Revistă de matematică editată de Catedra de matematică a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Municipiul **Baia Mare**

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana.heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *http://www.sincaibm.ro/*

ISSN 1582– 3660

Argument 15

Integritate, integrată integral!

Abstract. The purpose of this paper is to pay an homage to a brilliant mathematics teacher.

Motto: Matematica este liantul realizărilor omeneşti, dă încredere în măreţia omului, dă echilibru şi certitudine.

Dumitru Angheluţă (1934-2013)

Una dintre cele mai fascinante caracteristici ale naturii umane este aceea că oamenii care ne-au marcat existenţa rămân peste timp în sufletul nostru, ghidându-ne. Ne-a părăsit în mod neaşteptat, la începutul acestui an, după o viaţă închinată matematicii şi oamenilor, Profesorul şi Mentorul nostru, ***Dumitru Angheluţă***. A rămas, fără îndoială, în amintirea celor care l-au cunoscut, ca un reper de profesionalism, de rigoare şi meticulozitate, de onestitate şi înaltă ţinută morală. În inima noastră, a foştilor lui elevi şincaişti, rămâne la fel de prezentă ca în anii de liceu - dar percepută mult mai clar, din altă perspectivă - recunoştinţa pentru privilegiul de a-i fi fost ucenici. Căci dincolo de lungile (şi câteodată chinuitoarele, pentru unii) ore de matematică, făcute uneori şi după-amiaza, şi în zilele de practică, ne-a învăţat ce înseamnă dăruirea, pasiunea pentru un domeniu, tenacitatea, respectul faţă de principii, faţă de ceilalţi, faţă de lucrurile bine făcute.

Şi, după ce, mai mari fiind, ne-am dat seama că sub aparenta lui răceală se ascunde o personalitate complexă, un spirit deschis spre tot ceea ce înseamnă cunoaştere (nu doar cea matematică), multă modestie (chiar timiditate uneori) şi multă dragoste de oameni, am apreciat şi mai mult sobrietatea caldă (la el nu era o contradicţie în termeni) a felului lui de a fi şi tot ceea ce ne împărtăşea fără să fie nevoie de cuvinte. Părea egal cu sine, împăcat cu vremea şi cu vremurile, era încrezător în viitorul nostru şi al ştiinţei, avea ironii (acide, câteodată) doar la adresa prostiei, lenei şi necinstei. Şi totuşi, multe erau lucrurile pe care nu le puteam şti înainte de 1989 (pe care nu aveam voie sau era mai bine să nu le aflăm) - nu aveam informaţii care ne-ar fi făcut să valorizăm altfel întâmplări, atitudini şi persoane. Şi care, ajutându-ne să evaluăm chiar şi superficial viaţa "de dinainte de noi" a domnului Profesor, ne-ar fi permis să înţelegem mai bine, mai devreme, un mare caracter şi un mare om.

Iată câteva repere remarcabile din viaţa acestui om excepţional: în perioada tulbure de după anul 1945, familia sa - cu un vechi parcurs în istoria, cultura şi administraţia neamului românesc - a fost persecutată politic şi, ca în atâtea alte cazuri, copiilor (două perechi de gemeni) li s-au retezat pe nedrept şi în mod repetat aripile. În condiţiile în care familia sa avea domiciliu forţat, domnul Profesor a fost eliminat, mai întâi din şcoală, apoi de la examenul de admitere la facultate, din cauza "originii nesănătoase". După ce câţiva ani mai târziu a fost acceptat cu bursă la Facultatea de matematică-fizică a Institutului Pedagogic din Bucureşti (căci nu îşi declarase la examenul de admitere, cu îndrăzneala specifică vârstei, originea socială), a fost exmatriculat cu trei luni înainte de absolvire, din aceleaşi motive. A fost reprimit, într-o perioadă de relativă relaxare politică, la Facultatea de matematică-mecanică a Universităţii Bucureşti, pe care a absolvit-o în anul 1961. Între timp, începând cu anii copilăriei, a muncit ca să se întreţină dând meditaţii. În perioadele în care a fost eliminat din diferitele şcoli pomenite mai înainte, a lucrat ca muncitor topometru la o schelă petrolieră, apoi ca şi "calculator de salarii" tot acolo, apoi ca profesor la o şcoală generală din Sfântu Gheorghe (Covasna) - de unde a fost dat afară conform unei hotărâri de Partid care îi afecta pe toţi cei cu "origini nesănătoase" - apoi ca zilier la Drumuri şi Poduri. Din fericire, anul 1961 i-a adus o încadrare stabilă în învăţământ, la Liceul Teoretic din Vişeu de Sus, unde în scurt timp s-a făcut remarcat, prin calităţile sale matematice şi umane de excepţie. În anul 1971 a preluat prima clasă specială de matematică la liceul "Gheorghe Şincai" din Baia Mare, inaugurând o tradiţie de excelenţă. În anii aceia, în care locurile la facultăţi erau puţine şi concurenţa era acerbă, simplul fapt de a fi elevul domnului Dumitru Angheluţă era o garanţie că, dacă vei face problemele de pe celebrele lui liste (scrise impecabil, de mână, căci lipseau culegerile bune), vei reuşi din prima încercare la proba de matematică a examenului de admitere în învăţământul superior, fără să ai nevoie de un alt ajutor.

Elevii lui au avut de-a lungul anilor şi rezultate notabile la olimpiadele naţionale de matematică. Cele mai strălucitoare medalii au fost ale lui Mihai Ciucu, primul elev şincaist medaliat (între anii 1983-1986) la Olimpiada Balcanică de Matematică (cu premiul I !), actualmente profesor la Indiana

University, Bloomington, în S.U.A. Sunt mulţi dintre foştii elevi ai domnului Profesor răspândiţi prin lume, cu profesiuni dintre cele mai diferite, pentru care matematica a rămas - chiar dacă nu toţi o practică - poarta de succes a începutului de drum, un mod de viaţă care imprimă în orice alt domeniu rigoare, răbdare şi care, dincolo de şabloane şi algoritmi, te poate face să te entuziasmezi în faţa unei idei pure, ingenioase.

S-a pensionat în anul 2000 - nu însă şi simbolul care a devenit dânsul pentru matematica maramureşeană, simbol pe care noi cei care am avut şansa să îi fim colegi la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" ne străduim să îl perpetuăm.

N-am făcut parte nici din cea mai slabă generaţie condusă de domnul Diriginte şi nici din cea de aur (a lui Mihai Ciucu), dar colegii mei şi cu mine am primit, la cererea noastră, cel mai frumos dar pe care putea să ni-l facă (şi cea mai grea temă, totodată). Ne-am dorit, cu toţii, ca motto-ul de pe sonet (cine mai ştie de moda sonetelor?...) să ne fie, nu vreun citat celebru din Sorescu sau Stănescu, ci un citat din domnul Diriginte (să fie scurt, i-am spus atunci, câteva cuvinte scrise de dumneavoastră, pe care să le scanăm şi care să ne urmărească). Şi l-am avut, sintetizându-i viaţa (chiar şi pe cea necunoscută nouă pe vremea aceea) şi ghidând-o pe a noastră, peste ani:

Integritate, integrată integral!

veşnic recunoscătoare,

Dana Heuberger

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Asupra unor probleme de concurs

Dan Bărbosu

Abstract. Scopul acestei note este de a prezenta o soluţie unitară a următoarelor două probleme ce au fost propuse la concursul de admitere U. T. Cluj-Napoca.

P1. *Calculaţi*: $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{2n+2k+1}{2n+2k}$. (Admitere 2009)

P2. *Calculaţi*: $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\sin\frac{k}{n^2}\right)$. (Admitere 2008)

Ambele probleme cer calcularea limitei unui şir $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termen general

$$b_n=\prod_{k=0}^{n}(1+a_k(n)) \tag{1}$$

unde

$$a_k(n)>0 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty}a_k(n)=0. \tag{2}$$

E uşor de văzut că în problema **P1** $a_k(n)=\frac{1}{2n+2k}$, iar în problema **P2** $a_k(n)=\sin\frac{k}{n^2}$, $\forall\, k=\overline{0,n}$.

Se va încerca în continuare calcularea limitei şirului (1). Termenul general al şirului (1) se poate exprima în forma

$$b_n=e^{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(1+a_k(n))}. \tag{3}$$

Cum $\lim_{n\to\infty}a_n(n)=0$, rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_k(n))}{a_k(n)}=1$, adică $\forall\,\xi>0$ există rangul $N=N(\xi)$, astfel încât $\forall\, n>N$ au loc inegalităţile

$$1-\xi<\frac{\ln(1+a_k(n))}{a_k(n)}<1+\xi. \tag{4}$$

Din relaţiile (4), prin înmulţire cu $a_k(n)$, rezultă că $\forall\, n>N$ au loc inegalităţile:

$$a_k(n)-\xi a_k(n)<\ln(1+a_k(n))<a_k(n)+\xi a_k(n).$$

Prin adunarea membru cu membru a relaţiilor (5) se obţine:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(n) - \xi \sum_{k=0}^{n} a_k(n) < \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + a_k(n)) < \sum_{k=0}^{n} a_k(n) + \xi \sum_{k=0}^{n} a_k(n). \quad (6)$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(n)$ există şi este finită, făcând $\xi \to 0$ în (6), rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + a_k(n)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(n). \quad (7)$$

Rezumând cele de mai sus, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(n)$ există şi este finită, atunci

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(n)}. \quad (8)$$

În cazul problemei **P1** are loc:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(n) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

şi atunci, în baza lui (8), se găseşte

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{2n+2k+1}{2n+2k} = e^{\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

În cazul problemei **P2** se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sin\frac{k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2n} \cdot \sin\frac{n+1}{2n^2}}{\sin\frac{1}{2n^2}} = \frac{1}{2},$$

şi aplicând din nou (8) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + \sin\dfrac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Bibliografie

[1] Câmpean, V. şi colectiv, *Teste grilă de matematică* 2013, U.T. Press, Cluj-Napoca, 2012

Conf. univ. dr. Centrul Universitar Nord Baia Mare,
Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
E-mail: barbosudan@yahoo.com

Argument 15

Reprezentarea numerelor reale într-o bază de numeraţie

Hortensia Bolat

Abstract. This methodic paper is dedicated to the representation of real numbers, using a denumeration basis. The major part of the paper pertains to the p-adic series expansion.

1. Introducere

Scrierea obişnuită (poziţională) a numerelor naturale în forma

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

poate fi generalizată, folosind în loc de 10 o altă bază de numeraţie p. Forma generală a numerelor naturale este în acest caz:

$$a^n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0, \text{ cu } a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\},\ i = \overline{1, n}.$$

Teoria necesară este foarte bine pusă la punct. Menţionăm importanţa deosebită a cazului binar ($p = 2$), când cifrele admisibile sunt $a_i \in \{0, 1\}$. Acest caz este folosit la calculatoare, care se bazează pe circuite electrice 1 $\equiv$ circuitul este închis; 0 $\equiv$ circuitul este deschis). Trecând la numere care nu sunt naturale (ne putem restrânge la numere din intervalul $(0, 1)$), ideea este aceea de a folosi, pentru o bază de numeraţie dată p, puterile lui $\frac{1}{p}$ în loc de puterile lui p. Ilustrarea concretă a acestei idei poate fi dată de calculul şcolar din clasele mici. De exemplu, vrând să calculăm $1 : 3 = \frac{1}{3}$, obţinem rezultate *din ce în ce mai precise*, cu zecimale din ce în ce mai multe: $0,3$; $0,33$; $0,333$; $\ldots$; $0,333\ldots3$ etc., care *se apropie din ce în ce mai mult* de $\frac{1}{3}$.

Examinând lucrurile din punct de vedere al analizei matematice, observăm că, luând n zecimale, avem: $0,33\ldots3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n}$. Aceasta e suma parţială de ordin n a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$, care are drept sumă exact pe $\frac{1}{3}$.

Am exprimat în mod formal şi corect faptul că $\frac{1}{3} = 0,33\ldots$ (o infinitate de zecimale).

Fracţia zecimală $0,33\ldots$ *infinită* este periodică, în sensul că cifra 3 se repetă. Pentru astfel de fracţii zecimale infinite periodice, elevii învaţă în primele clase *formule de transformare* care dau *valoare* unei astfel de fracţii zecimale periodice infinite ca fracţie ordinară (număr raţional). În acest caz, acesta este $\frac{1}{3}$.

Esenţa problemei este, de fapt, de natură analitică. Avem nişte serii speciale a căror sumă o calculăm algoritmic. Deci, de fapt, problema este înglobată în teoria seriilor, care poate fi privită ca parte a teoriei şirurilor, încadrabilă în materia clasei a

XI-a. Din păcate, teoria şirurilor a fost complet scoasă din programa şcolară, ratându-se astfel şansa revenirii riguroase asupra formulelor de transformare menţionate mai sus (şi multe alte şanse produse de teoria seriilor).

Am crezut că este util să prezentăm în acest articol metodic, în mod riguros şi cât mai explicit problematica de mai sus.

2. Serii. Noţiuni elementare

Pentru o expunere dezvoltată privind seriile, se poate consulta [2].

Fie $(a_n)_{n\geq u}$ un şir de numere reale (aici u este un număr natural fixat). Pentru orice $m \geq u$, notăm $S_m = \sum\limits_{i=u}^{m} a_i$.

Definiţia 1. Spunem că seria

$$\sum_{i=u}^{\infty} a_i \tag{1}$$

este *convergentă* dacă şirul $(S_m)_{m\geq u}$ este convergent. În acest caz $S = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$ se numeşte *suma seriei* (1). Dacă o serie nu este convergentă, atunci ea se numeşte *divergentă*.

Observaţii.

1. Seria (1) se mai scrie şi astfel: $\sum\limits_{i\geq u} a_i, \sum\limits_{i} a_i$ sau $a_u + a_{u+1} + \cdots + a_n + \ldots$.

2. De cele mai multe ori se lucrează în cazul $u = 0$ sau în cazul $u = 1$.

3. a_m se numeşte *termenul de rang m al seriei* (1), iar S_m se numeşte *suma parţială de ordin m a seriei* (1).

Se constată că, dacă seria (1) este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Reciproca e falsă. De exemplu, seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, deşi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplu. (Seria geometrică) Se consideră $a \in \mathbb{R}$. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$, adică seria $1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \ldots$ (cu convenţia $0^0 = 1$, dacă $a = 0$) se numeşte *seria geometrică de raţie a*. Ea este convergentă dacă şi numai dacă $a \in (-1, 1)$. În acest caz, suma acestei serii este $S = \frac{1}{1-a}$.

Convenţie. Dacă (1) este o serie convergentă, vom nota de multe ori suma S a seriei cu acelaşi simbol ca seria. De exemplu, în cazul seriei geometrice, vom scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots = \frac{1}{1-a}.$$

Putem face *operaţii elementare* cu seriile convergente.

Argument 15

1. ***Adunarea seriilor***. Se consideră seriile convergente $\sum\limits_{m=u}^{\infty} a_m$, cu suma S şi $\sum\limits_{n=u}^{\infty} b_n$, cu suma T. Atunci seria sumă $\sum\limits_{p=u}^{\infty} (a_p + b_p)$ este convergentă, cu suma $S + T$.

2. ***Înmulţirea cu scalari a seriilor***. Se consideră seria convergentă $\sum\limits_{m=u}^{\infty} a_m$ cu suma S şi numărul real a. Atunci seria $\sum\limits_{m=u}^{\infty} a \cdot a_m$ este convergentă, cu suma $a \cdot S$.

3. ***Neglijarea unui număr finit de termeni ai seriei***. Se consideră seria convergentă $\sum\limits_{m=u}^{\infty} a_m$, cu suma S şi un număr natural $v > u$. Atunci seria $\sum\limits_{m=v}^{\infty} a_m$ este convergentă şi are suma $S = \sum\limits_{i=u}^{v-1} a_i$.

Aplicaţie. Fie numărul real $p > 1$. Atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1. \tag{2}$$

Într-adevăr, deoarece $\frac{1}{p} \in (0, 1)$, seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n$ este convergentă şi are suma $\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$. Rezultă, neglijând primul termen, că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n$ este convergentă şi are suma $\frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}$. Înmulţind ultima serie cu $p - 1$, deducem că seria înmulţită cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n}$ are suma $(p-1)\frac{1}{p-1} = 1$.

Consecinţă. Pentru orice număr $u \in \mathbb{N}$ avem

$$\sum_{n=u}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{1}{p^{u-1}} \tag{3}$$

deoarece seria (3) se obţine din seria (2) prin înmulţire cu $\frac{1}{p^{u-1}}$.

Definiţia 2. Spunem că seria (1) este o *serie de termeni pozitivi* dacă $a_i \geq 0$ pentru orice $i \geq u$.

Să observăm că, pentru o serie cu termeni pozitivi, şirul sumelor parţiale $(S_m)_m$ este crescător: $S_{m+1} = S_m + a_{m+1} \geq S_m$.

Prin urmare, o serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este mărginit. Din această observaţie rezultă imediat

Teorema 1. (Criteriul de majorare) *Fie $\sum\limits_{n=u}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Se presupune că există o serie convergentă cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=u}^{\infty} b_n$, astfel încât $b_n \geq a_n$*

pentru orice $n \geq u$. Atunci seria $\sum\limits_{n=u}^{\infty} a_n$ este şi ea convergentă şi avem $S \leq T$, unde S este suma seriei $\sum\limits_{n=u}^{\infty} a_n$ şi T este suma seriei $\sum\limits_{n=u}^{\infty} b_n$.

Exemplu. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, avem remarcabila serie cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, numită serie armonică generalizată de exponent a. Se arată că ea este convergentă dacă şi numai dacă $a > 1$. Pentru $a = 1$, avem *seria armonică* (care este divergentă).

3. Reprezentarea p-adică a numerelor naturale

Vom considera un număr natural fixat $p \geq 2$, numit *bază de numeraţie*. Elementele mulţimii $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ se numesc *cifre admisibile*.

Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cifre admisibile. Notăm

$$\overline{(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_p} = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0.$$

În cazul $p = 10$ se omite p, notând numai $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

Teorema 2. (Teorema de reprezentare p-adică a numerelor naturale)

Pentru orice număr natural $M > 0$ există o unică reprezentare în forma $M = \overline{(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_p}$, unde a_i sunt cifre admisibile, $n \in \mathbb{N}$ şi $a_n > 0$.

Algoritmul de obţinere a reprezentării din enunţul teoremei este cunoscut din gimnaziu.

Exemplu. $19 = \overline{(10011)_2} = \overline{(18)_{11}}$.

4. Reprezentarea p-adică a numerelor reale

În monografia [1], cititorul poate găsi un bogat material privind subiectul acestui paragraf. În paragraful precedent, am arătat cum se face reprezentarea p-adică a numerelor naturale. Încercând să extindem o teorie a reprezentării p-adice pentru numere reale, va fi suficient să facem o astfel de reprezentare pentru numere strict pozitive. Fie deci un număr $a > 0$. Avem $a = [a] + \{a\}$, unde $[a]$ este partea întreagă, iar $\{a\}$ partea fracţionară a lui a.

Deoarece ştim să îl reprezentăm p-adic pe $[a]$, rămâne să facem această operaţie cu $\{a\}$ în cele ce urmează.

De acum înainte, $p \geq 2$ este un număr natural fixat (baza de numeraţie), iar elementele lui $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ sunt cifrele admisibile.

A. Serii p-adice

Definiţia 3. Se numeşte *serie p-adică* o serie de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \tag{4}$$

unde $a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, pentru orice n.

Dacă $p = 10$, spunem că avem o serie *zecimală*. Dacă $p = 2$, spunem că avem o serie *diadică* sau *binară*. Dacă $p = 3$, spunem că avem o serie *triadică* sau *ternară*.

Se observă că orice serie p-adică este convergentă şi are suma în intervalul $[0, 1]$. Într-adevăr, totul rezultă din faptul că, pentru orice n, avem $\frac{a_n}{p^n} \leq \frac{p-1}{p^n}$. Folosim criteriul de majorare şi relaţia (2).

Definiţia 4. O serie p-adică (4) se numeşte *periodică* dacă are proprietatea: există $m, k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $a_{n+k} = a_n$, pentru orice $n \geq m$.

Aşadar, o serie p-adică periodică are una din următoarele forme (în primul caz spunem că avem o *serie p-adică simplă*, în al doilea caz spunem că avem o *serie p-adică mixtă*:

$$\frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \dots + \frac{b_k}{p^k} + \frac{b_1}{p^{k+1}} + \frac{b_2}{p^{k+2}} + \dots + \frac{b_k}{p^{2k}} + \dots$$
$$+ \frac{b_1}{p^{uk+1}} + \frac{b_2}{p^{uk+2}} + \dots + \frac{b_k}{p^{(u+1)k}} + \dots \tag{I}$$

$$\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \dots + \frac{a_t}{p^t} + \frac{b_1}{p^{t+1}} + \frac{b_2}{p^{t+2}} + \dots + \frac{b_k}{p^{t+k}} + \frac{b_1}{p^{t+k+1}} + \frac{b_2}{p^{t+k+2}} + \dots$$
$$+ \frac{b_k}{p^{t+2k}} + \dots + \frac{b_1}{p^{t+uk+1}} + \frac{b_2}{p^{t+uk+2}} + \dots + \frac{b_k}{p^{t+(u+1)k}} + \dots \tag{II}$$

De obicei, numărul k din definiţia unei serii p-adice periodice se numeşte *perioadă a seriei*. Subliniem că nici numărul m şi nici numărul k din definiţia unei serii p-adice periodice nu sunt unic determinate. Orice număr $n \geq m$ poate juca rolul lui m şi orice număr de forma nk, $n \in \mathbb{N}^*$, poate juca rolul lui k.

Continuând pe această temă, vedem că definiţia seriilor de tip (I) (serie periodică simplă) se poate obţine din definiţia seriilor de tip (II) (serie periodică mixtă) în cazul particular când $t = k$ şi $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$.

