)}+\frac{(2n-3)+3}{3(2n-3)}+\frac{(2n-5)+5}{5(2n-5)}+\cdots+\frac{1+(2n-1)}{(2n-1)1}\right]\\
&= \frac{1}{2n}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right]\Rightarrow\\
a_n &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).
\end{aligned}$$

Fie $x_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$, $y_n=n\Rightarrow a_n=\frac{x_n}{y_n}$. Şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi nemărginit superior

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0.$$

Pe baza Teoremei Stolz-Cesaro, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita 0.
Se cunoaşte faptul că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$, $c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ este convergent, cu limita constantă C ($C\approx 0,57721$)

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=\\
&c_{2n}+\ln(2n)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)-\ln\sqrt{n}\\
&=c_{2n}-\frac{1}{2}\,c_n+\ln(2\sqrt{n})\\
&\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(n\cdot a_n-\ln(2\sqrt{n}))=\lim_{n\to\infty}\left(c_{2n}-\frac{1}{2}\,c_n\right)=\frac{C}{2}\,.
\end{aligned}$$

13. *Fie matricea*

$$A=\begin{pmatrix}1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2\\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2\\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4\end{pmatrix},$$

unde $a,b,c\in\mathbb{R}$. *Să se arate că*

$$\det(A)=(c-a)^2(c-b)^2(b-a)^2.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. Determinantul matricei $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}$ este de tip Vandermonde.

Avem

$$\begin{aligned}{}^tB\cdot B &= \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2\\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2\\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\det = \det[{}^tB\cdot B] = \det[{}^tB]\det B = (\det B)^2 = (c-a)^2(c-b)^2(b-a)^2.$$

14. *Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3+2A^2=\mathcal{O}_n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$ este fixat.*
Să se arate că, dacă matricea I_n-A este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, atunci $\det(A^2+3A+3I_n)=3^n$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Din ipoteză, există $(I_n-A)^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, astfel încât $(I_n-A)(I_n-A)^{-1}=I_n$. Trecând la determinanţi, găsim că

$$\det(I_n-A)\in\{\pm1\}. \tag{1}$$

Deoarece $(A^2+3A+3I_n)(I_n-A)=3I_n$, avem că

$$\det(A^2+3A+3I_n)\det(I_n-A)=3^n. \tag{2}$$

Deoarece $\det(A^2+3A+3I_n)\in[0,\infty)\cap\mathbb{Z}$, folosind (1) şi (2) obţinem că $\det(I_n-A)=1$ şi apoi $\det(A^2+3A+3I_n)=3^n$.

15. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sum\limits_{1\le i<j\le n}\frac{1}{\sqrt{ij}}}.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sum\limits_{1\le i<j\le n}\frac{1}{\sqrt{ij}}} &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{1\le i<j\le n}\frac{1}{\sqrt{ij}}}\\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]}\\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}}\right)^2-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}\right]}\\ &= e^{\frac{1}{2}(4-0)}=e^2.\end{aligned}$$

Clasa a XII-a

1. *Calculând în două moduri integrala* $\int_0^1 (1+x)^{2n-1}dx$, *deduceţi identitatea*

$$1+\frac{C_{2n-1}^1}{2}+\frac{C_{2n-1}^2}{3}+\cdots+\frac{C_{2n-1}^{2n-1}}{2n}=\frac{4^n-1}{2n},$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Soluţie.

$$\begin{aligned}\int_0^1(1+x)^{2n-1}dx &= \int_0^1(1+C_{2n-1}^1x+C_{2n-1}^2x^2+\cdots+C_{2n-1}^{2n-1}x^{2n-1})dx\\ &= x\Big|_0^1+C_{2n-1}^1\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+C_{2n-1}^2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\cdots+C_{2n-1}^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n}\Big|_0^1\\ &= 1+\frac{C_{2n-1}^1}{2}+\frac{C_{2n-1}^2}{3}+\cdots+\frac{C_{2n-1}^{2n-1}}{2n}.\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\int_0^1 n(1+x)^{2n-1}dx=\int_0^1 n(1+x)^{n-1}(1+x)^n dx=\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)dx,$$

unde $f(x)=(1+x)^n$, $x\in[0,1]$. Dar

$$\int_0^1 f(x)f'(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(f^2(x))'dx=\frac{1}{2}f^2(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(f^2(1)-f^2(0))=\frac{4^n-1}{2}.$$

Rezultă $\int_0^1(1+x)^{2n-1}dx=\frac{4^n-1}{2n}$ şi identitatea cerută.