Definiţia 5. O serie p-adică se numeşte *finită* dacă există m cu proprietatea că $a_n = 0$, pentru orice $n \geq m$. În caz contrar, seria p-adică se numeşte *infinită*.

Observăm că seriile p-adice finite sunt un tip special de serii p-adice periodice (aici $k = 1$).

Teorema 3. (Calculul sumei unei serii p-adice periodice)

1. *Suma seriei p-adice periodice simple este*

$$\left(\frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \dots + \frac{b_k}{p^k}\right) + \left(\frac{b_1}{p^{k+1}} + \frac{b_2}{p^{k+2}} + \dots + \frac{b_k}{p^{2k}}\right) + \dots$$

este

$$\frac{(\overline{b_1 b_2 \dots b_k})_p}{p^k - 1}.$$

2. *Suma seriei p-adice periodice mixte*

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_t}{p^t}+\left(\frac{b_1}{p^{t+1}}+\frac{b_2}{p^{t+2}}+\cdots+\frac{b_k}{p^{t+k}}\right)+$$
$$+\left(\frac{b_1}{p^{t+k+1}}+\frac{b_2}{p^{t+k+2}}+\cdots+\frac{b_k}{p^{t+2k}}\right)+\ldots$$

este

$$\frac{(\overline{a_1a_2\ldots a_tb_1b_2\ldots b_k})_p-(\overline{a_1a_2\ldots a_k})_p}{p^t(p^k-1)}.$$

Demonstraţie. **1**. Notăm

$$B=\frac{b_1}{p}+\frac{b_2}{p^2}+\cdots+\frac{b_k}{p^k}=\frac{(\overline{b_1b_2\ldots b_k})_p}{p^k}.$$

Avem următoarele sume parţiale ale seriei noastre:

$$S_k=B,\ S_{2k}=B\left(1+\frac{1}{p^k}\right),\ldots,S_{mk}=B\left(1+\frac{1}{p^k}+\frac{1}{p^{2k}}+\frac{1}{p^{(m-1)k}}\right),\ldots$$

Prin urmare suma seriei este, folosind subşirul $(S_{mk})_m$ al şirului sumelor parţiale:

$$S=\lim_m S_{mk}=B\cdot\lim_m\left(1+\frac{1}{p^k}+\frac{1}{p^{2k}}+\frac{1}{p^{(m-1)k}}\right)$$
$$=B\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^k}\right)^m=B\frac{1}{1-\frac{1}{p^k}},$$

deci $S=B\frac{p^k}{p^k-1}=\frac{(\overline{b_1b_2\ldots b_k})_p}{p^k}$.

2. Notăm

$$A=\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_t}{p^t},\quad B=\frac{b_1}{p^{t+1}}+\frac{b_2}{p^{t+2}}+\cdots+\frac{b_k}{p^{t+k}}.$$

Avem următoarele sume parţiale ale seriei noastre:

$$S_t=A,\ S_{t+k}=A+B,\ S_{t+2k}=A+B\left(1+\frac{1}{p^k}\right),\ldots,$$
$$S_{t+mk}=A+B\left(1+\frac{1}{p^k}+\frac{1}{p^{2k}}+\frac{1}{p^{(m-1)k}}\right),\ldots$$

Prin urmare, suma seriei este, folosind subşirul $(S_{t+mk})_m$ al sumelor parţiale

$$S=\lim_m S_{t+mk}=A+B\lim_m\left(1+\frac{1}{p^k}+\frac{1}{p^{2k}}+\frac{1}{p^{(m-1)k}}\right)$$
$$=A+B\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^k}\right)^m=A+B\frac{1}{1-\frac{1}{p^k}}$$
$$S=\frac{1}{p^t}\left(a_1p^{t-1}+a_2p^{t-2}+\cdots+a_t+\frac{b_1p^{k-1}+b_2p^{k-2}+\cdots+b_k}{p^k-1}\right)$$

$$S = \frac{a_1p^{k+t-1}+a_2p^{k+t-2}+\ldots+a_tp^k+b_1p^{k-1}+b_2p^{k-2}+\ldots+b_k-a_1p^{t-1}-a_2p^{t-2}-\ldots-a_t}{p^t(p^k-1)},$$

deci $S = \dfrac{(\overline{a_1a_2\ldots a_tb_1b_2\ldots b_k})_p - (\overline{a_1a_2\ldots a_t})_p}{p^t(p^k-1)}$. $\square$

Observaţii. **1**. Rezultă că suma unei serii p-adice periodice este număr raţional. Vom vedea mai târziu că, invers, orice număr raţional este suma unei serii p-adice periodice.

2. Formula de calcul a sumei seriilor p-adice simple se poate obţine din formula de calcul a sumei seriilor p-adice mixte, luând în particular grupul nerepetabil egal cu grupul care se repetă, adică luând $t = k$ şi $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k$.

3. Pentru $p = 10$ obţinem formulele uzuale din şcoală:

a) Suma seriei zecimale simple este: $\dfrac{\overline{b_1b_2\ldots b_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{de\ k\ ori}}$;

b) Suma seriei zecimale mixte este: $\dfrac{\overline{a_1a_2\ldots a_tb_1b_2\ldots b_k} - \overline{a_1a_2\ldots a_t}}{\underbrace{99\ldots9}_{de\ k\ ori}\,\underbrace{00\ldots0}_{de\ t\ ori}}$.

Notaţii uzuale.

1. O serie p-adică generală (4) se mai notează şi astfel: $(0, a_1a_2\ldots a_n\ldots)_p$. Dacă $p = 10$, se omite p şi se scrie $0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$.

2. O serie p-adică periodică simplă (v.1. din Teorema 3) se notează: $0,(b_1b_2\ldots b_k)_p$. Dacă $p = 10$, se omite p şi se scrie $0,(b_1b_2 ... b_k)$.

3. O serie p-adică periodică mixtă (v. 2. din Teorema 3) se notează: $0, a_1a_2\ldots a_t(b_1b_2\ldots b_k)_p$.

Dacă $p = 10$, se omite p şi se scrie $0, a_1a_2\ldots a_t(b_1b_2\ldots b_k)$.

În toate cazurile, notaţiile de mai sus pot desemna şi suma respectivei serii.

Exemple. Vom aplica Teorema 3, calculând câteva sume de serii p-adice periodice.

1. Considerăm $p = 10$ şi seria $0,(014)$. Suma ei este $S = \dfrac{\overline{014}}{999} = \dfrac{14}{999}$.

2. Considerăm $p = 2$ şi seria $0,11(01)_2$.
Suma ei este $S = \dfrac{(\overline{1101})_2 - (\overline{11})_2}{2^2(2^2-1)} = \dfrac{13-3}{4\cdot3} = \dfrac{5}{6}$.

3. Considerăm $p = 10$ şi "aceeaşi" serie $0,11(01)$.
Suma ei este $S = \dfrac{\overline{1101} - \overline{11}}{9900} = \dfrac{109}{99}$.

4. Considerăm $p = 11$, cu cifrele admisibile $0, 1, \ldots, 9$ şi a = simbol pentru 10.

Fie seria $0,(1a)_{11}$. Suma ei este $S = \dfrac{(\overline{1a})_{11}}{11^2-1} = \dfrac{1\cdot11+10}{120} = \dfrac{7}{40}$.

B. Reprezentarea cu ajutorul seriilor p-adice

Propoziţia 1. *Pentru orice număr* $x \in [0,1]$, *există un şir* $(a_n)_n$ *de numere din mulţimea* $\{0,1,\ldots,p-1\}$ *cu proprietatea că* $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$.

Demonstraţie. Dacă $x = 1$, am văzut că avem relaţia $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n}$ şi afirmaţia este demonstrată, cu $a_n = p-1$ pentru orice n. Dacă $x = 0$, luăm $a_n = 0$, pentru orice n.

Să considerăm un număr x cu $0 < x < 1$. Construim şirurile $(a_n)_n$ şi $(x_n)_n$:

$$\begin{cases} px = a_1 + x_1, & a_1 = [px] \\ px_n = a_{n+1} + x_{n+1}, & a_{n+1} = [px_n],\ n \geq 1. \end{cases} \tag{5}$$

Din definiţie se vede că $a_n \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, pentru orice n, deoarece $px < p$ şi $px_n < p$, având în vedere că $0 \leq x_n < 1$, pentru orice n.

Vom arăta că pentru orice n avem

$$x = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} + \frac{x_n}{p^n} \tag{6}$$

Demonstraţia acestei ultime afirmaţii se face prin inducţie asupra lui n.
Într-adevăr, din prima relaţie de definiţie (5) rezultă $x = \frac{a_1}{p} + \frac{x_1}{p}$.
Acceptând relaţia (6) pentru un număr n, vom avea, folosind a doua relaţie de definiţie din (5), $x_n = \frac{a_{n+1}}{p} + \frac{x_{n+1}}{p} \Rightarrow \frac{x_n}{p^n} = \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}}$ şi atunci (6) devine

$$x = \left(\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^n}\right) + \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}},$$

adică (6) pentru $n+1$ în loc de n. Demonstraţia prin inducţie este completă.
Din (6), obţinem pentru orice n : $\left|x - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i}\right| = x - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i} = \frac{x_n}{p^n} < \frac{1}{p^n} \underset{n}{\to} \infty$, ceea ce arată că $x = \lim\limits_{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p^i}$. □

Remarcă. Să presupunem că există n cu proprietatea $x_n = 0$. Atunci:

– pe de-o parte, rezultă că (6) devine

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i}\,; \tag{7}$$

– pe de altă parte vom avea, folosind a doua relaţie de definiţie din (5): $a_{n+1} = 0$, $x_{n+1} = 0$ şi continuând, $a_m = 0$, $x_m = 0$, pentru orice $m > n+1$.

În acest context, deducem că (7) este, de fapt, relaţia din enunţ:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p^i}\,. \quad \square$$

Am reuşit să demonstrăm că orice număr $x \in [0,1]$ este suma unei serii p-adice, eventual finite (v. Propoziţia 1 şi remarca precedentă). Acest fapt va fi exprimat şi astfel:

Orice număr $x \in [0,1]$ se poate dezvolta în serie p-adică (finită sau infinită).

Definiţia 6. Fie $x \in [0,1]$. O serie p-adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, cu proprietatea că $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, se numeşte *serie de reprezentare* (p-adică) *pentru* x.

Propoziţia 1 se exprimă acum astfel:

Propoziţia 1'. *Pentru orice $x \in [0,1]$ există o serie de reprezentare p-adică.*

Bibliografie

[1] Nicolescu M., *Analiză matematică*, vol. 1, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957

[2] Nicolescu M., Dinculeanu N. şi Marcus S., *Analiză matematică*, vol. 1, (ed. a 5-a), Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977

Profesor, Colegiul Tehnologic "Grigore Cerchez" Bucureşti

Argument 15

O lemă de teoria grupurilor

Ömer Cerrahoğlu

Abstract. In this paper we prove and show some applications of a lemma on the order of the product of two subgroups of a group.

1. Introducere–Motivaţie

Rezultatele la concursuri arată că există o discrepanţă foarte mare între rezultatele de la clasele VII-X şi cele de la clasele XI-XII, discrepanţa fiind mai pronunţată la cele la clasa a XII-a. O întrebare naturală ce trebuie pusă într-o asemenea situatie este "De ce?", care este motivul pentru care există o asemenea discrepanţă. În cele din urmă, subiectele sunt propuse în conformitate cu materia predată la toate clasele, şi atunci ar fi oarecum normal de aşteptat ca rezultatele să fie în general la fel la toate clasele, eventual cu puţine discrepanţe (care rezultă inevitabil din faptul că nu se poate ca la toate clasele subiectele să aibă aceeaşi dificultate). Cu toate acestea, un anumit detaliu nu este considerat: algebra superioară şi analiza se fac doar în doua clase (a XI-a si a XII-a), pe când algebra, combinatorica, geometria, mai mult sau mai puţin, chiar din clasa I. Astfel, pentru problemele de până la clasa a X-a, elevii îşi dezvoltă o *intuiţie* de timpuriu, iar asta înseamnă mai mult sau mai puţin că *înţeleg* problemele, unde prin a înţelege ne referim la o înţelegere profundă, intuitivă. Pe de altă parte, algebra superioară şi analiza se fac doar în două clase, iar atunci elevii nu reuşesc să îşi dezvolte această intuiţie, această înţelegere, iar atunci, chiar dacă problemle nu necesită cunoştinţe foarte avansate (ba s-ar putea spune chiar din contră, că folosesc foarte puţine cunoştinţe), ele nu sunt rezolvate de către majoritatea elevilor. În acest articol vom prezenta o lemă, împreună cu aplicaţii ale ei, pentru a veni în sprijinul elevilor, pentru a dezvolta această intuiţie.

2. Lema

Se va presupune că cititorului îi este cunoscută teorema lui Lagrange (de grupuri) şi noţiunea de grup normal (deşi aceasta din urmă o vom folosi doar la ultima problemă). Vom nota prin $\mathcal{O}(G)$ ordinul unui grup finit G, sau chiar a unei mulţimi finite G (caz în care ordinul este de fapt cardinalul mulţimii). Lema sună în felul urmator:

Lemă. (Teorema 2.B. [1]) *Fie G un grup, iar H si K doua subgrupuri finite ale sale. Notăm $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$. Atunci avem că*

$$\mathcal{O}(HK) = \frac{\mathcal{O}(H)\mathcal{O}(K)}{\mathcal{O}(H \cap K)}\,.$$

Demonstraţie. (Urmărind [1]) Să observăm că mulţimea HK ar putea să nu fie grup (şi nici nu este în cele mai multe cazuri). Tot ceea ce ne spune lema este câte elemente are această mulţime. Pentru a înţelege mai bine "fenomenul", vom analiza întâi cazul în care $H \cap K = \{e\}$, unde prin e se înţelege elementul unitate al grupului G. Ceea ce avem de arătat este că $\mathcal{O}(HK) = \mathcal{O}(H)\mathcal{O}(K)$. Deoarece în mod evident $\mathcal{O}(HK) \leq \mathcal{O}(H)\mathcal{O}(K)$ (pentru că fiecarui element din HK i se poate atribui o pereche $(h, k) \in H \times K$ în mod injectiv, astfel încât elementul din HK este hk), deci am dori să arătăm că are loc chiar egalitatea. Aceasta poate avea loc dacă şi numai dacă injecţia de care vorbeam mai înainte este chiar surjecţie, care înseamnă că de fapt fiecarui element din HK i se poate atribui o *unică* pereche. Aceasta revine la a demonstra că dacă $hk = h_1k_1$, cu $h, h_1 \in H$ şi $k, k_1 \in K$, atunci $h = h_1$ şi $k = k_1$. Pentru a demonstra aceasta, vom folosi bineînţeles faptul că $H \cap K = \{e\}$. Deci să presupunem că $hk = h_1k_1$. Atunci, înmulţind la stânga cu $(h_1)^{-1}$ şi la dreapta cu k^{-1}, obţinem că $(h_1)^{-1}h = k_1k^{-1}$, iar pentru că H şi K sunt grupuri şi $H \cap K = \{e\}$, avem că $(h_1)^{-1}h = k_1k^{-1} = e$, deci $h_1 = h$ şi $k_1 = k$, ceea ce demonstrează problema în acest caz.

Trecem acum la cazul general. Precum în cel precedent, vom analiza când avem egalitatea $hk = h_1k_1$, pentru $h, h_1 \in H$ şi $k, k_1 \in K$. Precum mai înainte, aceasta are loc dacă şi numai dacă $(h_1)^{-1}h = k_1k^{-1}$. Dar pentru că H si K sunt grupuri, $(h_1)^{-1}h = k_1k^{-1}$ va trebui sa fie egal cu un element din $H \cap K$. Mai mult, pentru orice element a din $H \cap K$ şi h şi k fixate, există şi sunt unici h_1 şi k_1 astfel încât $(h_1)^{-1}h = k_1k^{-1} = a$, daţi de relaţiile $h_1 = ha^{-1}$ şi $k_1 = ak$. Aceasta înseamnă că dacă ne uităm la toate produsele hk cu $(h, k) \in H \cap K$, fiecare element din HK va apărea de $\mathcal{O}(H \cap K)$ ori, ceea ce demonstrează faptul că $\mathcal{O}(HK) = \frac{\mathcal{O}(H)\mathcal{O}(K)}{\mathcal{O}(H \cap K)}$. $\square$

3. Aplicaţii

Cu toate că lema pare simplă şi inocentă, ea are multiple aplicaţii. Ideea de bază, dupa cum se va şi vedea, este că, în mod evident, $\mathcal{O}(HK) \leq \mathcal{O}(G)$. Aceasta implică faptul că dacă $\mathcal{O}(H)$ si $\mathcal{O}(K)$ sunt suficient de mari, atunci şi $\mathcal{O}(H \cap K)$ va fi mare. Dar să trecem acum la aplicaţii. Prima problemă s-a dat la concursul "Laurenţiu Duican" în anul 1993:

Problema 1. ([2]) *Să se arate că un grup cu* $2(2n + 1)$ *elemente, unde* n *este un număr natural, are cel mult un subgrup de ordin* $2n + 1$.

Eugen Păltănea, Sabin Tăbârcă

Demonstraţie. Presupunem contrariul şi fie atunci H şi K două subgrupuri distincte ale lui G de ordin $2n + 1$. Deoarece, precum am precizat în observaţia anterioară, $\mathcal{O}(HK) \leq \mathcal{O}(G)$, avem că $\mathcal{O}(H \cap K) \geq \frac{2n+1}{2}$. Dar pe de o altă parte $H \cap K$ este subgrup al lui H şi din Lagrange avem atunci că $\mathcal{O}(H \cap K)|\mathcal{O}(H)$. Din inegalitatea $\mathcal{O}(H \cap K) \geq \frac{2n+1}{2}$ avem că singura opţiune viabilă este $\mathcal{O}(H \cap K) = 2n + 1$ care implică faptul că $H = K$, contradicţie. Deci există cel mult un subgrup de ordin $2n + 1$. □

Urmatoarea problemă a fost dată la concursul "Spiru Haret" în anul 1988. Demonstraţia este foarte similară cu cea precedentă. O altă soluţie este posibilă, dar lăsăm cititorul să o gasească.

Problema 2. ([3]) *Fie G un grup de ordin $2n$, cu $n \geq 2$ natural, iar H_1 si H_2 două subgrupuri ale lui G de ordin n, astfel încât $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, unde e este elementul neutru al lui G. Determinaţi grupul G.*

Demonstraţie. Iarăşi, pentru a avea $\mathcal{O}(H_1H_2) \leq \mathcal{O}(G)$ trebuie ca $\frac{\mathcal{O}(H_1)\mathcal{O}(H_2)}{\mathcal{O}(H_1 \cap H_2)} \leq \mathcal{O}(G)$, care e echivalent pe baza ipotezei cu $n^2 \leq 2n$. Aceasta implică $n \leq 2$, deci din ipoteză $n = 2$. Deci $\mathcal{O}(G) = 4$. Dar există doar două grupuri de ordin 4: cel al lui Klein şi cel ciclic. Pentru cel ciclic nu există H_1 şi H_2 cu proprietatea cerută, dar pentru grupul lui Klein există. Lăsăm cititorul să demonstreze acestea.

Cei care cunosc teorema lui Cauchy vor sesiza că urmatoarea problemă implică faptul că orice grup cu pq elemente cu $p > q$ prime are exact un subgrup de ordin p. Această problemă se utlizează pentru a caracteriza grupurile cu pq elemente. Cititorului interesat îi recomandăm să citească capitolul 2 din [1].

Problema 3. (Corolar la Teorema 2.B. [1]) *Demonstraţi că un grup G cu pq elemente, unde $p > q$ sunt două numere prime, are cel mult un grup de ordin p.*

Demonstratie. Să presupunem că ar exista două subgrupuri de ordin p ale grupului G. Fie aceste două grupuri H si K. Aplicând lema pentru ele, obtinem că $pq \geq \frac{p^2}{\mathcal{O}(H \cap K)}$. Pentru ca $p > q$, trebuie ca $\mathcal{O}(H \cap K) > 1$. Dar H şi K au ordinul p care e prim, deci nu au subgrupuri proprii. Asta înseamnă că singura posibilitate este ca $H \cap K = H$, sau cu alte cuvinte $H = K$. Deci G are cel mult un subgrup de ordin p. Să observăm că nu avem nevoie de ipoteza q prim. □

Demonstraţia următoarei probleme, dată la concursul "Gheorghe Vrânceanu" în 1988, este mai complicată decât soluţia alternativă care există. Această soluţie alternativă se bazează mai mult sau mai puţin pe demonstraţia teoremei lui Lagrange şi lăsăm cititorul să o găsească.

Problema 4. ([3]) *Fie G un grup cu $2n$ elemente, iar H un subgrup al său cu n elemente. Demonstraţi că $x^2 \in H$ pentru orice $x \in G$.*

Demonstraţie. Bineînţeles, unul dintre cazuri este trivial, şi anume cel în care $x \in H$. Deci presupunem că $x \in G \backslash H$. Pentru a aplica lema, avem nevoie de 2 grupuri; cu toate acestea, noi avem până acum doar unul, anume H. Celălalt grup ar trebui să fie cumva legat de x, ceea ce ne conduce la grupul ciclic generat de x, pe care îl notăm (x) (avem că $(x) = \{x^i : i \in \mathbb{N}\}$). Subgrupul (x) este finit pentru că ordinul lui x în G este finit. Aplicăm acum lema pentru H si (x) şi obţinem că $\mathcal{O}(H \cap (x)) \geq \frac{1}{2}\mathcal{O}((x))$. Pentru că (x) nu e inclus în H (pentru că, în particular, $x \notin H$), trebuie obligatoriu ca $\mathcal{O}(H \cap (x)) = \frac{1}{2}\mathcal{O}((x))$ (din Lagrange). Dar acum ne vom folosi de caracterizarea subgrupurilor unui grup ciclic (în cazul în care cititorul nu a mai întâlnit acest rezultat, îi recomandăm să încerce să-l demonstreze singur): pentru orice subgrup al lui (x), unde ordinul lui x este k, există $d|k$ astfel încât subgrupul se poate scrie că (x^d) (adică subgrupul este chiar subgrupul ciclic generat de x^d). În plus, acest subgrup are ordinul $\frac{k}{d}$. Aşadar, pentru $H \cap (x)$ se observă că singura variantă viabilă este $d = 2$ (ca să avem că $\mathcal{O}(H \cap (x)) = \frac{1}{2}\mathcal{O}((x))$, care implică faptul că $x^2 \in H$. □

Urmatoarea problemă a apărut pe lista scurtă a Olimpiadei Naţionale din anul 2005. Aceasta poate fi generalizată în mai multe feluri; în [5] cititorul poate găsi o astfel de generalizare. Pentru această problemă vom avea nevoie, pe lângă lemă, de nişte inegalităţi simple.

Problema 5. ([4]) *Fie p un număr prim, iar e elementul neutru al grupului G de ordin $2p^2$. H_1 si H_2 sunt două subgrupuri ale lui G pentru care $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ şi $H_1 \cup H_2$ are cel puţin $2p^2 - p + 2$ elemente. Demonstraţi că cel puţin unul din cele două subgrupuri este chiar G.*

Dana Heuberger

Demonstratie. Pentru început, să presupunem că niciunul din grupurile H_1 şi H_2 nu este G. Atunci $\mathcal{O}(H_1), \mathcal{O}(H_2) \leq \frac{1}{2}\mathcal{O}(G)$. Ceea ce dorim să arătăm este că $\mathcal{O}(H_1H_2)$ este mare, pentru care avem nevoie să ştim că $\mathcal{O}(H_1)\mathcal{O}(H_2)$ este mare. Aceasta putem s-o facem dacă ştim că $\mathcal{O}(H_1) + \mathcal{O}(H_2)$ este mare, pentru care vom folosi urmatorul caz particular al principiului includerii şi excluderii: dacă A şi B sunt două mulţimi, atunci $\mathcal{O}(A \cap B) + \mathcal{O}(A \cup B) = \mathcal{O}(A) + \mathcal{O}(B)$. Din aceasta avem, pe baza ipotezei, că $\mathcal{O}(H_1) + \mathcal{O}(H_2) = 2p^2 - p + 3$. Să observăm că pentru două numere x şi y cu suma fixată, produsul lor este cu atât mai mic cu cât modulul diferenţei dintre ele creşte, cum este demonstrat de egalitatea $xy = \frac{1}{4}((x + y)^2 - (x - y)^2)$. Pentru că $\mathcal{O}(H_1), \mathcal{O}(H_2) \leq p^2$, produsul $\mathcal{O}(H_1)\mathcal{O}(H_2)$ este minim când unul dintre ordine este p^2 iar celălalt $p^2 - p + 3$ (ca modulul diferenţei dintre cele două ordine să fie cât mai mare). Aşadar $\mathcal{O}(H_1)\mathcal{O}(H_2) \geq p^2(p^2 - p + 3)$. Dar pe baza lemei avem următorul şir de inegalităţi: $2p^2 = \mathcal{O}(G) \geq \mathcal{O}(H_1H_2) = \mathcal{O}(H_1)\mathcal{O}(H_2) \geq p^2(p^2 - p + 3)$, de unde $2 \geq p^2 - p + 3$, sau $p^2 - p + 1 \leq 0$, care este falsă pentru orice $p \geq 2$. Aşadar unul din cele 2 subgrupuri este chiar G, demonstrând problema. Să observăm că nu am folosit nicaieri că p este prim. □

Problema următoare caracterizează grupurile finite ce pot fi acoperite cu 3 subgrupuri proprii. Unul din corolarele acestei probleme este că orice grup finit ce poate fi acoperit cu 3 subgrupuri proprii are ordinul divizibil cu 4. Astfel de probleme de acoperiri au mai apărut: în anul 1992, la concursul "Gheorghe Ţiţeica" s-a dat următoarea problemă: *demonstraţi că niciun corp nu poate fi scris ca reuniune a 3 subcorpuri proprii.* În cazul în care corpul este finit, putem aplica problema următoare: dacă avem corpul K, şi $(K, +)$ şi $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ sunt acoperite cu 3 subgrupuri proprii, ceea ce ar implica faptul că ambele au ordinul divizibil cu 4, fals. Totuşi, demonstraţia nu este prea grea nici în cazul în care corpul este infinit, şi lăsăm cititorul sa o găsească. O altă problemă a apărut la acelaşi concurs în anul 1994 şi cerea să se arate că niciun corp finit nu poate fi scris ca reuniune de subcorpuri proprii. Aceasta are cel putin 2 demonstraţii: prima utilizează faptul că, pentru orice corp finit K, orice subgrup al grupului $K\backslash\{0\}$ este ciclic. A doua foloseşte caracterizarea corpurilor finite. Cititorului interesat îi recomandăm capitolul 7 din [1].

Problema 6. *Demonstraţi că un grup finit G poate fi scris ca reuniune de 3 subgrupuri proprii dacă şi numai dacă există un subgrup normal H al lui G pentru care grupul cât G/H este izomorf cu grupul lui Klein.*

Demonstraţie. Să presupunem că $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, unde G_1, G_2, G_3 sunt subgrupuri proprii ale lui G. Pentru că niciun grup nu poate fi scris ca reuniune de două subgrupuri proprii (aceasta o lăsăm cititorului, căci iese imediat din nişte ordine) nu avem relaţii de incluziune între cele 3 grupuri (adică nu putem avea $G_1 \subset G_2$, spre exemplu). Pentru început, să arătăm că cel puţin unul din cele 3 subgrupuri are ordinul $\frac{1}{2}\mathscr{O}(G)$. Să presupunem contrariul. Atunci, din teorema lui Lagrange, avem că fiecare din cele 3 grupuri are ordinul cel mult $\frac{1}{3}\mathscr{O}(G)$. Dar pentru că fiecare conţine elementul neutru al lui G, reuniunea lor are cel mult $\mathscr{O}(G) - 2$ elemente, deci nu pot acoperi tot G. Deci unul dintre subgrupuri (fără a restrânge generalitatea, G_1) are ordinul $\frac{1}{2}\mathscr{O}(G)$ (nu poate avea ordin mai mare căci altfel ar coincide cu G). Aplicând lema, se obţine, precum în exemplele anterioare, că $\mathscr{O}(G_1 \cap G_2) \geq \frac{1}{2}\mathscr{O}(G_2)$ şi analog pentru G_3 (de fapt are loc urmatorul rezultat: pentru doua subgrupuri H si K ale unui acelaşi grup finit G astfel încât $\mathscr{O}(H)\frac{1}{2}\mathscr{O}(G)$ avem că $\mathscr{O}(H \cap K) \geq \frac{1}{2}\mathscr{O}(K)$). Să studiem acum cardinalul reuniunii celor trei subgrupuri. În primul rând îl avem pe G_1, care "aduce" $\frac{1}{2}\mathscr{O}(G)$ elemente. Apoi avem G_2, care aduce cel mult (de fapt exact) $\frac{1}{2}\mathscr{O}(G_2)$ elemente noi, căci restul sunt deja incluse în G_1. Similar, şi G_3 aduce tot cel mult $\frac{1}{2}\mathscr{O}(G_3)$ elemente noi reuniunii celor doua de dinainte (iaraşi, cel puţin jumătate din elementele sale se află deja în G_1). Deci reuniunea celor trei mulţimi are cel mult $\frac{1}{2}(\mathscr{O}(G)+\mathscr{O}(G_2)+\mathscr{O}(G_3))$ elemente. Deoarece $\mathscr{O}(G_2), \mathscr{O}(G_3) \leq \frac{1}{2}\mathscr{O}(G)$, această reuniune are cel mult $\mathscr{O}(G)$ elemente. Pentru că trebuie să avem exact $\mathscr{O}(G)$ elemente, avem egalitate în toate inegalităţile, deci $\mathscr{O}(G_2) = \mathscr{O}(G_3) = \frac{1}{2}\mathscr{O}(G)$. Fie acum $H = G_1 \cap G_2$. Pentru că avem egalitate în toate inegalitătile, avem că $\mathscr{O}(H) = \frac{1}{4}\mathscr{O}(G)$. Reuniunea dintre G_1 şi G_2 are $\frac{3}{4}\mathscr{O}(G)$ elemente. Mai rămân un număr de $\frac{1}{4}\mathscr{O}(G)$ elemente care vor trebui "furnizate" de G_3. Fie deci $H_1 = G_3 \cap G_1$ si $H_2 = G_3 \cap G_2$. Avem că $\mathscr{O}(H_1) = \mathscr{O}(H_2) = \frac{1}{4}\mathscr{O}(G)$. În afară de elementele din $H_1 \cup H_2$, mai avem cele $\frac{1}{4}\mathscr{O}(G)$ pomenite anterior. Deoarece $\mathscr{O}(G_3) = \frac{1}{2}\mathscr{O}(G)$, singura posibilitate este ca $H_1 = H_2$ (pentru că reuniunea lor trebuie să aibă cel mult $\frac{1}{4}\mathscr{O}(G)$ elemente, câte au fiecare în parte). Dar atunci $H_1 \subset G_1 \cap G_2$ şi $\mathscr{O}(H_1) = \mathscr{O}(G_1 \cap G_2)$, deci $H = H_1$. Vom arăta că H este subgrupul lui G cerut. Pentru fiecare grup G_i, cu i între 1 şi 3, subgrupul H defineşte pe ele doua clase laterale (nu există diferenţa între clase laterale stângi şi drepte aici, căci după cum se ştie, pentru orice grup finit K, orice subgrup al său de ordin $\frac{1}{2}\mathscr{O}(K)$ este normal, adică clasele laterale stângi şi drepte coincid), pe care le numim H şi K_i. Atunci clasele laterale pe care H le defineşte pe G sunt H şi cele 3 clase K_i. Dar aceste clase K_i sunt simultan şi drepte şi stângi, iar acest lucru nu se schimbă când considerăm pe H ca subgrup a lui G. Aceasta arată că H e normal în G şi că G/H are ordinul 4. Dar să observăm că în grupul G/H, fiecare element are ordinul cel mult 2: pentru H este clar, iar pentru K_i rezultă din faptul că are ordinul 2 când considerăm pe H ca subrup al lui G_i; ordinul lui K_i nu se schimbă când îl considerăm pe H ca subgrup al lui G. Dar există un singur grup de ordin 4 în care fiecare element are ordinul cel mult 2 şi anume grupul lui Klein. Aceasta demonstrează o implicaţie a problemei, şi anume că dacă G se scrie ca reuniune de 3 subgrupuri proprii, atunci există un subgrup normal H al său, astfel încât G/H este izomorf cu grupul lui Klein. Cealaltă implicaţie este simplă: dacă celelalte 4 clase definite de H sunt H si K_i pentru i între 1 si 3, atunci putem considera $G_i = H \cup K_i$. Demonstraţia că acestea sunt grupuri o lăsăm cititorului. □

4. Încheiere

Lista cu aplicaţii nu este nici pe departe completă; în acest articol am dorit doar să familiarizăm cititorul cu această lemă şi modurile în care ea se poate aplica. Recomandăm cititorilor interesaţi să caute şi să găsească ei înşuşi alte aplicaţii ale acestei leme.

Bibliografie

[1] Hernstein I. N., *Topics in Algebra*, Ed. Ginn and Company

[2] *Concursul National de Matematica "Laurenţiu Duican"*, Brasov 1992-2004, Ed. Paralela 45

[3] Cojocaru O., *Concursul interjudetean "Spiru Haret - Gheorghe Vrânceanu"* $1985 - 1996$, Ed. Paralela 45

[4] Andronache M. (colectiv), *RMC* 2005 *Romanian Mathematical Competitions*, Societatea de Ştiinţe Matematice din România

[5] Revista *"Argument"* nr. 12/2010, Ed. CECONII Baia Mare

[6] Busneag D. (colectiv), *Concursul de Matematica "Gheorghe Ţiţeica"* $1979 - 1998$, Ed. Gil

Elev, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Baia Mare

Argument 15

Polinoame ireductibile şi corpuri finite

Costel Chiteş

Abstract. The purpose of this paper is to count the irreducible polynomials of a certain degree of the field $\mathbb{F}_n$.

În generarea corpurilor finite, un rol important îl au polinoamele ireductibile şi idealele generate de către acestea. Ne propunem să numărăm polinoamele ireductibile de gradul n peste corpul $\mathbb{Z}_p$, unde p este un număr prim. Acest rezultat ne va justifica pe cale combinatorială existenţa unui corp finit cu p^n elemente (unde p este un număr prim), rezultat cunoscut ca o teoremă a lui Galois. Cunoştinţele depăşesc programa analitică de liceu, dar sunt necesare în pregătirea olimpiadelor şcolare. Considerăm că această abordare oferă o perspectivă studiului algebrei în anii de facultate.

1. Parte introductivă

Vom prezenta unele noţiuni şi rezultate de bază.

Definiţia 1. Fie R un inel. Două elemente $a, b \in R$ se numesc asociate în divizibilitate - şi notăm $a \sim b$ - dacă $a \mid b$ şi $b \mid a$.

Exemplul 1. În inelul $\mathbb{Z}$, avem $2 \sim (-2)$.

Observaţia 1. Fie R un inel şi $a \in R$. Are loc echivalenţa $a \sim 1$ dacă şi numai dacă a este inversabil în R.

Definiţia 2. Fie R un inel integru. Un element $q \in R$ nenul şi neinversabil se numeşte ireductibil dacă orice divizor $a \in R$ al lui q este asociat cu q sau cu 1, adică $a \sim q$ sau $a \sim 1$.

Definiţia 3. Fie R un inel şi $\emptyset \neq I \subseteq R$. I se numeşte ideal stâng (drept) al lui R dacă

1) $\forall\, x, y \in I$ rezultă $x - y \in I$.
2) $\forall\, r \in R$, $\forall\, x \in I$, rezultă $rx \in I$ (respectiv $xr \in I$).

Un ideal stâng şi drept se numeşte ideal bilateral.

Observaţia 2.

a) În cazul inelelor comutative, noţiunile de inel stâng, drept sau bilateral coincid.
b) Dacă R este un inel şi $a \in R$ atunci $Ra = \{ra \mid r \in R\}$, $aR = \{ar \mid r \in R\}$ şi $aRa = \{ara \mid r \in R\}$ sunt ideale ale lui R generate de elementul a. Ra este ideal stâng, aR este ideal drept, iar aRa este ideal bilateral.
   Idealele generate de un singur element $a \in R$ se numesc ideale principale şi se notează cu (a).

c) În inelul comutativ $\mathbb{Z}$, idealul generat de 5 este: $(5) = 5\mathbb{Z} = \{\, 5k \mid\ k \in \mathbb{Z}\}$
d) Pentru orice polinom $h \in R\,[X]$, idealul generat de h este

$$I = (h) = \{\, h \cdot g \mid\ g \in\ R\,[X]\,\}$$

Propoziţia 1. *Idealele lui $\mathbb{Z}$ coincid cu subgrupurile grupului aditiv $\mathbb{Z}$.*

Demonstraţie. $I = \{0\}$ este un ideal al inelului comutativ $\mathbb{Z}$, numit idealul nul. Fie $I \neq \{0\}$ un ideal al lui $\mathbb{Z}$. Alegem cel mai mic număr din mulţimea $\mathbb{N}^* \cap I$, pe care îl notăm cu n. Rezultă $n\mathbb{Z} \subseteq I$.

Fie $x \in I$. Aplicând teorema împărţirii cu rest, rezultă că există şi sunt unice $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încăt $x = nq + r$, $0 \leq r \leq n-1$. Obţinem $r = x - nq \in I$. Din minimalitatea lui n rezultă $r = 0$, adică $x = nq \in n\mathbb{Z}$, de unde rezultă şi incluziunea $I \subseteq n\mathbb{Z}$. Aşadar $I = n\mathbb{Z}$. Dacă $r \in \mathbb{Z}$ şi $x \in I = n\mathbb{Z}$, atunci $rx \in I$, deci acestea sunt toate idealele lui $\mathbb{Z}$ şi coincid cu subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}, +)$. □

Observaţia 3.

1) Dacă avem corpul comutativ k, în inelul $k\,[X]$ funcţionează teorema împărţirii cu rest. Rezultă că orice două polinoame $f, g \in k\,[X]$ au un cel mai mare divizor comun (f, g).
2) Orice polinom nenul din $k\,[X]$ se descompune în mod unic (cu excepţia ordinii factorilor sau a unei asocieri în divizibilitate) într-un produs finit de polinoame ireductibile. Spunem că inelul $k\,[X]$ este factorial.
3) Dacă avem corpul comutativ k, iar $f \in k\,[X]$ este un polinom de gradul doi sau trei, atunci are loc echivalenţa: f este ireductibil dacă şi numai dacă f nu are rădăcini în k.
4) În cazul în care k este un corp comutativ şi gradul polinomului $f \in k\,[X]$ este mai mare sau egal cu patru, afirmaţia precedentă nu mai este valabilă. De exemplu, polinomul $f = \left(X^2+1\right)\left(X^2+2\right) \in \mathbb{R}\,[X]$ nu are rădăcini reale, dar este reductibil peste $\mathbb{R}$.

2. Inel factor

Prin imitarea construcţiei inelului $\mathbb{Z}_n$, care se obţine factorizând inelul $\mathbb{Z}$ cu ajutorul relaţiei de congruenţă modulo n, se introduce noţiunea de inel factor al unui inel oarecare R.

Fie R un inel comutativ şi I un ideal bilateral al său. Introducem relaţia de echivalenţă $\sim$ pe R, astfel: $\forall\, a, b \in R$, avem $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$.
Relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă (reflexivă, simetrică şi tranzitivă) pe R. Obţinem mulţimea factor $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$.

Propoziţia 2. *Fie I un ideal al inelului comutativ R. Operaţiile de adunare şi înmulţire pe mulţimea factor R/I, date prin: $(a+I)+(b+I) = a+b+I$ şi $(a+I)\cdot(b+I) = a \cdot b + I, \forall\, a, b \in R$ sunt corect definite.*
Mai mult, $(R/I,\, +,\, \cdot\,)$ este un inel comutativ, numit inel factor, iar funcţia $\pi : R \to R/I$, $\pi\,(a) = a + I$ este un morfism surjectiv de inele, numit surjecţie canonică.

Observaţia 4. În inelul $\mathbb{Z}$ al numerelor întregi, un ideal oarecare este de forma $n\mathbb{Z}$, cu $n \in \mathbb{N}$. Relaţia de congruenţă modulo n, introdusă în matematică de C.F. Gauss, este: pentru $a, b \in \mathbb{Z}$, avem $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid (a-b)$. Inelul factor este $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

Aplicaţia 1. Considerăm polinomul $f = X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$. Ştim că $\mathbb{Z}_2$ este corp, deci $\mathbb{Z}_2[X]$ este un domeniu de integritate. Cum $grad\,(f) = 2$, $f\left(\hat{0}\right) = \hat{1}$, $f\left(\hat{1}\right) = \hat{1}$, rezultă că f este un polinom ireductibil.

Fie $I = (f)$ idealul principal generat de f, adică $I = \{\, f \cdot g \mid g \in \mathbb{Z}_2[X]\}$.
Ne propunem să determinăm clasele de echivalenţă şi tablele operaţiilor în inelul factor. Aplicând teorema împărţirii cu rest, pentru orice $h \in \mathbb{Z}_2[X]$ există şi sunt unice $q, r \in \mathbb{Z}_2[X]$ pentru care $h = f \cdot q + r$, cu $grad\,(r) < grad\,(f)$. Obţinem $grad\,(r) < 2$, de unde deducem că $r \in \left\{\hat{0}, \hat{1}, X, X+\hat{1}\right\}$. Cum aceste polinoame nu sunt congruente modulo f şi orice polinom $h \in \mathbb{Z}_2[X]$ este congruent modulo f cu unul dintre ele, rezultă că inelul factor este:

$\mathbb{Z}_2[X]/(f) = \left\{\left[\hat{0}\right], \left[\hat{1}\right], [X], \left[X+\hat{1}\right]\right\}$, unde $\left[\hat{0}\right] = \{f \cdot g \mid g \in \mathbb{Z}_2[X]\}$,
$\left[\hat{1}\right] = \left\{f \cdot g + \hat{1} \mid g \in \mathbb{Z}_2[X]\right\}$, $[X] = \{f \cdot g + X \mid g \in \mathbb{Z}_2[X]\}$,
$\left[X+\hat{1}\right] = \left\{f \cdot g + X + \hat{1} \mid g \in \mathbb{Z}_2[X]\right\}$.

Scriem tablele operaţiilor de adunare şi înmulţire în $\mathbb{Z}_2[X]/(f)$:

$+$	$[\hat{0}]$	$[\hat{1}]$	$[X]$	$[X+\hat{1}]$
$[\hat{0}]$	$[\hat{0}]$	$[\hat{1}]$	$[X]$	$[X+\hat{1}]$
$[\hat{1}]$	$[\hat{1}]$	$[\hat{0}]$	$[X+\hat{1}]$	$[X]$
$[X]$	$[X]$	$[X+\hat{1}]$	$[\hat{0}]$	$[\hat{1}]$
$[X+\hat{1}]$	$[X+\hat{1}]$	$[X]$	$[\hat{1}]$	$[\hat{0}]$

$\cdot$	$[\hat{0}]$	$[\hat{1}]$	$[X]$	$[X+\hat{1}]$
$[\hat{0}]$	$[\hat{0}]$	$[\hat{0}]$	$[\hat{0}]$	$[\hat{0}]$
$[\hat{1}]$	$[\hat{0}]$	$[\hat{1}]$	$[X]$	$[X+\hat{1}]$
$[X]$	$[\hat{0}]$	$[X]$	$[X+\hat{1}]$	$[\hat{1}]$
$[X+\hat{1}]$	$[\hat{0}]$	$[X+\hat{1}]$	$[\hat{1}]$	$[X]$

Studiind tablele operaţiilor deducem că $\mathbb{Z}_2[X]/(f)$ este un corp comutativ cu 4 elemente. El conţine un subcorp izomorf cu $\mathbb{Z}_2$.
Grupul său multiplicativ $U(\mathbb{Z}_2[X]/(f)) = \left\{\left[\hat{1}\right], [X], \left[X+\hat{1}\right]\right\}$ este ciclic, un generator al său fiind $[X]$.