2. *Să se determine numărul elementelor grupului $(G,\cdot)$ care au proprietatea că*

$$\forall\, x, y \in G\backslash\{e\} \text{ cu } x \neq y,\ x\cdot y\cdot x = y\cdot x^{2013}\cdot y.$$

Dana Heuberger

Soluţie. Observăm mai întâi că dacă $G=\{e,a,b\}$, atunci

$$a\cdot b\cdot a = b\cdot a^{2013}\cdot b \overset{a^3=e}{\Leftrightarrow} a\cdot b\cdot a = b^2 \overset{com}{\Leftrightarrow} a^2=b,$$

adevărat. Aşadar toate grupurile cu 3 elemente au proprietatea din enunţ. Vom demonstra că acestea sunt singurele care verifică ipoteza.

Presupunem că grupul $(G,\cdot)$ are cel puţin 4 elemente. Presupunem că există $x\in G\backslash\{e\}$ cu $x^2\neq e$. Deoarece $x^2\neq x$, punând $y=x^2$ în relaţia din enunţ, obţinem $x\cdot x^2\cdot x = x^2\cdot x^{2013}\cdot x^2$, adică $x^{2013}=e$.
Obţinem că

$$\forall\, y\in G\backslash\{e\} \text{ cu } y\neq x,\quad x\cdot y\cdot x = y^2. \tag{1}$$

Fie $z\in G\backslash\{e,x,x^{-1}\}$. Pentru $y=x\cdot z$ avem $y\neq x$, $y\neq e$ şi înlocuind în (1) deducem $x\cdot x\cdot z\cdot x = x\cdot x\cdot z\cdot x\cdot z$, deci

$$x\cdot z\cdot x = z\cdot x\cdot z. \tag{2}$$

Pentru $y=z$ în (1) rezultă

$$x\cdot z\cdot x = z^2$$

şi folosind (2) deducem că $z\cdot x\cdot z = z\cdot z$, deci $x=e$, fals.
Aşadar, pentru orice $x\in G\backslash\{e\}$ avem $x^2=e$, deci $x^{2013}=x$ şi grupul este comutativ.
Relaţia din ipoteză devine: $\forall\, x,y\in G\backslash\{e\}$ cu $x\neq y$, avem $x\cdot y\cdot x = y\cdot x\cdot y$. Datorită comutativităţii însă, $x\cdot y\cdot x = y\cdot x\cdot y \Leftrightarrow x=y$, contradicţie.
În concluzie, grupul $(G,\cdot)$ nu poate avea mai mult de 3 elemente.

Observaţie. E evident că exponentul 2013 din enunţ poate fi înlocuit cu orice multiplu de 3.

3. *Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu n elemente şi cu elementul neutru e. Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea $(\mathcal{P})$, dacă este un subgrup propriu al lui G şi $\forall\, x,y\in G\backslash H \Rightarrow xy\in H$.*

a) Dacă există subgrupurile distincte H_1 şi H_2 ale lui G, care au proprietatea $(\mathcal{P})$ şi $H_1\cap H_2=\{e\}$, să se arate că grupul G este izomorf cu grupul lui Klein.

b) Să se demonstreze că, pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, grupul $(\mathbb{Z}_n,+)$ are cel mult un subgrup cu proprietatea $(\mathcal{P})$.

Dana Heuberger
Concursul "Gheorghe Păun" 2013

Soluţie. a) Ştim că grupul G nu poate fi reuniunea a două subgrupuri proprii, deci $G\backslash(H_1\cup H_2)\neq\emptyset$. Fie $x,y\in G\backslash(H_1\cup H_2)$.
Deoarece H_1 şi H_2 au proprietatea $(\mathcal{P})$, rezultă că x^2, $xy\in H_1\cap H_2=\{e\}$. Obţinem că $G\backslash(H_1\cup H_2)=\{x\}$.

Fie $h, k \in H_1 \backslash \{e\}$. Deoarece H_2 are proprietatea $(\mathcal{P})$ şi $h, k \in G \backslash H_2$, rezultă că $hk, h^2 \in H_2$. Cum $hk, h^2 \in H_1$, rezultă că $hk = h^2 = e$, deci $h = k$, adică $H_1 = \{e, h\}$. La fel se deduce că $H_2 = \{e, t\}$, cu $t^2 = e$, adică $G = \{e, h, t, x\}$, cu $h^2 = t^2 = x^2 = e$, de unde rezultă concluzia.

b) Subgrupul $\left\langle \widehat{2} \right\rangle$ al lui $(\mathbb{Z}_{2k}, +)$ are proprietatea $(\mathcal{P})$.

Fie H un subgrup al lui $(\mathbb{Z}_n, +)$ care are proprietatea (P). Dacă $\mathbb{Z}_n \backslash H = \{\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_k\}$, obţinem că $\widehat{x}_1 + \widehat{x}_1, \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_1 + \widehat{x}_k \in H$, deci $|H| \geq |G \backslash H|$ şi cum $|H| \leq \dfrac{n}{2}$, deducem că $|H| = \dfrac{n}{2}$, adică $n = 2k$.
Deoarece $(\mathbb{Z}_{2k}, +)$ este un grup ciclic, orice subgrup al său este ciclic.