Propoziţia 3. *Fie k un corp comutativ, $f \in k[X]$ un polinom nenul şi $I = (f)$ idealul generat de f. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) f este ireductibil peste corpul k.
b) $k[X]/I$ este un corp.
c) $k[X]/I$ este un domeniu de integritate.

Demonstraţie. "**a**) $\Rightarrow$ **b**)" Polinomul f este ireductibil. Fie $g + I \in k[X]/I$ nenul, deci $g \notin I$. Atunci, deoarece f este ireductibil şi $f \nmid g$, obţinem $(f, g) = 1$.

Rezultă că există $s, t \in k[X]$ pentru care $s \cdot g + t \cdot f = 1$. Trecând la clase, rezultă $(g+I) \cdot (s+I) = 1 + I$, aşadar $g + I$ este inversabil, deci $k[X]/I$ este un corp.
"**b**) $\Rightarrow$ **c**)" este evident.
"**c**) $\Rightarrow$ **a**)" Mulţimea factor $k[X]/I$ este un inel integru. Presupunem că f nu este ireductibil. Deoarece inelul $k[X]$ este factorial, există $h_1, h_2 \in k[X]$ pentru care $f = h_1 \cdot h_2$, cu $grad(h_1) < grad(f)$ şi $grad(h_2) < grad(f)$. Trecând la clase se obţine: $I = (h_1 + I) \cdot (h_2 + I)$. Deoarece $k[X]/I$ este un inel integru, rezultă $h_1 + I = I$ sau $h_2 + I = I$, deci $h_1 \in I$ sau $h_2 \in I$, adică $f \mid h_1$ sau $f \mid h_2$, contradicţie. Aşadar f este ireductibil. $\square$

Cu ajutorul unor noţiuni avansate de teoria corpurilor se obţin următoarele rezultate importante:

Propoziţia 4. *Dacă p este un număr prim şi $n \in \mathbb{N}^*$ atunci există un polinom ireductibil $f \in \mathbb{Z}_n[X]$ cu $grad(f) = n$.*

Definiţia 4. Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Funcţia $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$,
$\mu(m) = \begin{cases} 1, \ \text{dacă} \quad m = 1 \\ 0, \ \text{dacă există} \quad e_i > 1 \\ (-1)^n, \ \text{dacă } 1 = e_1 = e_2 = \ldots = e_n \end{cases}$, unde $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_n^{e_n}$, se numeşte funcţia lui Möbius.

Propoziţia 5. (**Formula lui Gauss**) *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi p un număr prim. Numărul polinoamelor monice şi ireductibile de gradul n din $\mathbb{Z}_p[X]$ este egal cu*

$$N_n = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) \cdot p^{\frac{n}{d}}.$$

Observaţia 6. Din tabelul următor putem determina N_n, pentru valori mici ale lui p:

$n \backslash p$	5	7
2	10	21
3	40	112
4	150	588
5	624	3.360
6	2.580	19.544
7	11.160	117.648
8	48.750	720.300
9	217.000	4.483.696

Observaţia 7. Este cunoscut faptul că dacă avem corpul finit k, atunci există numărul prim p astfel încât $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{de\ p\ ori\ 1} = 0$. Numărul p se numeşte caracteristica lui k şi este minim astfel încât $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{de\ p\ ori\ 1} = 0$.
Mai mult, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât k are p^n elemente.

Propoziţia 6. *Fie numărul prim p şi $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ un polinom ireductibil de gradul n. Corpul $\mathbb{Z}_p[X]/(f)$ are p^n elemente.*

Indicaţie. Folosind Propoziţia 3 deducem, ca în Aplicaţia 1, că $\mathbb{Z}_p[X]/(f)$ este un corp cu p^n elemente.

Observaţia 8. Se ştie că grupul multiplicativ al unui corp finit este ciclic. În consecinţă, grupul multilpicativ al corpului din Propoziţia 6 are $\varphi(p^n - 1)$ generatori.

3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 1. *Definim funcţia $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $N(a+bi) = a^2 + b^2$, numită funcţia normă.*

a) *Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, atunci $N(z_1) \cdot N(z_2)$.*
b) *Arătaţi că $z \in \mathbb{Z}[i]$ este inversabil dacă şi numai dacă $N(z) = 1$. Deduceţi că $U(\mathbb{Z}[i]) = \{-1, 1, -i, i\}$.*
c) *Care dintre elementele $2, 1+i, 3$ sunt ireductibile în inelul $\mathbb{Z}[i]$?*

Exerciţiul 2. *Fie $f = X^4 + X^3 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$.*

a) *Demonstraţi că f este ireductibil.*
b) *Care este cardinalul corpului $\mathbb{Z}_2[X]/(f)$?*
c) *Determinaţi $\left[X^2 + X + \hat{1}\right]^{-1}$ în corpul $\mathbb{Z}_2[X]/(f)$.*

Indicaţie. a) $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$, deci f nu are factori de gradul întâi. Dintre toate polinoamele de gradul al doilea, de forma $X^2 + aX + b$, singurul ireductibil este $q = X^2 + X + \hat{1}$. Cum $q^2 = X^4 + X^2 + 1 \neq f$, rezultă că f este un polinom ireductibil peste $\mathbb{Z}_2$.

b) Aplicând teorema împărţirii cu rest in $\mathbb{Z}_2[X]$, obţinem 16 resturi posibile prin împărţirea unui polinom arbitrar la f, deci $\mathbb{Z}_2[X]/(f)$ are 16 elemente.

c) Determinăm $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$ pentru care

$$\left[X^2 + X + \hat{1}\right] \cdot \left[aX^3 + bX^2 + X + \hat{1}\right] = \left[\hat{1}\right].$$

Rezultă uşor că $a = b = c = \hat{1}$ şi $d = \hat{0}$, deci $\left[X^2 + X + \hat{1}\right]^{-1} = \left[X^3 + X^2 + X\right]$.

Exerciţiul 3. *Construiţi un corp finit cu 27 de elemente.*

Indicaţie. Polinomul $f = X^3 + X^2 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este ireductibil, iar $\mathbb{Z}_3[X]/(f)$ este un corp care are $3^3 = 27$ de elemente. Acestea sunt clasele $\left[aX^2 + bX + c\right]$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$.

Exerciţiul 4. *Dacă $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ este funcţia lui Möbius, atunci*

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad n = 1 \\ 0, & \text{dacă} \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

Indicaţie. Dacă $p_1, p_2, \dots p_k$ sunt factorii primi din descompunerea lui $n \geq 2$, atunci:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{1\leq i\leq k} \mu(p_i) + \sum_{1\leq i\leq j\leq k} \mu(p_i p_j) + \ldots + \mu(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k)$$
$$= (1-1)^k = 0.$$

Exerciţiul 5. *Fie* $(G,+)$ *un grup abelian şi funcţiile* $f, g : \mathbb{N}^* \to G$. *Atunci are loc echivalenţa:* $g(n) = \sum\limits_{d\,|\,n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum\limits_{d\,|\,n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot g(d)$.

Exerciţiul 6. *Să se determine polinoamele monice ireductibile de gradele* $2, 3, 4, 5$ *peste* $\mathbb{Z}_2$.

Indicaţie. Pentru $n = 2$, avem

$$N_2 = \frac{1}{2}\sum_{d\,|\,2} \mu(d) \cdot 2^{\frac{2}{d}} = \frac{1}{2}\left(\mu(1)\cdot 2^2 + \mu(2)\cdot 2^1\right) = \frac{1}{2}(4-2) = 1$$

Într-adevăr, dintre polinoamele de gradul 2, singurul ireductibil este $X^2 + X + \hat{1}$.
Pentru $n = 3$, $N_3 = \frac{1}{3}\sum\limits_{d|3} \mu(d)\cdot 2^{\frac{3}{d}} = \frac{1}{3}\left(\mu(1)\cdot 2^3 + \mu(3)\cdot 2^1\right) = \frac{1}{3}(8-2) = 2$.

Într-adevăr, dintre polinoamele de gradul 3, cele ireductibile sunt: $X^3 + X^2 + \hat{1}$ şi $X^3 + X + \hat{1}$.
Pentru $n = 4$, $N_4 = \frac{1}{4}\sum\limits_{d\,|\,4} \mu(d)\cdot 2^{\frac{4}{d}} = \frac{1}{4}\left(\mu(1)\cdot 2^4 + \mu(2)\cdot 2^2 + \mu(4)\cdot 2\right) = 3$.

Într-adevăr, dintre polinoamele de gradul 4, cele ireductibile sunt: $X^4 + X^3 + \hat{1}$ $X^4 + X^2 + \hat{1}$ şi $X^4 + X + \hat{1}$. Pentru $n = 5$, $N_5 = \frac{1}{5}\sum\limits_{d\,|\,5} \mu(d)\cdot 2^{\frac{5}{d}} = 6$.

Într-adevăr, dintre polinoamele de gradul 5, cele ireductibile sunt: $X^5 + X^2 + \hat{1}$, $X^5 + X^3 + \hat{1}$, $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + \hat{1}$, $X^5 + X^3 + X^2 + X + \hat{1}$, $X^5 + X^4 + X^3 + X + \hat{1}$ şi $X^5 + X^4 + X^2 + X + \hat{1}$.

Bibliografie

[1] Albu T., Ion I. D, *Itinerar elementar în algebra superioară* , Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2012

[2] Grimaldi R. P., *Discrete and Combinatorial Mathematics. An Applied Introduction*, Addison-Wesley Publishing, 1994

[3] Rotman J., *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2003

[4] Simmons G. J., *The number of irreducible polynomials*, The American Mathematical Monthly, 1970

[5] Ţena M., *Rădăcinile unităţii*, Biblioteca S. S. M. din România, 2005

Profesor dr., Colegiul Naţional de Informatică "Tudor Vianu", Bucureşti

Argument 15

Câteva rezultate neelementare despre progresii aritmetice

Vasile Pop

Abstract. This article presents several notable results from the progression and partition theory.

1. Introducere

Lucrarea conţine câteva rezultate mai puţin cunoscute şi de un nivel superior despre progresii aritmetice. Din lipsă de spaţiu, am dat lucrării un aspect informativ, fără a ne propune argumentarea sau demonstrarea teoremelor prezentate, urmând ca în numerele următoare ale revistei să revenim în detaliu la unele din rezultatele expuse.

Cunoştinţele necesare problemelor strict legate de progresia aritmetică sunt absolut elementare şi le prezentăm doar pentru unitatea lucrării.

Definiţie. Un şir $(a_n)_n$ de numere (reale, complexe, întregi, raţionale) se numeşte *progresie aritmetică* dacă există un număr r astfel ca $a_{n+1} - a_n = r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Numărul r se numeşte *raţia progresiei* iar termenul a_0 se numeşte primul termen.

Observaţie.

• Expresia termenului general a_n al unei progresii aritmetice este $a_n = a_0 + n \cdot r$, $n \in \mathbb{N}$.

• O *progresie aritmetică finită* este o succesiune de termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice: $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+p}$.

• O progresie aritmetică (finită sau infinită) poate fi prelungită cu termeni noi, de exemplu progresia $(a_n)_{n \geq 0}$ cu $a_n = a_0 + n \cdot r$, $n \in \mathbb{N}$ poate fi prelungită la progresia (infinită în ambele sensuri), $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ cu $b_k = a_0 + k \cdot r$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Partiţii ale numerelor naturale în progresii aritmetice

Teorema 2.1. *Dacă* $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ *este o partiţie a mulţimii numerelor naturale în k progresii aritmetice $P_1, P_2, \ldots, P_k$, având raţiile $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$, atunci are loc relaţia* $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \cdots + \dfrac{1}{r_k} = 1$.

Observaţia 2.2. Reciproca teoremei nu este adevărată. Mai precis, dacă luăm $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$, atunci $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1$, dar nu există nici o partiţie a lui $\mathbb{N}$ în trei progresii aritmetice de raţii 2, 3, respectiv 6.

În legătură cu suma inverselor unor numere naturale, amintim:

Conjectura lui Erdös 2.3. (despre progresii aritmetice) *Dacă A este o submulţime (infinită) de numere naturale şi $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \infty$ (seria este divergentă), atunci mulţimea A conţine progresii aritmetice oricât de lungi.*

Observaţia 2.4. O variantă a conjecturii lui Erdös este: *Dacă şirul de numere naturale $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ nu conţine trei termeni în progresie aritmetică, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$ (seria este convergentă).*

3. Progresii aritmetice monocolore

Unul dintre domeniile de cercetare ale anilor 1920–1930 a fost partiţia sau colorarea numerelor naturale. Un prim rezultat celebru, răspuns afirmativ la conjectura lui Baudet, a fost obţinut de B. L. van der Waerden.

Teorema 3.1. (1927) *Orice colorare a numerelor naturale cu un număr finit de culori conţine progresii aritmetice monocolore (oricât de lungi).*

Teorema 3.2. (1933) *Pentru orice numere naturale $k \geq 2$ şi $n \geq 3$, există un număr minim N astfel încât, oricum am colora numerele naturale de la 1 la N folosind k culori, se pot găsi n numere naturale în progresie aritmetică, de aceeaşi culoare. Numărul minim se notează $N = W(k, n)$ şi se numeşte numărul lui Van der Waerden.*

Observaţia 3.3.
- Determinarea numerelor $W(k, n)$ este şi probabil rămâne o problemă deschisă.
- Dintre numerele cunoscute precizăm: $W(2, 3) = 9$ (Chvatal), $W(3, 3) = 27$ (Chvatal), $W(4, 3) = 76$ (Beeler şi O'Neil), $W(2, 4) = 35$, $W(2, 5) = 178$ (Stevens şi Shantaram), $W(2, 6) = 1132$ (Kouril şi Parel), $W(3, 4) = 293$ (Kouril 2007).

Recent (2008) doi tineri şi celebri matematicieni au obţinut un rezultat remarcabil, atât în teoria Remsey cât şi în teoria numerelor.

Teorema 3.4. (Green-Tao) *Mulţimea numerelor prime conţine progresii aritmetice oricât de lungi.*

4. Progresii aritmetice de forma $[n\alpha]$ şi $\{n\alpha\}$

Teorema 4.1. *Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, atunci şirurile $a_n = [n\alpha]$ şi $b_n = \{n\alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$ conţin progresii aritmetice oricât de lungi.*

Observaţia 4.2. În legătură cu şirul de forma $[n\alpha]$ amintim un rezultat cunoscut:

Teorema 4.2. *Şirurile* $[n\alpha]$ *şi* $[n\beta]$, $n \in \mathbb{N}^*$ *formează o partiţie a mulţimii numerelor naturale dacă şi numai dacă* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash Q$ *şi* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

5. Caracterizarea unei progresii aritmetice finite A prin cardinalul mulţimilor $A + A$ şi $A - A$

Teorema 5.1. *Mulţimea finită* $A \subset \mathbb{R}$ *formează termenii unei progresii aritmetice dacă şi numai dacă* $|A + A| = 2|A| - 1$, *unde* $A + A = \{a + b | a \in A, b \in A\}$.

Teorema 5.2. *Mulţimea finită* $A \subset \mathbb{R}$ *formează termenii unei progresii aritmetice dacă şi numai dacă* $|A - A| = 2|A| - 1$, *unde* $A - A = \{a - b | a \in A, b \in A\}$.

Observaţia 5.3. La Olimpiada Naţională din 2004 s-a dat următoarea problemă: *Mulţimile finite* $A \subset \mathbb{R}$ *şi* $B \subset \mathbb{R}$ *sunt termenii unei progresii aritmetice dacă şi numai dacă* $|A + B| = |A| + |B| - 1$.

6. Progresii aritmetice care conţin pătrate perfecte sau cuburi perfecte

Teorema 6.1. *Dacă o progresie aritmetică* (*infinită*) *de numere naturale conţine un pătrat perfect, atunci ea conţine o progresie aritmetică infinită de pătrate perfecte.*

Teorema 6.2. *Dacă o progresie aritmetică* (*infinită*) *de numere naturale conţine un cub perfect, atunci ea conţine o infinitate de cuburi perfecte.*

În încheiere, recomandăm elevilor să încerce să demonstreze unele din rezultatele prezentate, dar mai important este să le poată aplica în alte probleme.

Bibliografie

[1] Pop, V., *Partiţii ale mulţimii numerelor naturale*, G.M.-B. Nr. 3 (2006), 113–121

[2] Pop V., *Geometrie combinatorică*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2010

[3] Pop V. (colectiv), *Matematici pentru grupele de performanţă*, Exerciţii şi probleme, clasa a X-a, Ed. Dacia Educaţional, 2004

[4] Soifer Al., *The mathematical Coloring Book*, Springer, 2009

[5] Tao T., *Solving Mathematical Problems*, Oxford Univ. Press, 2006

[6] Tao T. and Green B., *The primes contains arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Math. 167 (2008)

[7]Van der Waerden B. L., *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. 15 (1927) 212–216

Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca

Argument 15

Asupra unei probleme de la concursul "Euclid"

Dan Teodor Toma

Abstract. In this article, we generalize a problem from the final stage of the "Euclid" National Contest.

La etapa finală a Concursului Naţional de Matematică "Euclid", clasa a X-a M1, subiectul I, s-a dat următoarea problemă:

Care este probabilitatea ca 3 *numere din mulţimea* $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 3$ *să fie în progresie aritmetică? Acelaşi lucru pentru* 4 *numere şi* $n \geq 4$.

Problema se poate generaliza:

Care este probabilitatea ca q *numere din mulţimea* $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq q \geq 2$, *să fie în progresie aritmetică?*

Cazurile posibile sunt toate submulţimile de q elemente, deci C_n^q. Cazurile favorabile sunt acele grupe de q numere care pot forma o progresie aritmetică. Pentru a le număra, vom determina câte progresii de raţie pozitivă r, cu q elemente, se pot forma din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq q \geq 2$. Acestea sunt:

$$\begin{array}{ccc}
1, & 1+r, & 1+2r, \ldots, 1+(q-1)r \\
2, & 2+r, & 2+2r, \ldots, 2+(q-1)r \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
n-r(q-1) & n-r(q-2), & n-r(q-3), \ldots, n
\end{array}$$

Deci $n - r(q-1)$ este cel mai mare prim termen admis de raţia r, astfel încât al q-lea element să fie mai mic sau egal decât n. Se observă că, pentru raţia r, avem $n - r(q-1)$ progresii.

Raţiile progresiilor studiate pot lua valori de la 1 până la un număr pe care îl vom nota cu $r_{\max}$. Elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ sunt pozitive, deci putem scrie $n - r(q-1) \geq 0$.
$r_{\max}$ este cel mai mare întreg care satisface această relaţie

$$n - r(q-1) \geq 0 \Rightarrow r \leq \frac{n}{q-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_{\max} \leq \frac{n}{q-1} < r_{\max}+1 \\ r_{\max} \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow r_{\max} = \left[\frac{n}{q-1}\right].$$

Argument 15

Pentru a afla numărul total de progresii, este suficient să adunăm numerele $n - r(q-1)$, $r = \overline{1, r_{\max}}$

$$\begin{aligned}
&n - 1(q-1) + n - 2(q-1) + \cdots + n - r_{\max}(q-1)\\
&\quad = r_{\max} n - (q-1)(1 + 2 + \cdots + r_{\max})\\
&\quad = r_{\max} n - (q-1)\frac{r_{\max}(r_{\max}+1)}{2}\\
&\quad = r_{\max}\left(n - (q-1)\frac{r_{\max}+1}{2}\right)\\
&\quad = \left[\frac{n}{q-1}\right]\left(n - (q-1)\frac{\left[\frac{n}{q-1}\right]+1}{2}\right)\\
&\quad = \left[\frac{n}{q-1}\right]\left(n - \frac{(q-1)\left[\frac{n+q-1}{q-1}\right]}{2}\right).
\end{aligned}$$

Probabilitatea cerută este:

$$p = \frac{\left[\frac{n}{q-1}\right]\left(n - \frac{(q-1)\left[\frac{n+q-1}{q-1}\right]}{2}\right)}{C_n^q}.$$

Elev, Colegiul Naţional "Mihai Viteazul", Bucureşti

Tabăra de matematică, Baia Mare, 07 - 11.01.2013

Dana Heuberger şi Meda Bojor

În perioada 07 - 11 ianuarie 2013 s-a desfăşurat la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" a paisprezecea ediţie consecutivă a taberei judeţene de matematică.

Prezentăm subiectele testului final şi lista premianţilor.

Clasa a IX-a

1. Se consideră $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ şi c un număr natural prim.

a) Să se rezolve ecuaţia $a \cdot [x]^2 + (a+c) \cdot [x] + c = 0$.

b) Să se arate că dacă ecuaţia $a \cdot [x]^2 + b \cdot [x] + c = 0$ are soluţii reale, atunci $(|a+c| - |b|) \cdot (|a \cdot c + 1| - |b|) = 0$.

Gheorghe Boroica

2. a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, are loc inegalitatea

$$2^n > n^2 - n + 2.$$

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $2^{x+1} = x^2 + x + 2$.

3. Pe cercul de centru O se consideră punctele distincte A, B, C. Demonstraţi că dacă $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right|$, atunci $AB = AC = BC$.