În particular, H este generat de un element de ordinul k al lui G. Fie $\widehat{a}$ generatorul lui H. Deoarece $\widehat{ka} = \widehat{0}$, rezultă că $2/a$, deci $\widehat{a} \in \left\langle \widehat{2} \right\rangle$, adică $H = \left\langle \widehat{2} \right\rangle$.

4. *Se consideră polinomul* $f = (X^2 + X + 1)^n - X$ *cu rădăcinile* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. *Calculaţi suma* $S = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{x_k}$.

Dan Bărbosu

Soluţie. Se ştie că $\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{x - x_k} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Cum $x = 0$ nu e rădăcină a lui f, deducem că

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x_k} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{n(x^2 + x + 1)^{n-1}(2n + 1) - 1}{\big((x^2 + x + 1)^n - x\big)^2}\bigg|_{x=0} = n - 1.$$

5. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi pară. Să se calculeze integrala*

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x(f(x) - x)}{1 + x^2}\, dx.$$

Dan Bărbosu

Soluţie. Cum f este pară, rezultă că $\dfrac{x \cdot f(x)}{1 + x^2}$ este impară. Atunci

$$I = -\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx = -2\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1 + x^2}\, dx = -2 + \frac{\pi}{2}.$$

6. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n \to \infty} n \displaystyle\int_0^1 x^n \cdot \cos(x^n) dx$.

Dan Bărbosu

Soluţie. Se ştie că dacă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e continuă pe $[0, 1]$, atunci avem că

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 x^n \cdot f(x^n) dx = \int_0^1 f(t) dt.$$

Cum $f(x) = \cos x$, obţinem:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n \cos(x^n)dx = \int_0^1 \cos x\, dx = \sin 1.$$

7. *Să se determine toate funcţiile $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ primitivabile şi cu proprietatea că există $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ o primitivă pentru f, astfel încât*

$$f(x) = \frac{2F(x)}{x} + \frac{x^4}{F(x)}, \quad \forall\, x > 0.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Pentru orice $x > 0$, din ipoteză avem:

$$xf(x) \cdot F(x) = 2F^2(x) + x^5 \Leftrightarrow F(x)(xf(x) - 2F(x)) = x^5.$$

Deoarece

$$\left(\frac{F(x)}{x^2}\right)' = \frac{f(x)\cdot x^2 - F(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{xf(x) - 2F(x)}{x^3},$$

relaţia anterioară devine

$$F(x)\cdot x^3 \left(\frac{F(x)}{x^2}\right)' = x^5,\ \forall\, x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{F(x)}{x^2}\right)' = \frac{x^2}{F(x)},\ \forall\, x > 0.$$

Cu notaţia $H(x) = \dfrac{F(x)}{x^2}$, $x > 0$, avem $H'(x) = \dfrac{1}{H(x)}$, $x > 0$, deci $(H^2(x))' = 2$, $\forall\, x > 0$, deci $(\exists)\, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $H^2(x) = 2x + c$, $\forall\, x > 0$. Atunci $H(x) = \sqrt{2x+c}$, $x > 0$, unde $c \geq 0$, deoarece $F > 0$ implică $H > 0$.
Ca urmare, $F(x) = x^2\sqrt{2x+c}$, $\forall\, x > 0$, unde $c \geq 0$ şi

$$f(x) = 2x\sqrt{2x+c} + \frac{x^2}{\sqrt{2x+c}} = \frac{5x^2 + 2c\cdot x}{\sqrt{2x+c}}.$$

8. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Să se arate că există $c \in (0,1)$ astfel încât $1 < f(c) < \dfrac{1}{c}$.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Deoarece

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \int_0^1 f(x)dx,$$

rezultă că $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x^2-x+1}\right)dx = 0$ şi aplicând teorema de medie, va exista $c \in (0,1)$ astfel încât $f(x) = \dfrac{1}{c^2-c+1}$.
Pentru acest c, relaţia de demonstrat devine

$$1 < \frac{1}{c^2-c+1} < \frac{1}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2-c+1<1 \\ c^2-c+1>c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(c-1)<0 \\ (c-1)^2>0 \end{cases},$$

relaţii adevărate.