Test selectat de:
Gabriela Boroica, Gheorghe Boroica

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}} + 2 = \sqrt{x^2 + 2}$.

2. Se consideră $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z - 1| \leq 2$ şi $|z - 2i| \leq 1$. Să se arate că:

a) $|z - 1| + |z - 2i| \geq \sqrt{5}$.

b) $|2z - 1 - 2i| \leq \sqrt{5}$.

Pentru câte valori ale lui z are loc egalitatea?

Dana Heuberger

3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z}{\overline{\alpha}} + \alpha \cdot \overline{z}$, unde $\alpha \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}$, cu $|\alpha| \neq 1$ este fixat, iar $\overline{\alpha}$ şi $\overline{z}$ reprezintă conjugatele numerelor complexe α şi z.

a) Să se rezolve ecuaţia $f(z) = 1$, dacă $\alpha = 2 - i$.

b) Să se arate că funcţia f este bijectivă şi să se calculeze f^{-1}.

Marius Perianu, Argument 10

Clasa a XI-a

1. a) Să se calculeze $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ astfel încât $a_{i,j} = b_{j,n+1-i}$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Să se arate că $\det(A) = (-1)^{C_n^2} \det(B)$.

Cristina Ocean

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq B$, pentru care există $a \in \mathbb{R}^*$, astfel ca $A^3 = B^3 = a \cdot I_n$ şi $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(X) = AX + XB$.

a) Să se calculeze $f(A^2 + B^2 - AB)$.

b) Să se arate că funcţia f este surjectivă.

c) Să se arate că există $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, cu $Z \neq Y$, astfel încât $\det(f(X)) = \det(f(Y))$.

Dana Heuberger

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, cu $x_1 > x_2 > 0$, astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{x_1 \cdot x_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că şirul este o progresie geometică.

b) Dacă $x_1 = 1$ şi $x_2 = \dfrac{1}{2}$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 \left(\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n^2} \right)$.

Ludovic Longaver

Clasa a XII-a

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = I_2 + xA$, iar $G = \{B(x)/x \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se arate că $A^2 = O_2$.

b) Să se arate că $B(x) \cdot B(y) = B(x + y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\det(B^n(1))$, $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se calculeze

$$B\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot B\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot B\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)\dots B\left(\frac{1}{2012\cdot 2013}\right).$$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$, iar F o primitivă a sa.

a) Să se arate că F este concavă pe intervalul $(0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int x\cdot\sqrt[3]{f(x)}dx$.

c) Să se arate că funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $(h\circ h)(x)=e^{-x^2}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, nu are primitive pe intervalul $(0,\infty)$.

3. Fie $G=\{f:\mathbb{R}\to(0,\infty)/f$ derivabilă şi $xf'(x)=f(x)\ln f(x)\}$.

a) Să se arate că funcţia $h:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $h(x)=e^{ax}$, cu $a\in\mathbb{R}$, aparţine mulţimii G.

b) Să se arate că dacă $f\in G$, atunci $\dfrac{1}{f}\in G$.

c) Să se arate că dacă $f,g\in G$, atunci $f\cdot g\in G$.

Test selectat de:
Crina Petruţiu, Nicoale Muşuroia

Premianţii

Clasa a IX-a

Excelenţă. *Cotan Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Butnar Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Chiş Selena Ioana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Zicher Blanka* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Avram Lara Andra* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Neamţ Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Iasmina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Teykar Dan* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Bob Raul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Voiţ Radu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *David Roxana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Onţ Rareş* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Todoran Larisa* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al III-lea. *Ari Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Cormoş Codruţa* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Kalisch Denisa* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Oniga Robert* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bîrle Rareş* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bocuţ Oana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Libotean Florinel* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ungureanu Radu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Claudia* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a X-a

Excelenţă. *Bud Cristian*, (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul I. *Miclea Andrei*, (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al II-lea. *Sântejudean Bogdan*, (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Stretea Roland* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Vele Corina* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al III-lea. *Nicolaescu Andrei* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Fodoruţ Ioan* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Bădăreu Victoria* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Pîrvan Narcis* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Clasa a XI-a

Excelenţă. *Bretan Paula Alice* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul I. *Ofrim Adriana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al II-lea. *Trif Dan* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Vişovan Adrian* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Pop Dan* (L. T. ”Petru Rareş”).

Premiul al III-lea. *Iuga Anca* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Pricop Gabriela* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Rînja Daiana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Pop Roxana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Cosma Diana* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Clasa a XII-a M2

Excelenţă. *Soponar Vlad* (C. Ec. ”Nicolae Titulescu”).

Premiul I. *Nagy Delia* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Mereuţi Florina* (C. N. ”Vasile Lucaciu”).

Premiul al II-lea. *Bîrsan Cristina* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Pop Raluca* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Nicoară Andrei* (C. Ec. ”Nicolae Titulescu”), *Kiş Maria Anişoara Beti* (C. Ec. ”Nicolae Titulescu”), *Iobagi Claudia* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al III-lea. *Voivod Anamaria* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Petruş Florina* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Precup Persida* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Jiga Robert* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Sabău Lorena* (C. Ec. ”Nicolae Titulescu”), *Marton Sergiu* (C. Ec. ”Nicolae Titulescu”), *Crişan Claudiu* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Coza Ionuţ* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Toldaş Iacob* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Maxim Ştefan* (L. T. ”Emil Racoviţă”).

Clasa a XII-a A

Excelenţă. *Petca Alexandra* (C. N. ”Vasile Lucaciu”).

Premiul I. *Paşca Vlad* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Achim Adrian* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Herman Paul* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Dragoş Hanna* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Suciu Vlad* (C. N. ”Vasile Lucaciu”).

Argument 15

Premiul al II-lea. *Boczor Carla* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Profeanu Ileana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Feier Florin* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Tărţan Diana* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Somfalvi Rita* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Agoşton Mădălina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Sergiu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Topan Teodora* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Vatamaniuc Alexandru* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lazăr Adina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Simonca Marian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Trif George* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Dragomir Vlăduţ* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al III-lea. *Naghi Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *balint Andor* (L. T. "Emil Racoviţă"), *Donica Renata* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Buzilă Bianca* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Dragoş Andreea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Marinel* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *David Carla* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ghirasin Cristian* (L. T. "Emil Racoviţă"), *Panici Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Szanto Alex* (L. T. "Emil Racoviţă"), *Pop Alexandrina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Sfara Anamaria* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Muntean Horia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Peterfi Andrei* (L. T. "Emil Racoviţă"), *Zicher Norbert* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pinte Dan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tyran Viorel* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Buican Bettina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ciurdaş Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Tabăra Judeţeană de Excelenţă
09 - 12 septembrie 2013, Baia Mare

Gheorghe Maiorescu

În perioada 09 - 12 septembrie 2013 s-a desfăşurat la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" Tabăra Judeţeană de Excelenţă. La această tabără au fost invitaţi să participe elevii din judeţ care au obţinut rezultate foarte bune la Olimpiada judeţeană de matematică.

Responsabilii taberei au fost profesorii Vasile Ienuţaş (Şc. "George Coşbuc") şi Gheorghe Boroica (C. N. "Gheorghe Şincai").

Prezentăm în continuare subiectele testului final.

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $[x] + 3 \cdot \{x\} = 2013$, $x \in \mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară.

b) $x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 3 \cdot y = 0$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Să se arate că:

a) $a^3 - 2 \cdot a^2 \leq 0$

b) $-8 \leq a^3 + b^3 + c^3 \leq 8$.

3. Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ şi $a = x^2 + 2 \cdot y$, $b = y^2 + 2 \cdot x$.

a) Daţi 3 exemple de perechi (x, y) pentru care a este pătrat perfect.

b) Să se arate că a şi b nu pot fi simultan pătrate perfecte.

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
(*Prof. Gheorghe Boroica* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2[x] + [\log_2 x] = 4$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică relaţia $f(f(x)) = 2x + f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

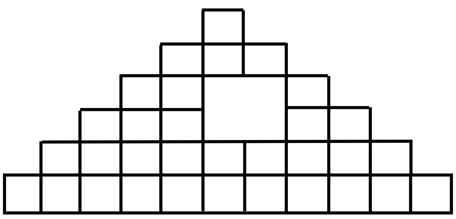
a) Să se demonstreze că funcţia f este injectivă.

b) Să se demonstreze că $f(2x + f(x)) = 3f(x) + 2x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că există atât funcţii strict crescătoare cât şi funcţii strict descrescătoare care verifică relaţia dată.

3. Figura de mai jos este reuniunea pătratelor cu latura de 2 cm şi a interioarelor acestora, iar interiorul pătratului de dimensiune 4×4 nu face parte din figură.

a) O furnică pleacă din punctul A şi vrea să ajungă în B mergând doar pe laturile pătratelor din figură. În câte moduri poate face acest lucru, ştiind că furnica va alege întotdeauna un drum de lungime minimă.



b) Să se arate că oricum am alege 129 de puncte care aparţin figurii date, există cel puţin două având distanţa dintre ele mai mică sau egală cu $\sqrt{2}$ cm.

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
(*Prof. Florin Bojor* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = I_2 + xA$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $B(x) \cdot B(y) = B(x+y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine matricea $C = B\left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right) \cdot B\left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) ... B\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\det(C)$, unde C este matricea de la punctul b).

2. Fie $A \in M_2(C)$ cu $A^{2013} = O_2$.

a) Să se arate că $A^2 = O_2$.

b) Să se arate că $\det(A + I_2) = 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $\det(A + 2013x \cdot I_2) = 1$, $x \in \mathbb{C}$.

3. Se consideră funcţia bijectivă $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x + \ln(1+x)$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $a_0 > 0$ şi $a_{n+1} = f^{-1}(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare.

b) Să se arate că $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
(*Prof. Nicolae Muşuroia* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)

Clasa a XII-a

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie " $*$ " astfel încât pentru orice x, y, z, $t \in \mathbb{R}$ avem:

1) $(x * y) - (z * t) = (x + t) * (y + z)$.

2) $x * x = 0$.

3) $0 * x = x$.

a) Să se calculeze $17 * 23$.

b) Să se verifice dacă legea este asociativă şi are element neutru.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care are primitiva F pe $\mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x^3) = \dfrac{f(x)}{3x^2}$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(x^3)$.

b) Să se arate că f este funcţia nulă.

3. Să se arate că nu există funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ care are primitiva F, astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) \cdot F(2 - x) = F(1 - x)$.

Subiectele au fost selectate şi propuse de:
(*Prof. Dana Heuberger* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)

Inspector, I. S. J. Maramureş

Argument 15

Concursul "Argument" al Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" Ediţia a IV-a

Dana Heuberger

În 9–10 noiembrie 2012 a avut loc la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai" din Baia Mare cea de-a patra ediţie a concursului de matematică "Argument", cu participarea loturilor de elevi ale unor licee de elită: C. N. "Liviu Rebreanu" Bistriţa, C. N. "Andrei Mureşanu" dej, C. N. "Alexandru Papiu-Ilarian" Târgu Mureş, C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare, C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei, C. N. "Vasile Lucaciu" şi C. N. "Gheorghe Şincai" din Baia Mare. Preşedintele concursului a fost şi de data aceasta dl. conf. univ. dr. Vasile Pop de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca.

Clasa a V-a

Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

1. Cel mai mare cub perfect de trei cifre este:

a) 999 b) 961 c) 729 d) 512

2. Dacă $2a + 2b + c = 50$ şi $3a + 3b - 2c = 40$, atunci $a + b$ este:

a) 30 b) 20 c) 10 d) 15

3. Fie $m, n \in \mathbb{N}$. restul împărţirii numărului $a = 5 \cdot n + 10 \cdot m + 21$ la 5 este:

a) 1 b) 0 c) 3 d) 4

4. Dacă suma dintre un număr şi răsturnatul său este 1251, atunci suma cifrelor numărului este:

a) 9 b) 18 c) 16 d) 19

5. Numărul x care verifică egalitatea $\overline{1x} + \overline{2x} + \overline{3x} + \cdots + \overline{9x} = 495$ este egal cu:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9

6. Numărul $3^{22} : 9^5 : 27^3 - 32^5 \cdot 5 : 16^6$ este egal cu:

a) 32 b) 17 c) 33 d) 16

7. Se consideră şirul $10^0 + 1; 10^1 + 2; 10^2 + 3; \ldots; 10^{499} + 500$. Ultimele trei cifre ale sumei termenilor acestui şir sunt:

a) 250 b) 251 c) 255 d) 361

8. Câte numere de trei cifre împărţite la 17 dau restul 8?

a) 19 b) 43 c) 53 d) 69

Argument 15

La următoarele probleme se cer soluţiile complete.

9. Se consideră numerele naturale situate între a şi b, inclusiv a şi b. Notăm cu $r(a;b)$ suma resturilor împărţirii acestor numere la 7.

a) Calculaţi $r(8;14)$.

b) Calculaţi $r(1,50)$.

c) Determinaţi $x \in \mathbb{N}$, ştiind că $r(1,x) = 2010$.

10. Se consideră o secvenţă de numere naturale, cu proprietatea că orice şapte termeni consecutivi au suma pară şi orice opt termeni consecutivi au suma impară.

a) Să se determine o secvenţă formată din 10 numere naturale cu proprietatea de mai sus.

b) Să se determine numărul maxim de termeni ai unei secvenţe cu proprietatea de mai sus.

Clasa a VI-a

Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

1. Numărul $(2^4 \cdot 3^2)^8 : (2^2 \cdot 3)^{15} - 2^{11} : 2^9$ este egal cu:

a) 4 b) 8 c) 11 d) 23

2. Dacă $x, y, z \in \mathbb{N}$ şi $x^z \cdot y^x \cdot z^y = 36000$, atunci $x + y + z$ este:

a) 18 b) 1 c) 5 d) 10

3. Dacă $a \cdot b = 720$, iar $[a, b] = 60$, atunci $a + b$ este:

a) 6 b) 4096 c) 125 d) 72

4. Cel mai mic număr natural, care împărţit la 3, 4, 5, 8 şi 9, dă restul 1 este:

a) 24 b) 81 c) 361 d) 48

5. Dacă $M \in (AB)$, N şi P sunt mijloacele segmentelor (AM), respectiv (MB), iar $NP = 2012$ cm, atunci lungimea segmentului (AB) este:

a) 4024 cm b) 2000 cm c) 1024 cm d) 500 cm

6. Punctele A, B, C, D sunt coliniare, în această ordine. Dacă $2AC = AB + AD$, iar $BC = 2^{63}$ cm, atunci lungimea segmentului (BD) este:

a) 2^{61} cm b) 2^{62} cm c) 2^{63} cm d) 2^{64} cm

7. Numărul natural a, care are trei divizori naturali şi a căror sumă este 57, este:

a) 49 b) 81 c) 121 d) 9

8. Dacă numărul $5^{101} \cdot 2^{100} + a$ este divizibil cu 9, atunci o valoare pentru a este:

a) 4 b) 9 c) 2 d) 0

La următoarele probleme se cer soluţiile complete.

9. a) Să se arate că pătratul unui produs de 3 numere prime distincte are exact 27 divizori naturali.

b) Determinaţi numerele naturale a şi b, prime între ele, pentru care $a \cdot b = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, unde $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $p < q < r$, iar $a \cdot b$ are exact 30 divizori naturali.

c) Să se arate că în orice submulţime cu 7 elemente a mulţimii

$$A = \{2^p \cdot 3^q \cdot 5^r / p, q, r \in \{0, 1, 2\}\}$$

există 2 elemente, asfel încât unul îl divide pe celălalt.

10. Pe o drepată se consideră, în această ordine, punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, cu $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, $A_3A_4 = 3$ cm,...,$A_{n-1}A_n = n - 1$ cm.

a) Dacă $A_1A_n = 990$ cm, determinaţi numărul natural n.

b) Se şterg segmentele $(A_1A_2), (A_4A_5), (A_7A_8), (A_{10}A_{11}), \ldots$, etc. Să se determine suma lungimilor segmentelor rămase, ştiind că $n = 100$.

Clasa a IX-a

1. Pentru fiecare număr $a \in (0, 1)$ definim

$$x_1 = \{2a\},\ x_2 = \{2x_1\},\ x_3 = \{2x_2\}, \ldots, x_9 = \{2x_8\},$$

unde am notat cu $\{x\}$ partea zecimală (fracţionară) a numărului x.

Să se determine valorile lui a pentru care $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 1022a$.

2. Pentru fiecare pereche de numere reale (x, y) notăm cu $M(x, y)$ cel mai mare dintre numerele $2x^2 - 3y$ şi $2y^2 - 3x$ şi cu $m(x, y)$ cel mai mic dintre numerele $2x - 3y^2$ şi $2y - 3x^2$. Să se determine cea mai mică valoare a lui $M(x, y)$ şi cea mai mare valoare a lui $m(x, y)$.

3. Pornind de la polinomul de gradul II cu coeficienţi reali $ax^2 + bx + c$, se construieşte un şir de polinoame aplicând în orice ordine şi de oricâte ori următoarele operaţii:

a) se înlocuieşte x cu $px + q$, cu p, q numere reale arbitrare (nu neapărat aceleaşi);

b) se schimbă între ele a cu c.

Decideţi dacă, pornind de la polinomul $x^2 - 3x + 1$, se poate ajunge la polinomul $2x^2 + x + 1$.

Clasa a X-a

1. Fie x un număr real cu proprietatea că numerele $\sin 5x$, $\sin 6x$ şi $\sin 11x$ sunt numere raţionale. Să se arate că $\sin 16x$ este număr raţional.

2. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii care verifică relaţia

$$f(x + g(y)) = 2x + y + 3, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $g(x + f(y))$.

3. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $\sqrt{2}(x + y + z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2}$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) $(10x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5y_1y_2)^2 \leq (10x_1^2 + 2x_1y_1 + 5y_1^2)(10x_2^2 + 2x_2y_2 + 5y_2^2)$, $\forall\, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

Clasa a XI-a

1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că:

a) Dacă $Tr(A \cdot A^t) = 0$, atunci $A = 0$.

b) Dacă $A \cdot A^t = A^2$, atunci $A^t = A$.

c) Dacă $A \cdot A^t = -A^2$, atunci $A^t = -A$.

($Tr(B)$ este suma elementelor de pe diagonala matricei B).

2. Fie $SL_2(\mathbb{Z}) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) |\det A = 1\}$.

a) Să se arate că ecuaţia $X^2 + X^{-2} = I_2$ nu are soluţii în $SL_2(\mathbb{Z})$.

b) Să se arate că ecuaţia $X^2 + X^{-2} = -I_2$ are soluţii şi să se determine mulţimea

$$\left\{X^n + X^{-n} | X^2 + X^{-2} = -I_2\right\}.$$

3. Se consideră şirul $(S_n)_{n\geq 1}$, unde $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că şirul este nemărginit şi pentru $n \geq 2$, S_n nu este număr întreg.

b) Să se arate că există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca primele patru zecimale ale numărului S_N să fie 2012.

Clasa a XII-a

1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale distincte şi considerăm matricele coloană

$$A_1 = \begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n\end{bmatrix}^t, \ldots, A_n = \begin{bmatrix}1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n\end{bmatrix}^t;$$

$$B_1 = \begin{bmatrix}1 & b_1 & b_1^2 & \ldots & b_1^n\end{bmatrix}^t, \ldots, B_n = \begin{bmatrix}1 & b_n & b_n^2 & \ldots & b_n^n\end{bmatrix}^t.$$

Să se arate că $\det[A_1, A_2, \ldots, A_n, B_i - B_j] = 0$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$, atunci

$$\det[B_1, B_2, \ldots, B_n, A_i - A_j] = 0,\ \forall\, i, j = \overline{1, n}$$

(am notat cu $[A_1, A_2, \ldots, A_n, B_i - B_j]$ matricea pătratică de ordin $n+1$ cu coloanele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi $B_i - B_j$).

2. Să se decidă dacă există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să verifice una din condiţiile:

a) $F(f(x)) = 2x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) $F(f(x)) = 3x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3. a) Fie E o mulţime nevidă, M mulţimea funcţiilor $f : E \to E$ şi $f \in M$. Demonstraţi că dacă f este surjectivă dar neinjectivă, atunci există cel puţin două funcţii $f_1, f_2 : E \to E$ astfel încât $f \circ f_1 = f \circ f_2 = 1_E$.

b) Daţi exemplu de mulţime infinită E şi $f : E \to E$ pentru care există exact două funcţii $f_1, f_2 : E \to E$ astfel încât $f \circ f_1 = f \circ f_2 = 1_E$.

Premianţii concursului "Argument", ediţia a IV-a

Clasa a V-a

Excelenţă. *Pop Călin Grigore* (Şc. "Nicolae Iorga").

Premiul I. *Robu Vlad Nicolae* (Şc. "Nicolae Iorga").

Premiul al II-lea. *Becsi Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Andreicuţ Teofil* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Onea Vlad Florin* (Şc. "Nicolae Iorga").

Premiul al III-lea. *Francioli Daria* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Cordea Răzvan* (Şc. "Nichita Stănescu"), *Filipaş Răzvan* (Şc. nr. 1 Seini), *Rusznak Erika* (Şc. "Octavian Goga").

Menţiune specială. *Ilieş Iulia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ştef Eduard* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ciocan Florin* (Şc. "Lucian Blaga"), *Moldovan Nicolae* (Şc. "George Coşbuc"), *Breban Alexandru* (Şc. "Nichita Stănescu"), *Cozmuţa Rareş* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Boroica Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Menţiune. *Mureşan Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Petrişor Alex* (Liceul de Artă), *Filip Mihai* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Opre Mihnea* (C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare), *Palca Robert* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Forro Schek Zsanett* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Marian Alexandra* (Şc. "Nicolae Iorga"), *Pop Ioana* (Şc. "Octavian Goga), *Barbul Thomas* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a VI-a

Excelenţă. *Mercea Ioana* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Petz Alin* (C. N. "Vasile Lucaciu").

Premiul al II-lea. *Zelina Paul* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Conţiu Alexandru* (Şc. "Nicolae Iorga"), *Cioroga Rareş* (C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare).

Premiul al III-lea. *Sava Bogdan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Buzilă-Gârda Andra* (Şc. "George Coşbuc"), *Mureşan Ioan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Oşan Ştefania* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Menţiune specială. *Petrovan Raul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Varady Iulia Maria* (Şc. "Nicolae Iorga"), *David Cătălin* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Petrean Măcelaru Alex* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Muthi Sonia* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Menţiune. *Câmpan Tudor* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Soporan Tudor* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Pop Alexandra* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bordeanu Lucia* (Şc. "Lucian Blaga"), *Şuteu Ionuţ* (Şc. "Octavian Goga"), *Oneţ George* (C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare), *Băban Diana* (Şc. "George Coşbuc), *Diaconecu Mălina* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Maşlinca Mihai* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ardelean Ariana* (Şc. "George Coşbuc"), *Mardar Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Clasa a VII-a

Excelenţă. *Lucaciu Sergiu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Neţa Răzvan* (Şc. "Nicolae Iorga), *Bojor Barbu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Salamon Timea* (Şc. "Nicolae Iorga").

Premiul al III-lea. *Hagău Iulian* (Şc. "Nicolae Iorga"), *Darolţi Larisa* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Horţ Iulia* (Şc. "Lucian Blaga"), *Petca Diana Andreea* (Şc. "Nicolae Iorga").

Menţiune specială. *Lendeschi Karina* (Şc. "Nicolae Iorga"), *Mare Alexandru* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tămâian Andrei* (Şc. "George Coşbuc"), *Mărieş Maria* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Palca Mihaela* (Şc. "Octavian Goga).

Menţiune. *Moş Alexandru* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Steiner Karina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Barz Tania* (Şc. "George Coşbuc"), *Ardelean Andreea* (Şc. "Nichita Stănescu"), *Danil Lidia* (Şc. "George Coşbuc"), *Damşa Dinu* (Şc. "Nichita Stănescu"), *Irimuş Ileana Maria* (Şc. "Nicolae Iorga"), *Sofran Iulia Florica* (Şc. "Nicolae Iorga").

Clasa a IX-a

Excelenţă. *Onul Fara Ingrid* (C. N. "Petru Rareş" Beclean).

Premiul al II-lea. *Pop Darius* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei).

Premiul al III-lea. *Cotan Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Butnar Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Menţiune specială. *Sabău Vlad* (C. N. "Al. Papiu Ilarian" Tg. Mureş), *Ţînţar Oana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Olaru Dragoş* (C. N. "Al. Papiu Ilarian" Tg. Mureş).

Menţiune. *Avram Lara* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Puţ Bogdan* (C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei), *Florea Cătălin* (C. N. "Al. Papiu Ilarian"), *Zicher Blanka* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Todoran Ana Corina* (C. N. "Liviu Rebreanu" Bistriţa), *Baican Vlad* (C. N. "Andrei Mureşanu" Dej).

Argument 15

Clasa a X-a

Excelenţă. *Miclea Andrei* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Moldovan Bogdan* (C. N. ”Onisifor Ghibu” Cluj-Napoca).

Premiul al III-lea. *Bud Cristian* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Poienaru Bianca* (C. N. ”Petru Rareş” Beclean).

Menţiune specială. *Bura Lucia* (C. N. ”Mihai Eminescu” Satu Mare), *Stretea Roland* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Horvath Bojan Paul* (C. N. ”Emil Racoviţă Cluj-Napoca”).

Menţiune. *Topan Mihai* (C. N. ”Emil Racoviţă” Cluj-Napoca), *Petruş Andrei* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Avram Diana* (C. N. ”Al. Papiu Ilarian” Tg. Mureş), *Fodoruţ Ioan* (C. N. ”Vasile Lucaciu”), *Raţiu Kinga* (C. N. ”Mihai Eminescu” Satu Mare), *Rusu Cosmin* (C. N. ”Petru Rareş” Beclean).

Clasa a XI-a

Excelenţă. *Buboi Andrei* (C. N. ”Silvania” Zalău).

Premiul al II-lea. *Tătar Mara* (C. N. ”Al. Papiu Ilarian” Tg. Mureş).

Premiul al III-lea. *Berce Vasile* (C. N. ”Mihai Eminescu” Satu Mare), *Bretan Alice* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Menţiune specială. *Covaci Rareş* (C. N. ”Al. Papiu Ilarian”), *Fărcaş Vlad* (C. N. ”Emil Racoviţă” Cluj-Napoca).

Menţiune. *Ţiplea Tudor* (C. N. ”Dragoş Vodă” Sighetu Marmaţiei).

Clasa a XII-a

Excelenţă. *Cerrahoğlu Ömer* (C. N. ”Gheorghe Şincai”).

Premiul al II-lea. *Miron Flaviu* (C. N. ”Emil Racoviţă” Cluj-Napoca).

Premiul al III-lea. *Mureşan Horea* (C. N. ”Silvania” Zalău).

Menţiune specială. *Paşca Vlad* (C. N. ”Gheorghe Şincai”), *Csereoka Petca* (C. N. ”Mihai Eminescu” Satu Mare).

Argument 15

Concursul "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni
23 aprilie 2013

1. Considerăm numerele:
$a = [(12 - 6 : 3) \times 6 - 53] \times 8$
$b = [11 + 12 \times (13 + 126 : 9)] : 5 - 5$
iar c verifică relaţia $34 - [(100 + 3 \times c) \times 4 + 5] : 13 = 1$.
1) Aflaţi numerele a, b, c.
2) Demonstraţi că $5 \times a - 4 \times b = 8 \times (c + 2)$.

2. În clasa a V-a a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" sunt 28 de elevi, fetele fiind cu patru mai puţine decât băieţii. Elevii se împart în două echipe, care culeg mere dintr-o livadă.
1) Câţi băieţi sunt în clasă? Explicaţi.
2) Fetele din prima echipă culeg tot atâtea mere cât băieţii din echipa a doua. Fetele din echipa a doua culeg dublul merelor strânse de băieţii din prima echipă şi de patru ori mai mult decât băieţii din echipa proprie.
Care dintre echipe a cules cele mai multe mere?

3. Se dă şirul de numere: 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, ...
1) Scrieţi următorii 7 termeni ai şirului.
2) Cu cât este egală suma primilor 30 de termeni?
3) Scrieţi toate secvenţele de cel puţin doi termeni consecutivi (adică unul după altul) ai şirului care au suma egală cu 11.

Testul a fost elaborat de: Prof. Dana Heuberger

Notă. *Acest concurs se adresează elevilor de clasa a IV-a.*

Argument 15

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Să se demonstreze că:*

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sin^2 x\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\sin^2 x\right)}\geq 2\sqrt{2},\quad \forall x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Fie $s=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sin^2 x\right)}+\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\sin^2 x\right)}$. Conform inegalităţii lui Bergström avem

$$\begin{aligned} s &\geq \frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sin^2 x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\sin^2 x\right)}=\frac{4}{2\sin\frac{\pi}{4}\cos(\sin^2 x)}\\ &=\frac{2\sqrt{2}}{\cos(\sin^2 x)}\geq 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

căci numărul $\cos(\sin^2 x)\in(0,1]$, $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. *Suma a douăzeci de numere naturale nenule este egală cu* 3689*. Să se afle valoarea maximă a celui mai mare divizor comun al acestor numere.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor naturale nenule $a_1,a_2,\ldots,a_{20}$. Din ipoteză avem că

$$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=d\left(\frac{a_1}{d}+\frac{a_2}{d}+\cdots+\frac{a_{20}}{d}\right)=7\cdot 17\cdot 31. \tag{1}$$

Cum $\dfrac{a_i}{d}\in\mathbb{N}^*$, $i\in\overline{1,20}$, rezultă că $s\overset{not}{=}\sum\limits_{i=1}^{20}\dfrac{a_i}{d}\geq 20$, şi din (1) deducem că valoarea maximă pentru d este $7\cdot 17=119$ deoarece egalitatea $\sum\limits_{i=1}^{20}\dfrac{a_i}{d}=31$ este atinsă, de exemplu $a_1=a_2=\cdots=a_{19}$ şi $a_{20}=12\cdot 119=1428$.

3. *Să se arate că ecuaţia* $x^2+y^3+z^4+t^5=u^6$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Se observă că $[2,3,4,5,6]=60$ şi, în plus, dacă (x,y,z,t,u) este soluţie ca şi în enunţ, atunci şi multipletul $(x\cdot a^{30},y\cdot a^{20},z\cdot a^{15},t\cdot a^{12},u\cdot a^{10})$, $a\in\mathbb{N}^*$, este soluţie. Cum $2^2+3^3+1^4+2^5=2^6$, deducem că $x=2\cdot a^{30}$, $y=3\cdot a^{20}$, $z=a^{15}$,

$t = 2 \cdot a^{12}$, $u = 2 \cdot a^{10}$, $a \in \mathbb{N}^*$, reprezintă o familie infinită de soluţii pentru ecuaţia din enunţ.

Analog, $(8 \cdot a^{30}, 2 \cdot a^{20}, 5 \cdot a^{15}, 2 \cdot a^{12}, 3 \cdot a^{10})$, $a \in \mathbb{N}^*$, reprezintă o altă familie infinită de soluţii pentru ecuaţia dată.

4. *Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, care verifică simultan condiţiile:*
a) $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$;
b) $f(a) = 0$, pentru orice număr natural a care are ultima cifră 4.

Meda şi Florin Bojor

Soluţie. Vom nota cu $u(a)$ ultima cifră a numărului a. Dacă $u(a) = 4$ şi el se scrie sub forma $a = b \cdot c$, cu $b, c \in \mathbb{N}$, atunci $f(a) = 0$ şi $f(b \cdot c) = f(b) + f(c)$, de unde $f(b) = f(c) = 0$. Cum $f(b)$, $f(c) \in \mathbb{N}$, deducem că $f(b) = f(c) = 0$.

Dacă $u(a) \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$, atunci există $k \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$ astfel încât $u(ka) = 4$, deci $f(a) = 0$ conform celor spuse mai sus.

Dacă $u(a) = 0$ sau $u(a) = 5$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ şi $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = 5^k \cdot p$, unde $u(p) \neq 0$ şi $u(p) \neq 5$. Avem:

$$f(5^2) = f(5) + f(5) = 2f(5);\ f(5^3) = f(5^2 \cdot 5) = f(5^2) + f(5) = 3f(5)$$

şi prin inducţie matematică, $f(5^n) = n \cdot f(5)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $A = \{5^k \cdot p \mid k \in \mathbb{N}^* \text{ şi } p \in \mathbb{N},\ p \not\vdots\, 5\}$. Notând $f(5) = b$, obţinem $f(5^k \cdot p) = k \cdot b$ dacă $k \in \mathbb{N}^*$ şi $p \not\vdots\, 5$

$$f(n) = \begin{cases} k \cdot b, & n \in A \\ 0, & n \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

Toate funcţiile anterioare verifică relaţiile din ipoteza problemei.

5. *Să se arate că ecuaţia $[x \cdot y] = [x] \cdot [y]$ are o infinitate de soluţii (x, y), cu $x, y \in (1, \infty) \setminus \mathbb{Z}$.*
Există soluţii (x, y) ale acesteia cu $x, y \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}$?

Dana Heuberger

Soluţie. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, alegem $x, y \left(k, k + \dfrac{1}{4k}\right)$. Atunci

$$[x] = [y] = k \text{ şi } x \cdot y \in \left(k^2, k^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16k^2}\right) \subset (K^2, (K+1)^2), \text{ deci } [x \cdot y] = k^2.$$

Dacă $[x] = -k$ şi $[y] = -t$, cu $k, t \in \mathbb{N}^*$, trebuie să avem $[x \cdot y] = k \cdot t$. Cum $x \in (-k, -k+1)$, $y \in (-t, -t+1)$, obţinem $x \cdot y < k \cdot t$, deci $[x \cdot y] < k \cdot t$. Atunci nu există soluţii (x, y) ale ecuaţiei, cu $x, y \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Z}$.

6. *Se consideră ecuaţia $\{x\} + \{2x\} = \{3x\}$.*
a) Să se rezolve ecuaţia.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de soluţii $x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ ale ecuaţiei, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n + \dfrac{1}{3}$ nu e soluţie a ecuaţiei.

c) Să se demonstreze că există şirul de soluţii $(x_n)_{n\geq 1}$ ale ecuaţiei, astfel încât $\left(x_n + \dfrac{1}{3}\right)_{n\geq 1}$ e tot un şir de soluţii ale ecuaţiei.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Ecuaţia este echivalentă cu $[x] + [2x] = [3x]$.

Fie $k \in \mathbb{Z}$. Dacă $x \in \left[k, k + \dfrac{1}{3}\right)$, atunci $[x] + [2x] = 3k = [3x]$, deci toate elementele mulţimii $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[k, k + \dfrac{1}{3}\right)$ sunt soluţii.

Dacă $x \in \left[k + \dfrac{1}{3}, k + \dfrac{2}{3}\right)$, atunci $[x] + [2x] \in \{3k, 3k+1\}$ şi $[3x] = 3k+1$, deci în acest caz ecuaţia are soluţii dacă şi numai dacă $x \in \left[k + \dfrac{1}{2}, k + \dfrac{2}{3}\right)$, adică toate elementele mulţimii $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[k + \dfrac{1}{2}, k + \dfrac{2}{3}\right)$ sunt soluţii.

Dacă $x \in \left[k + \dfrac{2}{3}, k + 1\right)$, atunci $[x] + [2x] = 3k + 1$ şi $[3x] = 3k + 2$, aşadar nu avem soluţii în acest caz.

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k, k + \frac{1}{3}\right) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k + \frac{1}{2}, k + \frac{2}{3}\right).$$

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = n + \frac{1}{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ este soluţie, iar $x_n + \frac{1}{3} = n + \frac{5}{6}$ nu este soluţie a ecuaţiei.

c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ alegem $x_n \in \left[n + \dfrac{1}{6}, n + \dfrac{1}{3}\right)$.

Deoarece $x_n + \dfrac{1}{3} \in \left[n + \dfrac{1}{2}, n + \dfrac{2}{3}\right)$, şirul îndeplineşte cerinţa.

7. *Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$, astfel încât $BM = CN = AP$. Fie X, X', Y, Y', Z, Z' respectiv mijloacele segmentelor $[AN], [CP], [BP], [AM], [CM], [BN]$.*

a) Să se arate că XX' este paralelă cu bisectoarea unghiului A.

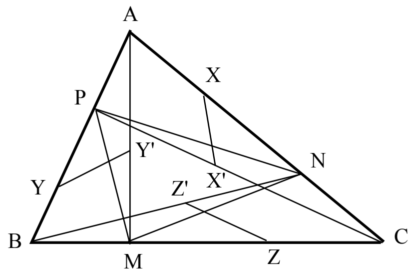
b) Să se arate că se poate construi un triunghi cu laturile de lungimi XX', YY', ZZ'.

c) Să se arate că $XX' = YY' = ZZ'$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Notăm $BM = CN = AP = x$. Fie $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$, respectiv picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC. Avem

$$\overrightarrow{XX'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{NC}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{b}\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{x}{2bc}\left(b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{x(b+c)}{2bc} \cdot \overrightarrow{AD}.$$



b) Analog rezultă $\overrightarrow{YY'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM}\right)$ şi $\overrightarrow{ZZ'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CN}\right)$,

$$\overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{YY'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CN}\right) = \overrightarrow{0}.$$

c) <u>Metoda I</u>. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi fie punctele U, V, W astfel încât $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{XX'}$, $\overrightarrow{IV} = \overrightarrow{YY'}$ şi $\overrightarrow{IW} = \overrightarrow{ZZ'}$. Deoarece $\overrightarrow{IU} + \overrightarrow{IV} + \overrightarrow{IW} = \overrightarrow{0}$ şi $IU = IV = IW$, rezultă că triunghiul UVW este echilateral, deci $m\left(\widehat{UIV}\right) = m\left(\widehat{VIW}\right) = m\left(\widehat{WIU}\right) = 120°$.
Obţinem $m\left(\widehat{UIV}\right) = m\left(\widehat{AIB}\right) = 120°$, $m\left(\widehat{VIW}\right) = m\left(\widehat{BIC}\right) = 120°$ şi $m\left(\widehat{WIU}\right) = m\left(\widehat{AIC}\right) = 120°$, deci triunghiul ABC este echilateral.

<u>Metoda a II-a</u>. Deoarece $AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, obţinem $XX' = x\cos\frac{A}{2}$ şi apoi $YY' = x\cos\frac{B}{2}$ şi $ZZ' = x\cos\frac{C}{2}$.

Observaţie. Dacă punctele X, X', Y, Y', Z, Z' împart segmentele $[AN]$, $[CP]$, $[BP]$, $[AM]$, $[CM]$, $[BM]$ în raportul $k > 0$, se demonstrează uşor că $\overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{YY'} + \overrightarrow{ZZ'} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă avem $k = 1$ sau triunghiul ABC este echilateral.

8. *Să se arate că dacă $a, b, c \in [0, \infty)$ şi $ab + bc + ca = 1$, atunci:*

$$\frac{(b+c)^2}{1+a^2} + \frac{(c+a)^2}{1+b^2} + \frac{(a+b)^2}{1+c^2} \geq 3.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Avem că $1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (a+c)\cdot(a+b)$ şi analoagele.
Atunci, din inegalitatea mediilor, rezultă

$$\frac{(b+c)^2}{1+a^2} + \frac{(c+a)^2}{1+b^2} + \frac{(a+b)^2}{1+c^2}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{(b+c)^2}{(a+b)(a+c)} \cdot \frac{(c+a)^2}{(b+c)(b+a)} \cdot \frac{(a+b)^2}{(c+a)(c+b)}} = 3.$$

9. *Se consideră hexagonul $ABCDEF$. Notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale patrulaterelor $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$, respectiv $ACDF$.*
Să se arate că $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram (eventual degenerat).

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Fie O un punct în plan. Avem:

$$OG_1 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right), \qquad \overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right),$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right), \qquad \overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}\right).$$

Cum $\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_4}$, rezultă că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram, eventual paralelogram degenerat.

10. *Să se demonstreze că:*

$$\frac{x+2y}{2x+2y+z} + \frac{x+y+z}{x+2y+3z} + \frac{3x+y}{2x+3y+3z} < 2, \quad \forall\, x, y, z > 0.$$

Florin Bojor

Soluţie. Se arată uşor că dacă $0 < a < b$ şi $c > 0$, atunci $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$.
Ca urmare, avem:

$$\frac{x+2y}{2x+2y+z} < \frac{2x+3y+2z}{3x+3y+3z};$$

$$\frac{x+y+z}{x+2y+3z} < \frac{3x+2y+z}{3x+3y+3z};$$

$$\frac{3z+y}{2x+3y+3z} < \frac{x+y+3z}{3x+3y+3z}.$$

Prin adunarea celor trei inegalităţi se obţine concluzia.

11. *Demonstraţi că:*

$$\frac{100}{\sqrt{101^{101}}}+\frac{101}{\sqrt{102^{102}}}+\frac{102}{\sqrt{103^{103}}}+\cdots+\frac{200}{\sqrt{201^{201}}}>\frac{1}{100!}-\frac{1}{200!}.$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Cheia este inegalitatea $(n!)^2 \geq n^n$, care se obţine prin inducţie sau prin înmulţirea inegalităţilor

$$\begin{aligned} 1\cdot &\geq n\\ 2(n-1) &\geq n\\ &\dots\\ (n-1)2 &\geq n\\ n\cdot 1 &\geq n \end{aligned}$$

Atunci $n! \geq \sqrt{n^n}$ şi obţinem concluzia astfel:

$$\begin{aligned} \sum_{n=100}^{200}\frac{n}{\sqrt{(n+1)^{n+1}}} &\geq \sum_{n=100}^{200}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=100}^{200}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\\ &=\frac{1}{100!}-\frac{1}{201!}>\frac{1}{100!}-\frac{1}{200!}. \end{aligned}$$

Observaţie. $\sum\limits_{n=100}^{200}\dfrac{n}{\sqrt{(n+1)^{n+1}}}-\left(\dfrac{1}{100!}-\dfrac{1}{200!}\right)\simeq 6.4418\times 10^{-100}.$

12. *Să se arate că în orice triunghi ABC ascuţitunghic avem:*

$$\begin{aligned} &\frac{\sin A\cdot\cos B\cdot\cos C}{\cos^2 A}+\frac{\sin B\cdot\cos A\cdot\cos C}{\cos^2 B}+\frac{\sin C\cdot\cos A\cdot\cos B}{\cos^2 C}\\ &\geq \frac{1}{2}\,\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C. \end{aligned}$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Dacă S este suma din membrul stâng, atunci avem:

$$S = \sum \frac{\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C}{\cos^2 A} = \sum \frac{\operatorname{tg} A \cdot \cos B \cdot \cos C}{\cos A}$$
$$= \sum \frac{\operatorname{tg} A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sin A}{\sin(B+c) \cdot \cos A}$$
$$= \sum \frac{\operatorname{tg}^2 A \cdot \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B} = \sum \frac{\operatorname{tg}^2 A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \overset{\text{Bergstrom}}{\geq}$$
$$\geq \frac{(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^2}{2(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Să mai observăm că avem egalitate, rezultă că $\triangle ABC$ este echilateral.