9. *Să se arate că*

$$\int_0^1 e^{2\arcsin\sqrt{x}}dx \cdot \int_0^1 e^{2\arcsin\sqrt{1-x}}dx \geq e^{\pi}.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Aplicăm $C-B-S$.

$$\int_0^1 e^{2\operatorname{arc\,sin}\sqrt{x}}dx \cdot \int_0^1 e^{2\arcsin\sqrt{1-x}}dx \geq \left(\int_0^1 e^{\arcsin\sqrt{x}} \cdot e^{\arcsin\sqrt{1-x}}dx\right)^2$$
$$= \left(\int_0^1 e^{\arcsin\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{1-x}}dx\right)^2 = \left(\int_0^1 e^{\frac{\pi}{2}}dx\right)^2 = e^{\pi}.$$

10. *Fie* $f:[0,1]\to[0,\infty)$ *o funcţie continuă. Să se arate că*

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \sqrt{f(t)}dt\right)dx \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\int_0^1 f(x)dx}\,.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie G o primitivă pentru funcţia $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$. Atunci:

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_x^1\sqrt{f(t)}dt\right)dx&=\int_0^1(G(1)-G(x))dx\\&=x(G(1)-G(x))\Big|_0^1+\int_0^1 xg(x)dx\\&=\int_0^1 xg(x)dx\overset{C-B-S}{\leq}\sqrt{\int_0^1 x^2dx\cdot\int_0^1 g^2(x)dx}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\int_0^1 f(x)dx}.\end{aligned}$$

11. *Să se determine funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$\int_0^1 f(t\cdot x)dt\cdot\int_0^1 f(a\cdot t\cdot x)dt=e^x,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$$

unde $a\in(0,1)$ este dat.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^1 f(tx)dt$ continuă. Relaţia dată devine

$$g(x)\cdot g(ax)=e^x,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}.\tag{1}$$

Pentru $x=0\Rightarrow g(0)=\pm1$.

Cazul **1**. $g(0)=1$. Arătăm că $g(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$. Presupunem că $(\exists)\, x_0\in\mathbb{R}$: $g(x_0)<0$. Cum g este continuă, va exista c între x_0 şi 0 astfel ca $g(c)=0$. Rezultă $0=e^c(F)$. Deci $g(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
Logaritmând în (1), rezultă $\ln g(x)+\ln g(ax)=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
Notăm $h(x)=\ln g(x)$. Obţinem:

$$h(x)+h(ax)=x,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

Pentru $x=0\Rightarrow h(0)=\ln(g(0))=\ln 1=0$.
Pentru $x\neq0\Rightarrow h(x)=x-h(ax)$.

$$\begin{array}{lr}\text{Pentru } x=ax\Rightarrow h(ax)=ax-h(a^2x) & |\cdot(-1)\\ \vdots & \vdots\\ x=a^{n-1}x\Rightarrow h(a^{n-1}x)=a^{n-1}x-h(a^nx) & |\cdot(-1)^{n-1}\end{array}$$

Însumând: $h(x)=x(1-a+a^2-\cdots+(-1)^{n-1}a^{n-1})+(-1)^nh(a^nx)$.
Deci

$$h(x)=x\frac{1-(-a)^n}{1+a}+(-1)^nh(a^nx).$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$, obţinem $h(x) = \dfrac{x}{1+a}$. Atunci

$$\ln g(x) = \frac{x}{1+a} \Rightarrow g(x) = e^{\frac{x}{1+a}}, \text{ deci } \int_0^1 f(t \cdot x)dt = e^{\frac{x}{1+a}}.$$

Pentru $x = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(0)dt = e^0 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$.

Pentru $x \neq 0$, $tx = y \Rightarrow x\,dt = dy$;
$t = 0 \Rightarrow y = 0$;
$t = 1 \Rightarrow y = x$;

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy = e^{\frac{x}{1+a}} \Rightarrow \int_0^x f(y)dy = xe^{\frac{x}{1+a}}.$$

$F(x) - F(0) = xe^{\frac{x}{1+a}}$, F = primitivă pentru f, deci

$$f(x) = e^{\frac{x}{1+a}} + x\frac{1}{1+a}e^{\frac{x}{1+a}} \Rightarrow f(x) = \frac{x+a+1}{a+1}e^{\frac{x}{1+a}},$$

funcţie ce verifică relaţia din ipoteză.

Cazul **2**. $g(0) = -1$. Rezultă $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Relaţia (1) devine

$$-g(x) \cdot (-g(ax)) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obţinem în mod analog,

$$f(x) = -\frac{x+a+1}{a+1}e^{\frac{x}{1+a}}.$$

12. *Să se arate că şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\{x\}}{x^2+[x]^2}dx$, *este convergent.*

Ludovic Longaver

Soluţie. Se cunoaşte că şirul lui Euler $(c_n)_{n\geq 1}$, $c_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ este convergent, deci mărginit superior. Evident, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n &= \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2+[x]^2}dx \leq \frac{1}{2} \cdot \int_1^n \frac{\{x\}}{x[x]}dx = \frac{1}{2}\int_1^n \frac{x-[x]}{x[x]}dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_1^n \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^n \frac{1}{[x]}dx - \frac{1}{2}\ln n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx\right) - \frac{1}{2}\ln n \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n\right) = \frac{1}{2}\left(c_n - \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

rezultă că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior.

13. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, neinjectivă şi $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$F(x) = (x-a)\int_x^b f(t)dt + (x-b)\int_a^x f(t)dt.$$

Să se arate că există $c \in (a, b)$ pentru care $F''(c) = 0$.

Ludovic Longaver

Soluţie.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_x^b f(t)dt - (x-a)f(x) + \int_a^x f(t)dt + (x-b)f(x) \\ &= \int_a^b f(t)dt - (b-a)f(x). \end{aligned}$$

Întrucât funcţia f nu este injectivă, există $c_1, c_2 \in [a, b]$, $c_1 < c_2$ pentru care $f(c_1) = f(c_2) \Rightarrow F'(c_1) = F'(c_2)$.
Aplicăm teorema lui Rolle funcţiei $F' : [c_1, c_2] \to \mathbb{R}$. Există $c \in (c_1, c_2) \subset (a, b)$ pentru care $(F')'(c) = F''(c) = 0$.

14. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int x \cdot \operatorname{tg}(2x^2 + a) \cdot \operatorname{tg}(3x^2 + a) \cdot \operatorname{tg}(5x^2 + 2a)dx,$$

pentru $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi x dintr-un interval I convenabil ales.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $x^2 = t$, integrala auxiliară este

$$I_t = \frac{1}{2}\int \operatorname{tg}(2t + a)\operatorname{tg}(3t + a)\operatorname{tg}(5t + 2a)dt.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(u + v) &= \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v} \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v \cdot \operatorname{tg}(u + v) = \operatorname{tg}(u + v) - \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v. \end{aligned}$$

Alegem $u = 2t + a$, $v = 3t + a$ şi atunci obţinem:

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{1}{2}\int \left(\operatorname{tg}(5t + 2a) - \operatorname{tg}(2t + a) - \operatorname{tg}(3t + a)\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\ln|\cos(5t{+}2a)| + \frac{1}{2}\ln|\cos(2t{+}a)| + \frac{1}{3}\ln|\cos(3t + a)|\right] + \mathcal{C} \end{aligned}$$

şi de aici se obţine I.

15. *Fie* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *o funcţie derivabilă cu* $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [0, \infty)$. *Să se arate că*

$$\int_0^{x^2} t \cdot f^2\left(\sqrt{t}\right) dt \geq 2\left(\int_0^x t \cdot f(t)dt\right)^2.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Soluţie. Considerăm funcţia $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^{x^2} t \cdot f^2\left(\sqrt{t}\right) dt - 2\left(\int_0^x t \cdot f(t)dt\right)^2.$$

Avem că

$$\begin{aligned} g'(x) &= x^2 \cdot f^2(x) 2x - 2 \cdot 2x f(x) \int_0^x t\, f(t)dt \\ &= 2x f(x)\left(x^2 f(x) - 2\int_0^x t\, f(t)dt\right). \end{aligned}$$

Fie funcţia $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 \cdot f(x) - 2\int_0^x t\, f(t)dt$. Atunci

$$h'(x) = 2x\, f(x) + x^2 \cdot f'(x) - 2x\, f(x) = x^2 \cdot f'(x) \geq 0,\ \forall\, x \in [0, \infty),$$

deci h este crescătoare pe $[0, \infty)$. Obţinem $h(x) \geq h(0)$, $\forall\, x \geq 0$, prin urmare $g'(x) \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$, deci g este crescătoare. Atunci $g(x) \geq g(0) = 0$, $\forall\, x \geq 0$.

$\mathcal{A}rgument$ 16

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Dacă $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, $m > |n|$ atunci, în orice triunghi cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea

$$\frac{a}{mh_a + nr} + \frac{b}{mh_b + nr} + \frac{c}{mh_c + nr} \geq \frac{2s}{(3m+n)r},$$

unde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu

2. Dacă $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, atunci

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(2x+y+z)} + \frac{y^2}{(az+bx)(2y+z+x)} + \frac{z^2}{(ax+by)(2z+x+y)} \geq \frac{3}{4(a+b)}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

3. Dacă $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, atunci

$$\frac{x^2y^2}{ax+by} + \frac{y^2z^2}{ay+bz} + \frac{z^2x^2}{az+bx} \geq \frac{3xyz}{a+b}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

4. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, să se calculeze partea întreagă a numărului $E = \dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Meda Bojor

5. Fie M un punct în planul triunghiului ABC astfel încât $a \cdot \overrightarrow{AM} + c \cdot \overrightarrow{BM} + b \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$, unde $BC = a$, $AC = b$ şi $AB = c$, şi notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se demonstreze că $MG \| BC$ dacă şi numai dacă lungimile laturilor AB, BC, AC sunt trei numere în progresie aritmetică.

Meda Bojor

6. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2+2b^2-2ab+ac-2abc \leq 0$. Să se arate că $c^2 \geq \max\{a^2, ac\}$.

Gheorghe Boroica

7. Fie $a \geq 4$ şi $b \geq 1$. Să se arate că

$$\begin{aligned}&(x^2-4x+a)(y^2-2y+b)(z^2+2z+b)(t^2+4t+a)\\ &\qquad \geq 16(a-4)(b-1)xyzt, \quad \forall\, x,y,z,t>0.\end{aligned}$$

Gheorghe Boroica

8. Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ definit de $a_0=0$ şi

$$a_{n+1}=\frac{5}{3}\,a_n+\frac{4}{3}\sqrt{a_n^2+4}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Gheorghe Boroica

9. Fie $a,b,c>0$ cu $abc=\dfrac{27}{8}$, iar $x \in [-a,a]$, $y \in [-b,b]$, $z \in [-c,c]$. Arătaţi că

$$(a+x)(b+y)(c+z)\sqrt{(a-x)(b-y)(c-z)} \leq 8.$$

În ce caz avem egalitate?

Gotha Güntter, elev

10. Fie p un număr natural impar. Să se arate că p este un număr prim dacă şi numai dacă ecuaţia $a+(a+1)+\cdots+(a+n)=p$ admite exact o soluţie în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Gotha Güntter, elev

11. Fie triunghiul ABC cu bisectoarele $(AA'$, $(BB'$, $(CC'$, unde $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$. Dacă $\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}=\overrightarrow{0}$, să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

Dana Heuberger

12. Fie G centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$. Notăm cu A_1, B_1, C_1D_1 simetricele punctelor A, B, C respectiv D, faţă de mijloacele segmentelor $[CG]$, $[DG]$, $[AG]$ respectiv $[BG]$. Să se arate că:

a) $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram.

b) $ABCD$ şi $A_1B_1C_1D_1$ are acelaşi centru de greutate.

Nicolae Muşuroia

13. Fie $a, b, c, d > 0$. Să se arate că

$$\frac{(a-b)(c+d)}{b(a+c+d)} + \frac{(b-c)(a+d)}{c(a+b+d)} + \frac{(c-d)(a+b)}{d(a+b+c)} + \frac{(d-a)(b+c)}{a(b+c+d)} \geq 0.$$

Nicolae Muşuroia

14. Se dă paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CM)$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = m$, $\dfrac{CN}{NM} = n$. Să se demonstreze că punctele B, N, D sunt coliniare dacă şi numai dacă $m = n - 1$.

Adrian Pop

15. Arătaţi că $\sin\alpha + \cos\alpha + \dfrac{2}{\sin 2\alpha} \geq 2 + \sqrt{2}$, pentru orice $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Mihai Vijdeluc, Vasile Ienuţaş

Clasa a X-a

1. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a + b \in \mathbb{R}_+^*$, $x, y, z \in (1, \infty)$, atunci

$$\frac{\log_x y}{ax + by} + \frac{\log_y z}{ay + bz} + \frac{\log_z x}{az + bx} \geq \frac{9}{(a+b)(x+y+z)}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

2. Se consideră ecuaţia funcţională $f(f(x)) + 2f(x) = 3x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Să se arate că există o funcţie descrescătoare care verifică ecuaţia anterioară.

b) Să se determine toate funcţiile crescătoare care verifică ecuaţia dată.

Florin Bojor

3. Determinaţi numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ştiind că

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k \cdot z_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot i$$

şi $|z_k| = k$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Boroica

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$2^{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x + 3} + x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 2^x.$$

Gheorghe Boroica

5. Să se arate că dacă patrulaterul $ABCD$ este înscris în semicercul de diametru $[AD]$, atunci:

$$AD \cdot (AB^2 + BC^2 + CD^2) - 2AB \cdot BC \cdot CD = AD^3.$$

Marian Cîrstea

6. Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{(1-x)x}}$, $g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$.
Să se arate că $\max\limits_{x\in[0,1]} (f(x) + g(x)) = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x) + \max\limits_{x\in[0,1]} g(x)$.

Gotha Güntter, elev

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\{2^x\} = \{2^{\{x\}}\}$.

Dana Heuberger

8. Fie triunghiul ABC înscris în cercul $C(O, R)$, cu unghiurile $A, B, C \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Definim punctele A', A_1, B_2 şi B_3 astfel: A' este piciorul înălţimii din A, $\{A_1\} = (AA' \cap C(OR)$, $\{B_2\} = AB \cap A_1C$ şi $\{B_3\} = A'B_2 \cap AC$. În mod analog se definesc punctele C_3 şi A_3. Să se arate că dreptele AA_3, BB_3 şi CC_3 nu sunt concurente.