13. *Fie progresia geometică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Se consideră numerele $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$, $\forall\, k \in \overline{1,n}$. Să se determine maximul şi minimul sumei $\sum\limits_{k=1}^{n} |2 \cdot x_k - 3 \cdot 2^k|$, precum şi numărul de n-upluri $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pentru care se obţine acest maxim, respectiv minim.*

Ludovic Longaver

Soluţie. Relaţia $x_k \in [a_k, a_{k+1}] \Leftrightarrow 2^k \leq x_k \leq 2^{k+1} \Leftrightarrow |2 \cdot x_k - 3 \cdot 2^k| \leq 2^k$, cu egalitate pentru $x_k = 2^k$ sau $x_k = 2^{k+1}$ (două posibilităţi).
Atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} |2 \cdot x_k - 3 \cdot 2^k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$. Maximul sumei este deci $2^{n+1} - 2$ şi se realizează pentru $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ ori}} = 2^n$ n-upluri. Minimul sumei din enunţ este 0 şi se realizează pentru $x_k = 3 \cdot 2^{k-1} \in [a_k, a_{k+1}]$, $\forall\, k \in 1, n$, adică minimul se atinge pentru un singur n-uplu.

14. *Să se arate că dacă $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,4}$ cu*

$$a_1^2 + a_3^2 > a_2^2 + a_4^2 \quad \textit{şi} \quad (a_1 - b_1)^2 + (a_3 - b_3)^2 < (a_2 - b_2)^2 + (a_4 - b_4)^2,$$

atunci

$$(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)(b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2) \leq (a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4)^2.$$

Generalizare.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (a_1 \cdot x - b_1)^2 - (a_2 \cdot x - b_2)^2 + (a_3 \cdot x - b_3)^2 - (a_4 x - b_4)^2.$$

Atunci

$$f(x) = (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)x^2 - 2 \cdot x(a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4)$$
$$+ b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2.$$

Deoarece f este o funcţie de gradul al doilea şi $f(1) \leq 0$, deducem că $\Delta \geq 0$, adică are loc relaţia cerută.

Generalizare.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 2n}$, cu

$$a_1^2 + a_3^2 + \cdots + a_{2n-1}^2 > a_2^2 + a_n^2 + \cdots + a_{2n}^2$$

şi

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_3 - b_3)^2 + \cdots + (a_{2n-1} - b_{2n-1})^2$$
$$< (a_2 - b_2)^2 + (a_n - b_n)^2 + \cdots + (a_{2n} - b_{2n})^2.$$

Atunci

$$(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2)(b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \cdots + b_{2n-1}^2 - b_{2n}^2)$$
$$\leq (a_1b_1 - a_2b_2 + \cdots + a_{2n-1}b_{2n-1} - a_{2n}b_{2n})^2.$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = (a_1x - b_1)^2 - (a_2x - b_2)^2 + (a_3x - b_3)^2 - \cdots + (a_{2n-1}x - b_{2n-1})^2 - (a_{2n}x - b_{2n})^2$.

Atunci $f(x) = (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \cdots + a_{2n-1}^2 a_{2n}^2)x^2 - 2x(a_1b_1 - a_2b_2 + \cdots + a_{2n-1}b_{2n-1} - a_{2n}b_{2n})x + (b_1^2 - b_2^2 + \cdots + b_{2n-1}^2 - b_{2n}^2)$.

Din $f(1) < 0$ şi $a = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 > 0$ rezultă $\Delta > 0$.

15. *Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, atunci:*

$$\frac{2}{n-1}\left(1 - \cos\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{n-2}\left(1 - \cos\frac{1}{3}\right) + \cdots + \frac{n-1}{2}\left(1 - \cos\frac{1}{n-1}\right)$$
$$< \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right).$$

Horia Zlampareţ

Soluţie. Demonstrăm că dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, atunci:

$$\frac{2}{n-1}\left(1 - \cos\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{n-2}\left(1 - \cos\frac{1}{3}\right) + \cdots + \frac{n-1}{2}\left(1 - \cos\frac{1}{n-1}\right)$$
$$< \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right).$$

Soluţie. Vom folosi inegalitatea

$$\frac{1 - \cos x}{x} < \frac{x}{2}, \quad \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

având următoarea demonstraţie:

Considerăm pe cercul trigonometric punctele $M(\cos x, \sin x)$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{0}\right)$ şi $A(1,0)$. Lungimea segmentului AM este mai mică decât lungimea arcului de cerc AM. Deci, putem scrie $\sqrt{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x} < x$. Prin ridicare la pătrat şi împărţire cu x obţinem $\frac{1-\cos x}{x} < \frac{x}{2}$.

Cum $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-1} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi folosind (1) rezultă că $1 - \cos\frac{1}{k} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2$, $\forall\, k = \overline{1, n-1}$. Atunci:

$$\frac{2}{n-1}\left(1-\cos\frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{n-1}{2}\left(1-\cos\frac{1}{n-1}\right)$$
$$< \frac{2}{n-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{2} + \cdots + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}\right]$$
$$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right),$$

penultima inegalitate fiind obţinută aplicând C.B.S.

Clasa a X-a

1. *Să se arate că dacă* $a_k \in \mathbb{R}_+^*$, $z_k \in \mathbb{C}$, $k \in \overline{1,n}$, $n \geq 2$ *şi* $m \in \mathbb{R}_+$, *atunci:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^{m+1}}{a_k^m} \geq \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right|^{m+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^m}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Conform inegalităţii lui J. Radon, avem:

$$s = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^{n+1}}{a_k^n} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|\right)^{n+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^n} \tag{1}$$

Deoarece $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$, folosind (1), deducem că $s \ge \dfrac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right|^{n+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{n}}$, ceea ce trebuia demonstrat.

2. *Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z| = r$. Să se afle minimul expresiei*

$$E(z) = \sqrt{r - Re(z)} + \sqrt{r + Re(z)}.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie $z = x + i \cdot y$ cu $x, y \in \mathbb{R}$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Atunci

$$E^2(z) = \left(\sqrt{r - Re(z)} + \sqrt{r + Re(z)}\right)^2 = 2r + 2\sqrt{r^2 - x^2} \ge 2r,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $r^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Ca urmare, deoarece $E(z) > 0$, deducem că $E(z) \ge \sqrt{2r}$, cu egalitate pentru $z = x \in \mathbb{R}^*$, deci minimul lui $E(z)$ este $\sqrt{2r}$ şi se realizează pentru $z \in \mathbb{R}^*$.

3. *Fie n un număr natural, $n \ge 2$ şi numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$. Să se arate că*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \le \left[\frac{n}{2}\right].$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Dacă $a \in [0, 1]$, atunci $a^2 \le a$. Aşadar,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\overset{not}{=} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1) \\ &\le x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1) \\ &= x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + \cdots + x_{n-1}(1 - x_n) \\ &\quad + x_n(1 - x_1) \overset{not}{=} E(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Deoarece x_k şi $1 - x_k \in [0, 1]$, pentru orice $k \in \overline{1, n}$, avem:

$$\begin{aligned} E \overset{not}{=} E(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\le x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad \text{şi} \\ E(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\le (1 - x_2) + (1 - x_3) + \cdots + (1 - x_n) + (1 - x_1). \end{aligned}$$

Aşadar, prin însumare, găsim că $E \le \dfrac{n}{2}$, deci

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le \frac{n}{2}. \tag{1}$$

Deoarece $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie convexă în raport cu fiecare variabilă, aceasta îşi va atinge maximul în unul din cele 2^n vârfuri ale domeniului de definiţie, adică pentru $x_i = 0$ sau $x_i = 1$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci $F_{\max}$ este un număr întreg şi utilizând (1) deducem că $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le \left[\frac{n}{2}\right]$.

Cum $F(0,1,0,1,\ldots) = \left[\frac{n}{2}\right]$, deducem că maximul funcţiei F este chiar $\left[\frac{n}{2}\right]$.

4. *Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ care verifică relaţia*

$$f^2(x) \cdot \cos^2 x + \sin^4 x \cdot f(x) = \cos^2 x(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Gheorghe Boroica

Soluţie. Observăm că $f(x) = cos^2 x$ este soluţie căci $f \ge 0$ şi $\cos^4 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x \cdot \cos^2 x = \cos^2 x(\cos^4 x + \sin^4 x) = \cos^2 x(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Arătăm că $f(x) = \cos^2 x$ este unica soluţie. Fie g o funcţie care verifică relaţia din ipoteză. Atunci $g^2(x) \cdot \cos^2 x + \sin^4 x g(x) = \cos^2 x(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, Scăzând aceasta din relaţia din ipoteză, obţinem:

$$(f(x) - g(x))\left[\cos^2 x(f(x) + g(x)) + \sin^4 x\right] = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dacă există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) - g(x_0) \ne 0$, atunci:

$$\cos^2 x_0(f(x_0) + g(x_0)) + \sin^4 x_0 = 0 \overset{ip}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^4 x_0 = 0 \\ \cos^2(x_0)(f(x_0) + g(x_0)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x_0 = 0 \\ f(x_0) + g(x_0) = 0 \end{cases} \overset{f,g \ge 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x_0 = 0 \\ f(x_0) = g(x_0) = 0 \end{cases},$$

contradicţie cu $f(x_0) - g(x_0) \ne 0$. Aşadar, $f = g$ şi deci $f(x) = \cos^2 x$.

5. *Se consideră ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $|a|, |b|, |c|, |d| \le 1$. Dacă x_k, $k \in \overline{1,4}$ sunt rădăcinile ecuaţiei, atunci demonstraţi că $|x_k| < 2$.*

Gheorghe Boroica

Soluţie. Dacă $|x_k| \le 1$, atunci este evident că $|x_k| < 2$.

Dacă $|x_k| > 1$, atunci demonstrăm că $|x_k| < 2$. Din faptul că x_k este rădăcină, rezultă că $x_k^4 + a \cdot x_k^3 + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k + d = 0$, deci

$$\begin{aligned} |x_k^4| &= \left|-(a \cdot x_k^3 + b \cdot x_k^2 + c \cdot x_k + d)\right| \\ &\le |a| \cdot |x_k|^3 + |b| \cdot |x_k|^2 + |c| \cdot |x_k| + |d| \\ &\le |x_k|^3 + |x_k|^2 + |x_k| + 1 = \frac{|x_k|^4 - 1}{|x_k| - 1}. \end{aligned}$$

Cu notaţia $t = |x_k| > 1$, inegalitatea anterioară devine:

$$t^4 \le \frac{t^4 - 1}{t - 1} \overset{t>1}{\Leftrightarrow} t^5 - 2t^4 + 1 \le 0 \Leftrightarrow t^4(t - 2) + 1 \le 0. \tag{1}$$

Dacă am avea $t \geq 2$, atunci membrul stâng din (1) este strict pozitiv, fals.
Ca urmare, $t = |x_k| < 2$.

6. *Rezolvaţi ecuaţia* $2^{[x]} - 2^{[-x]} = \dfrac{3}{4}\log_2(3[x]+1)$ *pentru* $x \geq 0$.

Gheorghe Gherasin, Sighetu Marmaţiei

Soluţie. Se observă că $x = 0$ este soluţie. Pentru $x > 0$ avem:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{N}^* \\ -1, & x \in (0,\infty)\backslash\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Dacă $x \in \mathbb{N}^*$, atunci avem:

$$2^x - \frac{1}{2^x} = \frac{3}{4}\log_2(3x+1) \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) = \log_2(3x-1).$$

Fie $\log_2(3x+1) = p$, deci $3x+1 = 2^p$. Cum $3x+1 \in \mathbb{N}$, $3x+1 \geq 4$, deducem că $p \in \mathbb{N}^*$, deci şi $\dfrac{4}{3}\left(2^x - \dfrac{1}{2^x}\right) \in \mathbb{N}^*$. Atunci x poate fi 1 sau 2. Pentru $x = 1$ rezultă $\dfrac{4}{3}\left(2 - \dfrac{1}{2}\right) = \log_2 4$, adevărat, iar pentru $x = 2$ rezultă că $\dfrac{4}{3}\left(4 - \dfrac{1}{4}\right) = \log_2 7$, fals.

Dacă $x \in (0,\infty)\backslash\mathbb{N}^*$, atunci notăm $k = [x] \in \mathbb{N}$. Ecuaţia devine:

$$2^k - \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{3}{4}\log_2(3k+1) \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(2^k - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \log_2(3k+1).$$

Ca şi mai sus, deducem că $\dfrac{4}{3}\left(2^k - \dfrac{1}{2^{k+1}}\right) \in \mathbb{N}^*$, ceea ce implică $k \in \emptyset$.
Aşadar, soluţiile ecuaţiei sunt $x = 0$ şi $x = 1$.

7. *Să se determine numerele* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *pentru care*

$$|z^2 + \alpha \cdot z + \beta| \leq 1,\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.$$

Vasile Giurgi, Sighetu Marmaţiei

Soluţie. Trebuie ca

$$|z^2 + \alpha \cdot z + \beta| \leq 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| = 1. \tag{1}$$

Punem în (1) în loc de z pe $i \cdot z$ şi obţinem

$$|-z^2 + i \cdot \alpha \cdot z + \beta| \leq 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z| = 1. \tag{2}$$

Adunând inegalităţile (1) şi (2) găsim că

$$\begin{aligned} 2 &\geq |z^2 + \alpha \cdot z + \beta| + |-z^2 + i \cdot \alpha \cdot z + \beta| \\ &\geq |z^2 + \alpha \cdot z + \beta - i \cdot \alpha \cdot z - \beta| \\ &= |2z^2 + \alpha \cdot z(1-i)| = |z| \cdot |2z + \alpha(1-i)| = |2z + \alpha(1-i)|. \end{aligned}$$

împărţind această inegalitate cu $|1-i|=\sqrt{2}$, obţinem:

$$\sqrt{2} \geq \left|\frac{2z}{1-i}+\alpha\right|, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z|=1$$

sau

$$1 \geq \left|\frac{\sqrt{2}\cdot z}{1-i}+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right|, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z|=1. \tag{3}$$

Punem $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot i \quad (|z|=1)$ şi rezultă că

$$1 \geq \left|i+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right| \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{2}} \Leftrightarrow 1 \geq 1-1\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \alpha=0.$$

Relaţia (1) devine:

$$|z^2+\beta| \leq 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ |z|=1. \tag{4}$$

Înlocuind z cu i, respectiv 1, obţinem:

$$|-1+\beta| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -1+\beta \leq 1 \qquad \text{şi}$$

$$|1+\beta| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1+\beta \leq 1.$$

Ca urmare, $0 \leq \beta \leq 2$ şi $-2 \leq \beta \leq 0$, deci $\beta=0$ şi atunci relaţia (4) este adevărată. În concluzie, $\alpha=\beta=0$.

8. *Să se rezolve în* $\mathbb{C}$ *sistemul:* $\begin{cases} z_1\cdot|z_2z_3|=z_4^2 \\ z_2\cdot|z_3z_4|=z_1^2 \\ z_3\cdot|z_4z_1|=z_2^2 \\ z_4\cdot|z_1z_2|=z_3^2 \end{cases}$.

Erika Darolţi

Soluţie. Dacă $z_i=0 \quad (i\in\overline{1,4})$, atunci $z_1=z_2=z_3=z_4=0$.

Dacă $z_k\neq 0$, $\forall\, k\in\overline{1,4}$, atunci înmulţind egalităţile sistemului obţinem:

$$z_1z_2z_3z_4\cdot|z_1z_2z_3z_4|^2=z_1^2z_2^2z_3^2z_4^2 \Leftrightarrow |z_1z_2z_3z_4|^2=z_1z_2z_3z_4.$$

Trecând aici la module, găsim că $|z_1z_2z_3z_4|=1$, iar sistemul devine:

$$\begin{cases} z_1\cdot\dfrac{1}{|z_1z_4|}=z_4^2 \\ z_2\cdot\dfrac{1}{|z_2z_1|}=z_1^2 \\ z_3\cdot\dfrac{1}{|z_2z_3|}=z_2^2 \\ z_4\cdot\dfrac{1}{|z_3z_4|}=z_3^2 \end{cases}$$

Trecând la module în fiecare ecuaţie din sistem, obţinem că

$$|z_4|^3 = |z_1|^3 = |z_2|^3 = |z_3|^3 = 1, \quad \text{deci } |z_k| = 1,\ k \in \overline{1,4}.$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} z_1 = z_4^2 \\ z_2 = z_1^2 \\ z_3 = z_2^2 \\ z_4 = z_3^2, \end{cases}$$

deci $z_1 = z_4^2 = z_3^4 = z_2^8 = z_1^{16}$, deci $z_1^{15} = 1$ şi atunci $z_1 = \varepsilon_k$, $k \in \overline{0,14}$, unde ε_k este rădăcină de ordinul 15 a unităţii. Atunci $z_2 = \varepsilon_k^2$, $z_3 = \varepsilon_k^4$ şi $z_4 = \varepsilon_k^8$, de unde

$$S = \left\{(\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \varepsilon_k^4, \varepsilon_k^8) \mid k \in \overline{0,14},\ \varepsilon_k^{15} = 1\right\}.$$

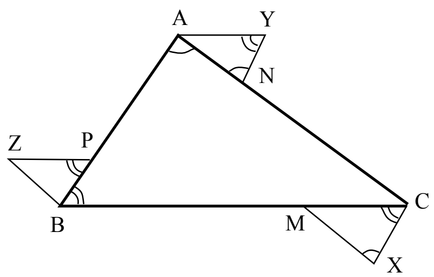
9. *Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{BP}{AB} = k$. Fie punctele X, Y, Z în exteriorul triunghiului, astfel încât $\triangle ABC \sim \triangle NYA \sim \triangle BPZ \sim \triangle XCM$.*

a) Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi XYZ au acelaşi centru de greutate.

b) Să se demonstreze că $\triangle ABC \sim \triangle XYZ \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.

Dana Heuberger

Soluţie. Notăm ca de obicei cu litere mici corespunzătoare afixele punctelor din problemă.



a) Avem $AY \| BC$ şi $\triangle ABC \sim \triangle NYA$, deci $y - a = k(c - b)$.
Analog, $z - b = k(a - c)$ şi $x - c = k(b - a)$. Obţinem $x + y + z = a + b + c$.

b) Avem că

$$a(y - z) + b(z - x) + c(x - y) = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(1 - k). \qquad (1)$$

Atunci $\triangle ABC \sim \triangle XYZ \Leftrightarrow XYZ \Leftrightarrow a(y - z) + b(z - x) + c(z - y) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.

10. *Să se arate că în orice $\triangle ABC$ avem:*

$$\frac{1}{m_a^2 \cdot m_b^2} + \frac{1}{m_b^2 \cdot m_c^2} + \frac{1}{m_c^2 \cdot m_a^2} \le \frac{1}{S^2},$$

unde m_a reprezintă lungimea medianei din A, iar S este aria triunghiului ABC.

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Se ştie că m_a, m_b, m_c pot fi laturile unui triunghi $A'B'C'$, cu $S' = S_{A'B'C'} = \frac{3}{4}S$. Se ştie că în orice triunghi ABC are loc:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2. \quad (1)$$

Aplicăm (1) pentru triunghiul $A'B'C'$:

$$m_a^2 + m_b^2 + n_c^2 \leq 9 \cdot R'^2,$$

unde

$$R' = \frac{m_a m_b m_c}{4S'} = \frac{m_a m_b m_c}{4 \cdot \frac{3}{4}S} = \frac{m_a m_b m_c}{3S}.$$

Obţinem $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \dfrac{m_a^2 m_b^2 m_c^2}{S^2}$ care este echivalentă cu inegalitatea cerută. Evident, egalitate avem în cazul triunghiului echilateral.

11. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:*

$$\sum_{i=1}^{n-1} x^{\log_n a_i} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \log_n x = n - x.$$

(În legătură cu problema 25683, G. M. 12/2006)

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Ecuaţia devine:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \log_n x - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \log_n x = n - x.$$

Notăm $\log_n x = t$. Atunci

$$a_1^t + a_2^t + \cdots + a_{n-1}^t + n^t = n + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})t. \quad (1)$$

Cum membrul stâng reprezintă o funcţie convexă, iar membrul drept o funcţie de gradul I, ecuaţia are cel mult două soluţii. Dar $t_1 = 0$ şi $t_2 = 1$ sunt soluţii. Prin urmare $t_1 = 0$ şi $t_2 = 1$ sunt singurele soluţii ale ecuaţiei (1).

Găsim $x_1 = 1$ şi $x_2 = n$.

12. *Să se determine funcţia injectivă $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ cu proprietatea:*

$$(f \circ f)(x) \cdot (f \circ f \circ f)(x) = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Din relaţia dată obţinem

$$(f\circ f)(x)=\frac{1}{(f\circ f)f(x)}\quad \text{şi}\quad (f\circ f\circ f)(x)=\frac{1}{(f\circ f)(x)}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{(f\circ f)(x)}\right)&=f\left((f\circ f\circ f)(x)\right)=(f\circ f\circ f)(f(x))\\ &=\frac{1}{(f\circ f)(f(x))}=\frac{1}{(f\circ f\circ f)(x)}=(f\circ f)(x),\end{aligned}$$

deci $f\left(\frac{1}{(f\circ f)(x)}\right)=f(f(x))$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$. Cum f este injectivă, obţinem

$$\frac{1}{(f\circ f)(x)}=f(x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^*. \tag{1}$$

Folosind relaţia dată obţinem $(f\circ f\circ f)(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$ şi, din injectivitate, va rezulta că $(f\circ f)(x)=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$, iar din (1) găsim $f(x)=\frac{1}{x}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$. Această funcţie injectivă verifică relaţia din problemă.

13. *Rezolvaţi în* $\mathbb{R}_+$ *ecuaţia:* $\dfrac{2\cdot 11^x-2^{x+1}+7}{11^x-2^x+1}=2x+\dfrac{1}{2}.$

Ocean Cristina

Soluţie. Pentru $x\geq 0$ avem că $11^x-2^x+1>0$ şi ecuaţia se scrie

$$2+\frac{5}{11^x-2^x+1}=2x+\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Fie funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=11^x-2^x+1$. Pentru $0\leq x<y$ avem:

$$f(y)-f(x)=11^y-2^y-11^x+2^x=11^x(11^{y-x}-1)-2^x(2^{y-x}-1)>0$$

căci $11^x>2^x>0$ şi $11^{y-x}-1>2^{y-x}-1>0$. Deci f este strict crescătoare şi pozitivă pe $[0,\infty)$. Aşadar, ecuaţia (1) are cel mult o soluţie pe $[0,\infty)$ căci membrul stâng este o funcţie strict descrescătoare, iar cel drept este o funcţie strict crescătoare. Cum $x=1$ este soluţie, avem $S=\{1\}$.