Dana Heuberger

9. Fie $\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$ şi triunghiul ABC. Definim punctele M şi A_0 astfel încât A şi M sunt în acelaşi semiplan de frontieră BC, A şi A_0 sunt în semiplane opuse de frontieră BC şi triunghiurile BCM şi BCA_0 sunt echilaterale. Analog se definesc punctele N şi B_0 şi apoi punctele P şi C_0. Fie $C_1 = r_{C_0, \frac{\pi}{3}}(M)$ (C_1 este imaginea lui M prin rotaţia de centru C_0 şi de unghi $\frac{\pi}{3}$), $A_1 = r_{A_0, \frac{\pi}{3}}(N)$ şi $B_1 = r_{B_0, \frac{\pi}{3}}(P)$. Să se arate că:

a) $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.
b) $AC_1 = BM$, $BA_1 = CN$ şi $CB_1 = AP$.
c) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{O}$.

Dana Heuberger

10. Care este cel mai mic număr întreg care se poate scrie sub forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z},$$

unde x, y, z sunt anumite numere naturale nenule? Dar cel mai mare?

Cristinel Mortici

11. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ şi $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 1$. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, numerele z_1^{2n+1}, z_1^{2n+1}, z_3^{2n+1} sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.

Nicolae Muşuroia

12. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_5 \in \mathbb{C}^*$ cu $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_5|$, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$ şi $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 + z_5^3 = 0$.
Să se arate că $z_1, z_2, \ldots, z_5$ sunt afixele vârfurilor unui pentagon regulat.

Nicolae Muşuroia

13. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x)) \leq x \leq g(f(x))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, unde $g(x) = x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n-1}$. Demonstraţi că funcţiile f şi g sunt bijective.

Adrian Pop

14. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\frac{1}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}\, S},$$

notaţiile fiind cele cunoscute.

Mihai Vijdeluc

15. Se consideră numerele complexe $z_k = x_k + iy_k$, $k = \overline{1,2}$. Arătaţi că

$$\sqrt{x_1^4 + y_2^4} + \sqrt{x_2^4 + y_1^4} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Mihai Vijdeluc

Clasa a XI-a

1. Dacă $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\left(1 + \frac{h_n}{n}\right)^n$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu

2. Dacă $m \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$, iar A, B, C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor unui triunghi ABC, atunci

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)^{(m+1)n} + \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)^{(m+1)n} + \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right)^{(m+1)n} \geq \frac{1}{3^m}\left(3 + 2n\sqrt{3}\right)^{m+1}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = 2$ şi $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_0 \cdot x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}{x_{n+1}}\right)^{n^n}$.

Florin Bojor

4. Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{Z})$ ecuaţia $X^{2n+1} + X = I_2$.

Florin Bojor

5. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel:

$$1,\ \underbrace{2,2,2,2}_{2^2\ termeni},\underbrace{3,3,\ldots 3}_{3^2\ termeni},\underbrace{4,4,\ldots,4}_{4^2\ termeni},\ldots\ .$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$.

Gheorghe Boroica

6. Fără a folosi derivate, să se determine $a > 0$ ştiind că

$$1 + 4^x + 9^x \geq 2^x + 3^x + a^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Gheorghe Boroica

7. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale, astfel încât

$$|(1+x)^{a_1} + (1+x)^{a_2} + \cdots + (1+x)^{a_n} - n| \leq x^2, \quad \forall\, x \in (-1, \infty).$$

Să se demonstreze că $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$.

Gheorghe Boroica

8. Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu $A \neq {}^t A$ şi fie $B = {}^t A - A$.
a) Să se calculeze $tr(B^{2015})$.
b) Să se arate că există un unic $\alpha > 0$, cu $\det(\alpha I_3 - B^*) = 0$.

Dana Heuberger

9. Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm cu $S(X)$ suma tuturor elementelor sale. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât pentru orice $k = \overline{1,n}$, $S(A^k) = n(n-1)^k$.
a) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $S(A^k) = n(n-1)^k$.
b) Să se dea un exemplu de astfel de matrice.

Dana Heuberger

10. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux, iar M mulţimea zerourilor reale ale lui f. Dacă $sgn(f(a)) = sgn(f(b)) \in \{-1, 1\}$ şi $card(M) = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, demonstraţi că f are cel puţin un punct de extrem care aparţine lui M.

Gotha Güntter, elev

11. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că există o unică matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^n = I_n$ şi $\det(I_n + A + A^2 + \cdots + A^n) \neq 0$.

Gotha Güntter, elev

12. Demonstraţi că există un unic şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea
$$e^{x_n} - x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$
şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)!(x_n - 1)$.

Nicolae Muşuroia

13. Fie $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$, $AC = CA$ şi $A + B + C = O_2$. Să se arate că $\det(A^4 + B^4 + C^4) \geq 0$.

Nicolae Muşuroia

14. Determinaţi funcţiile derivabile $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ cu proprietatea
$$f'(x) = f(x) + \frac{e^{2x}}{f(x)}, \quad \forall\, x \in (0,\infty).$$

Nicolae Muşuroia

15. Fie $p \in \mathbb{R}_+^*$ fixat şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 \in (0,1)$, iar $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{p+1} + p x_n}{p+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n+2015}}$.

Adrian Pop

Clasa a XII-a

1. Dacă $a \in (0,\infty)$, $b \in (1,\infty)$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ sunt funcţii continue, astfel încât f este funcţie impară, iar $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = -g(x)$, $\forall\, x > 0$, să se calculeze
$$\int_{\sqrt{a^2+1}-a}^{\sqrt{a^2+1}+a} \frac{1}{(x^2+1)(b^{f(g(x))}+1)}\, dx.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{5\cdot x^{2n} + 4\cdot x^n + 3}{(1+x^2)(x^{2n}+x^n+1)} dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu

3. Să se determine funcţiile continue $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia
$$\int_0^{2\pi} (f^2(x) + 2\cos x F(x) dx = -\pi,$$
unde F este o primitivă a lui f.

Florin Bojor

4. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii cu proprietatea că $\max(f, g)$ are primitive pe $\mathbb{R}$. Rezultă în mod necesar că f şi g au primitive?

Gheorghe Boroica

5. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ şi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât $f(0) \geq 0$ şi $\displaystyle\int_0^1 e^{2f(x)}dx = 1 + \frac{2}{n^2}$. Să se arate că există $c \in [0,1]$ astfel încât $f(c) = c^{n^2-1}$.

Gheorghe Boroica

6. Fie $a > 0$ şi $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi cu derivata continuă. Să se determine funcţia continuă $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ având proprietăţile:

i) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f^2(x)dx = \int_{-a}^{a} (g'(x))^2 dx$;

ii) $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2g(x), \; \forall\, x \in [-a, a]$.

Gheorghe Boroica

7. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel integru. Pentru $m \in \mathbb{N}^*$, notăm $m_A = \underbrace{1_A + 1_A + \cdots + 1_A}_{de\ m\ ori}$. Dacă există $n, k, t \in \mathbb{N}^*$, cu n par, k, t impare, $k \neq t$, $(k, t) = 1$, astfel încât

$$\forall\, a, b \in A, \quad (k_A \cdot a + t_A \cdot b)^n = t_a \cdot a^n + k_a \cdot b^n,$$

atunci să se arate că $\forall\, a, b \in A$, $(a + b)^n = a^n + b^n$.

Dana Heuberger

8. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel fără divizori ai lui zero, cu $1 + 1 \neq 0$. Pentru $a, b \in A$, notăm cu $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$, comutatorul acestora. Fie $f \in End(A)$, astfel încât $\forall\, x, y \in A$, $[x, f(y)] = [f(x), y]$.

a) Să se arate că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in A$, $[x^n, f(x)] = 0$.

b) Dacă $\forall\, x \in A \backslash \{0, 1\}$, $f(x) \neq x$ şi f este un morfism surjectiv, să se arate că inelul este comutativ.

Dana Heuberger

9. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{i^2 + j^2}}$.

Nicolae Muşuroia

10. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to [a, b]$ două funcţii continue. Să se arate că există $c \in [a, b]$ astfel încât:

$$\frac{\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt}{b - a} = c.$$

Nicolae Muşuroia

11. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel nenul cu proprietatea că:

$$x^3 + y^3 = xy + x + y + 1, \quad \forall\, x, y \in A^*.$$

Să se arate că A este corp cu două elemente.

Nicolae Muşuroia

12. a) Arătaţi că nu există nici o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, astfel încât

$$A^4 + 20A^2 + 3I_2 = O_2.$$

b) Daţi un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât

$$A^4 + 20A^2 + 3I_2 = O_2.$$

Gheorghe Boroica

13. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dan Bărbosu

14. Se consideră mulţimea $M_f = \{f | f : [0,1]\} \to \mathbb{R}$ este derivabilă, cu f' continuă şi astfel încât $f(1) = 0\}$.
Să se determine cel mai mare număr real M, ştiind că

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq M \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2, \quad \forall\, f \in M_f.$$

Gabriela Boroica, C. N. "Vasile Lucaciu"

15. Fie $a, x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive şi pentru care $f(x_0) = a$. Dacă fiecare punct al domeniului de definiţie al funcţiei este un punct de minim local pentru f, să se calculeze primitivele funcţiei f.

Ludovic Longaver

Erată

• La problema 14, clasa a XII-a, în enunţ, în loc de $\mathrm{tg}(5x^2 + a)$ se va scrie $\mathrm{tg}(5x^2 + 2a)$.

• La pg. 44, problema 9, punctul c): Să se arate că orice submulţime cu 7 elemente a mulţimii ... se înlocuieşte cu: Să se arate că orice submulţime cu 8 elemente a mulţimii ...

Sumar