14. *Determinaţi cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia*

$$|z^2-1|+\frac{|z^3+1|}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}+|z^5-1|,$$

atunci când z parcurge mulţimea numerelor complexe de modul mai mic sau egal decât $\sqrt{2}-1$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Avem
$$|z|^2 \leq 3-2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}},$$
deci
$$|z^2-1| + \frac{|z^3+1|}{\sqrt{8}+\sqrt{9}} + |z^5-1| \geq |z^2-1| + |z^2| \cdot |z^3+1| + |z^5-1|$$
$$= |z^2-1| + |z^5+z^2| + |z^5-1| \geq |z^2-1-z^5-z^2+z^5-1| = 2.$$
Minimul cerut este egal cu 2, deoarece, pentru $z=\sqrt{2}-1$, expresia este egală cu 2.

15. *Se consideră numerele complexe $z_k = x_k + i \cdot y_k$, $k \in \overline{1,3}$. Să se arate că:*
$$\sum \sqrt{|z_1|^4 + y_2^4 + x_3^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right).$$

Dorin Mărghidanu şi Nicolae Muşuroia

Soluţie. Din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, obţinem:
$$|z_1|^4 + y_2^4 + x_3^4 \geq \frac{(|z_1|^2 + y_2^2 + x_3^2)^2}{3},$$
deci
$$\sqrt{|z_1|^4 + y_2^4 + x_3^4} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|z_1|^2 + y_2^2 + x_3^2\right)$$
şi analoagele
$$\sqrt{|z_2|^4 + y_3^4 + x_1^4} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|z_2|^2 + y_3^2 + x_1^2\right);$$
$$\sqrt{|z_3|^4 + y_1^4 + x_2^4} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|z_3|^2 + y_1^2 + x_1^2\right).$$
Adunând cele trei inegalitaţi, obţinem inegalitatea cerută.

Clasa a XI-a

1. *Să se arate că oricare ar fi $t \in \mathbb{R}^*$, şirul $(I_n(t))_{n\geq 2}$, de termen general*
$$I_n(t) = n^{1-t} \left((n+1)^t \cdot \sqrt[n+1]{n+1}^{\,t} - n^t \cdot \sqrt[n]{n}^{\,t}\right),$$
este convergent.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Avem:
$$I_n(t) = n^{1-t} \cdot n^t \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^t \cdot \sqrt[n+1]{n+1}^{\,t} - \sqrt[n]{n}^{\,t}\right)$$
$$= n \cdot \sqrt[n]{n}^{\,t} (u_n - 1) = \left(\sqrt[n]{n}^{\,t}\right) \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \ln(u_n^n), \ \forall\, n \geq 2, \qquad (1)$$

unde $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^t \left(\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right)^t$, $\forall n \geq 2$.

Să observăm că avem: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} = 1$ şi

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot t}\left(\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\right)^{n\cdot t}\right]$$

$$= e^t \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}\right)^t = e^t.$$

Trecând la limită în relaţia (1) deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(t) = \ln(e^t) = t \in \mathbb{R}$, deci şirul $(I_n(t))_{n\geq 2}$ este convergent.

Observaţie. Dacă $t = 1$, atunci $I_n(1) = (n+1)\sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n} \overset{not}{=} I_n$, $n \geq 2$, adică şirul lui Romeo T. Ianculescu. Aşadar, acest şir este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} I_n(1) = 1.$$

2. *Se consideră* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ *astfel încât*

$$I_n - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots - A^{15} + A^{16} = O_n.$$

Să se arate că:

a) $\det(A - A^2) \neq 0$*;*

b) $\det(I_n - A + A^2) = 1$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. a) Din ipoteză rezultă că:

$$I_n = A(I_n - A + A^2 - \cdots + A^{15}) \overset{not}{=} A \cdot B,$$

deci $\det(I_n) = 1 = \det A \cdot \det B$, de unde A este inversabilă.

De asemenea, in ipoteză se obţine:

$$(I_n - A) + (I_n - A)A^2 + \cdots + (I_n - A)A^{14} = -A^{16}$$

sau

$$(I_n - A)(I_n + A^2 + A^4 + \cdots + A^{14}) = -A^{16}.$$

Atunci

$$\det(I_n - A) \cdot \det(I_n + A^2 + A^4 + \cdots + A^{14}) = (\det(A))^{16} \neq 0,$$

deci $\det(I_n - A) \neq 0$.

Ca urmare, $\det(A - A^2) = \det A \cdot \det(I_n - A) \neq 0$.

b) Înmulţind relaţia dată cu A^{17}, obţinem:

$$A^{17} - A^{18} + A^{19} - A^{20} + \cdots + A^{32} - A^{33} = O_n,$$

deci

$$I_n - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots - A^{31} + A^{32} - A^{33} = O_n,$$

de unde

$$I_n = A(I_n - A + A^2) - A^4(I_n - A + A^2) + \cdots + A^{31}(I_n - A + A^2) = O_n \Leftrightarrow$$
$$I_n = (A - A^4 + A^7 - \cdots + A^{31})(I_n - A + A^2).$$

Atunci

$$\det(A - A^4 + A^7 - \cdots + A^{31}) \det(I_n - A + A^2) = \det(I_n) = 1$$

şi cum $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, deducem că $\det(I_n - A + A^2) \in \{\pm 1\}$.
Deoarece $\det(I_n - A + A^2) = \det\left(\left(A - \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2\right) \geq 0$, folosind relaţia anterioară vom obţine $\det(I_n - A + A^2) = 1$.

3. *Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ şi funcţia*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \det(A + xB).$$

Să se arate că dacă $f(3) = 0$ şi $f(5) = 0$, atunci $f(15) \vdots 5!$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Utilizând definiţia determinantului de ordinul trei, cum $f(x)$ este o sumă de 6 termeni de forma $\pm(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)$ cu $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \overline{1,3}$, vom avea că $f(x) = ax^3 + bx^2 + c \cdot x + d$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Deoarece

$$f(x) - f(3) = f(x) = a(x^3 - 3^3) + b(x^2 - 3^2) + c(x - 3)$$
$$= (x - 3)(ax^2 + m \cdot x + n),\ \text{unde } m, n \in \mathbb{Z},$$

cum $f(5) = 0$, vom avea că $ax^2 + mx + n = a(x - 5)(-\alpha) = (x - 5)(ax - a \cdot \alpha)$, unde $-a\alpha - 5a = m \in \mathbb{Z}$ şi $5a\alpha = n \in \mathbb{Z}$. Din prima relaţie se obţine $a \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$.
Aşadar, $f(x) = f(x) - f(3) = (x - 3)(x - 5)(ax - a \cdot \alpha)$, de unde

$$f(15) = 12 \cdot 10(15a - a \cdot \alpha) = 5!(15a - a \cdot \alpha) \vdots 5!$$

căci $15a - a \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$.

4. *Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = 2$.*
i) Să se arate că $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$;
ii) Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot a_1^2 + (n - 1)a_2^2 + \cdots + 2 \cdot a_{n-1}^2 + a_n^2}{n^4}.$$

Gheorghe Gherasin, Sighetu Marmaţiei

Soluţie. i) Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 2$, va exista $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left|\frac{a_n}{n} - 2\right| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, deci

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon < \frac{a_n}{n} < 2 + \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \Leftrightarrow \\ (2-\varepsilon)n < a_n(2+\varepsilon)n, \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon. \end{aligned}$$

Cu teorema cleştelui găsim că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

ii) Notăm $x_n = n \cdot a_1^2 + (n-1)a_2^2 + \cdots + 2 \cdot a_{n-1}^2 + a_n^2$.
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi aplicând lema Stolz-Cesàro obţinem:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^4} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1)^4 - n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}^2}{12n^2 + 24n + 14} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+2}}{n+2}\right)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{12n^2 + 24n + 14} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5. *Fie* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *astfel încât* $\det(A + 2 \cdot {}^tA) = 0$.
i) Arătaţi că matricea A *este inversabilă* $\Leftrightarrow$ *matricea* $A + {}^tA$ *este inversabilă;*
ii) Arătaţi că $\det(A + x \cdot {}^tA) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{5}((Tr(A))^2 - Tr(A \cdot {}^tA)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Vasile Giurgi, Sighetu Marmaţiei

Soluţie. i) Considerăm funcţia $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(x) = \det(A + x \cdot {}^tA)$.
Atunci $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, unde $c = \det({}^tA) = \det A$ şi $a = \det A$, deci $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + a$. Cum $p(2) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{5a}{2}$, găsim că

$$p(x) = a\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right),$$

unde $a = \det(A)$. Avem:
A inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \Leftrightarrow p(1) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A + {}^tA) \neq 0 \Leftrightarrow A + {}^tA$ este inversabilă.

ii) Din i) avem că

$$p(x) = \det(A + x \cdot {}^tA) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{2}\, a = -\frac{1}{5}(2x^2 - 5x + 2)b.$$

Deoarece $b = Tr(A \cdot {}^tA) - Tr(A) \cdot Tr({}^tA)$ şi $Tr(A) = Tr({}^tA)$, obţinem că

$$p(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{5}\left((Tr(A))^2 - Tr(A \cdot {}^tA)\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{C}.$$

6. *Fie* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *cu* $\det(A) = 1$ *şi* $Tr(A) = 1$. *Să se calculeze*

$$\sum_{k=1}^{n} \det(A^2 + k \cdot I_2), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. $A^2 - Tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$. Rezultă $A^2 - A + I_2 = O_2$.
Atunci $A^2 + kI_2 = A + (k-1)I_2$ şi

$$\begin{aligned}\det(A^2 + (k-1)I_2) &= \begin{vmatrix} a + (k-1) & b \\ c & d + (k-1) \end{vmatrix} \\ &= ad - bc + (k-1)(a+d) + (k-1)^2 \\ &= \det(A) + (k-1) \cdot Tr(A) + (k-1)^2 \\ &= k^2 - k + 1.\end{aligned}$$

Aşadar,

$$\sum_{k=1}^{n} \det(A^2 + k \cdot I_2) = \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k + 1) = \frac{n(n^2+2)}{3}.$$

7. *Fie* $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \ln(1 + k \cdot \operatorname{arctg} x_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} n \cdot x_n = \frac{4}{p+1}$.

(Generalizarea problemei 21253, G. M. 10/1987, autor M. Lascu)
Nicolae Muşuroia

Soluţie. 1) Evident $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2) Arătăm că $(x_n)_n$ este un şir descrescător.

$$\begin{aligned} px_{n+1} - px_n = {}& \ln(1 + \operatorname{arctg} x_n) + \frac{1}{2}\ln(1 + 2\operatorname{arctg} x_n) + \dots \\ &+ \frac{1}{p}\ln(1 + p\operatorname{arctg} x_n) - px_n = f(x_n),\end{aligned}$$

unde $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(1 + \operatorname{arctg} x) + \frac{1}{2}\ln(1 + 2\operatorname{arctg} x) + \dots + \frac{1}{p}\ln(1 + p\operatorname{arctg} x) - px.$$

Din $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{1+\operatorname{arctg} x} + \dots + \frac{1}{1+p\operatorname{arctg} x}\right) - p$ şi $f''(x) < 0$, $\forall x > 0$, deducem că $f(x) < 0$, $\forall x > 0$.
Atunci $f(x_n) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $(x_n)_n$ este şir descrescător.

3) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Din 1) şi 2) rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in [0,\infty)$. Avem $x_{n+1} = g(x_n)$, unde $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{p}\left[\ln(1+\operatorname{arctg} x) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right) + \cdots + \frac{1}{p}\ln(1+p\operatorname{arctg} x)\right].$$

Cum g este continuă, trecând la limită, obţinem $l = g(l)$.

Fie $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - x$. Atunci

$$h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+x^2}\left[\frac{1}{1+\operatorname{arctg} x} + \cdots + \frac{1}{1+p\operatorname{arctg} x}\right].$$

Obţinem $h''(x) \leq 0$, $\forall\, x \geq 0$.

$$\begin{array}{c|c|l}
x & / & 0 \\
\hline
h''(x) & / & \quad ------ \\
\hline
h'(x) & / & 0 \quad ---\searrow--- \\
\hline
h(x) & / & 0 \quad ---\searrow---
\end{array}$$

Deducem că

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Deci $l = 0$.

4) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \dfrac{4}{p+1}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nx_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \overset{s-c}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n g(x_n)}{x_n - g(x_n)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{xg(x)}{x-g(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{g(x)+xg'(x)}{1-g'(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2g'(x)+xg''(x)}{-g''(x)} = \frac{2g'(0)}{-g''(0)} = \frac{4}{p+1}.
\end{aligned}$$

Observaţie. Pentru $p = 1$ obţinem problema 21253 din GM 10/1987, autor M. Lascu.

8. *Fie $\alpha, \beta \in \{0,1,2,3,4\}$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$, astfel încât $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Considerăm propoziţia*

(P)*:* Există termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ care se divid cu 5.

a) Să se demonstreze că şirul lui Fibonacci are proprietatea (P);

b) Să se demonstreze că şirul lui Lucas nu are proprietatea (P);

c) Să se determine α, β pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are proprietatea (P) şi apoi să se găsească toţi termenii şirului care se divid cu 5.

Costel Chiteş, Bucureşti

Soluţie. Pentru $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{aligned} x_{n+5} &= x_{n+4} + x_{n+3} = x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+3} \\ &= 2(x_{n+2} + x_{n+1}) + x_{n+2} = 3(x_{n+1} + x_n) + 2x_{n+1} \end{aligned}$$

deci

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+5} = 5x_{n+1} + 3x_n. \tag{1}$$

Din relaţia (1), folosind inducţia cu saltul $t = 5$, deducem că şirul are proprietatea (P) dacă şi numai dacă cel puţin unul dintre primii cinci termeni ai şirului este divizibil cu 5.

a) Şirul lui Fibonacci verifică recurenţa din enunţ şi are $x_0 = 0$ şi $x_1 = 1$. Deoarece $x_0 = 0$ este divizibil cu 5, deducem că şirul lui Fibonacci are proprietatea (P).

b) Şirul lui Lucas verifică recurenţa din enunţ şi are $x_0 = 2$ şi $x_1 = 1$. Deoarece $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ şi $x_4 = 7$, deducem că şirul lui Lucas nu are proprietatea (P).

c) În cazul general, avem $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$, $x_2 = \alpha+\beta$, $x_3 = \alpha+2\beta$ şi $x_4 = 2\alpha+3\beta$. Cel puţin unul dintre aceşti termeni este divizibil cu 5, dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \in &\left\{(\alpha, 0) | \alpha = \overline{0,4}\right\} \cup \left\{(0, \beta) | \beta = \overline{0,4}\right\} \cup \left\{(\alpha, \alpha) | \alpha = \overline{0,4}\right\} \cup \\ &\cup \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1), (4,3)\}. \end{aligned}$$

sunt, aşadar, 21 de soluţii distincte.

Dacă $(\alpha, \beta) \in \{(\alpha, 0) | \alpha = \overline{1,4}\}$, atunci $x_1 = 0 \,\vdots\, 5$, deci termenii divizibili cu 5 sunt cei de forma x_{5k+1}, $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $(\alpha, \beta) \in \{(0, \beta) | \beta = \overline{1,4}\}$, atunci $x_0 = 0 \,\vdots\, 5$, deci termenii divizibili cu 5 sunt cei de forma x_{5k}, $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $(\alpha, \beta) \in \{(\alpha, \alpha) | \alpha = \overline{1,4}\}$, atunci $x_4 = 5\alpha \,\vdots\, 5$ şi termenii divizibili cu 5 sunt cei de forma x_{5k+4}, $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $(\alpha, \beta) \in \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$, atunci $x_2 = 5 \,\vdots\, 5$ şi termenii divizibili cu 5 sunt cei de forma x_{5k+2}, $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $(\alpha, \beta) \in \{(1,2), (2,4), (3,1), (4,3)\}$, atunci $x_3 \,\vdots\, 5$ şi termenii divizibili cu 5 sunt cei de forma x_{5k+3}, $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, atunci şirul este nul, deci toţi termenii acestuia sunt divizibili cu 5.

9. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin* $x_0 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \dfrac{3x_n}{4x_n^2 + 2x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Crina Petruţiu

Soluţie. Prin inducţie matematică, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Din inegalitatea mediilor, $4x_n^2 + 2x_n + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{8x_n^3} = 6x_n$, deci $x_{n+1} \leq \dfrac{3x_n}{6x_n} = \dfrac{1}{2}$, deci

$$0 < x_n \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Deoarece
$$x_{n+1} - x_n = \frac{3x_n}{4x_n^2 + 2x_n + 1} - x_n = \frac{-4x_n^3 - 2x_n^2 + 2x_n}{4x_n^2 + 2x_n + 1}$$
$$= \frac{-2x_n(2x_n - 1)(x_n + 1)}{4x_n^2 + 2x_n + 1} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{2}$$

deducem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător.
Din (1) şi (2) rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Trecând la limită în relaţia de recurenţă şi notând $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, găsim că $l = \dfrac{3l}{4l^2 + 2l + 1} \Leftrightarrow 4l^3 + 2l^2 - 2l = 0 \Leftrightarrow l \in \left\{-1, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$. Cum $l = -1$ sau $l = 0$ nu convin, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

10. *Fie* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\varepsilon^3 = 1$ *şi matricele*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $\det(A \cdot B)$.

Ludovic Longaver

Soluţie. Deoarece $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, vom avea că $rang\, A \leq 2$ şi $rang\, B \leq 2$.
Deoarece $A \cdot B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, folosind faptul că $rang(A \cdot B) \leq \min\{rang\, A, rang\, B\}$, deducem că $\det(A \cdot B) = 0$.

11. *Se presupune cunoscut faptul că limita şirului* $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ *este egală cu* $\dfrac{\pi^2}{6}$. *Demonstraţi că pentru orice număr natural nenul* n, *avem:*

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}.$$

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Soluţia se reduce la a arăta că $x_n < 0$ şi $y_n > 0$, unde

$$x_n = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}.$$

Avem

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = n^{-1}(n+1)^{-2} > 0.$$

Rezultă că x_n este crescător, convergent la zero, deci $x_n < 0$.
Avem

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= -\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)(n+1)^{-2}n^{-2} < 0. \end{aligned}$$

Rezultă că y_n este descrescător, convergent la zero, deci $y_n > 0$.

12. *Să se arate că există un unic şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea:*

$$x_n + e^{x_n} = \frac{n}{n+1}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim_{n\to\infty} nx_n$.

Dan Bărbosu

Soluţie. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t + e^t$ este continuă, bijectivă şi strict crescătoare. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia $f(t) = \frac{n}{n+1}$ are o unică soluţie $x_n \in \mathbb{R}$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este unic determinat de relaţia din ipoteză.

Cum f e continuă şi bijectivă, rezultă că f^{-1} este continuă. Deoarece $f(x_n) = \frac{n}{n+1}$, rezultă că $x_n = f^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)$, deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right) \overset{f^{-1}\, cont.}{=} f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right) = f^{-1}(1) = 0.$$

Din $x_n + e^{x_n} = \frac{n}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, obţinem că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\begin{aligned} x_n + e^{x_n} - 1 = \frac{-1}{n+1} &\Leftrightarrow n \cdot x_n + n(e^{x_n} - 1) = \frac{-n}{n+1} \overset{x_n \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow n \cdot x_n + n \cdot \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \cdot x_n = \frac{-n}{n+1} \\ &\Leftrightarrow n \cdot x_n \left(1 + \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right) = \frac{-n}{n+1}. \end{aligned}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}=1$, din relaţia anterioară găsim că

$$\lim_{n\to\infty}(n\cdot x_n)=\frac{-1}{2}.$$

13. *Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi matricea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A=\left(\dfrac{i}{j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$.*

a) Să se arate că suma elementelor matricei A este mai mare ca n^2;

b) Se iau la întâmplare n elemente ale matricei A, situate pe linii şi coloane diferite. Să se arate că produsul acestor numere nu depinde de alegerea făcută.

Ludovic Longaver

Soluţie. a) Suma elementelor matricei A este

$$(1+2+3+\cdots+n)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)>n^2$$

conform inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

b) Numerele alese vor fi de forma $\dfrac{i_1}{1},\dfrac{i_2}{2},\ldots,\dfrac{i_n}{n}$, unde $\{i_1,i_2,...,i_n\}=\{1,2,...,n\}$. Evident, produsul lor va fi egal cu 1.

14. *Fie a,b,c lungimile laturilor, iar A,B,C măsurile unghiurilor unui triunghi ABC. Să se arate că:* $\Delta=\begin{vmatrix} b\cdot\cos C & c\cdot\cos B & \sin A\\ c\cdot\cos A & a\cdot\cos C & \sin B\\ a\cdot\cos B & b\cdot\cos A & \sin C\end{vmatrix}=0.$

Ludovic Longaver

Soluţie. Utilizând teorema sinusurilor $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, obţinem:

$$\Delta=\frac{1}{2R}\begin{vmatrix} b\cdot\cos C & c\cdot\cos B & a\\ c\cdot\cos A & a\cdot\cos C & b\\ a\cdot\cos B & b\cdot\cos A & c\end{vmatrix}=\frac{1}{2R}\begin{vmatrix} b\cdot\cos C & b\cdot\cos C+c\cdot\cos B & a\\ c\cdot\cos A & c\cdot\cos A+a\cdot\cos C & b\\ a\cdot\cos B & a\cdot\cos B+b\cdot\cos A & c\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2R}\begin{vmatrix} b\cdot\cos C & a & a\\ c\cdot\cos A & b & b\\ a\cdot\cos B & c & c\end{vmatrix}=0.$$

15. *Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ fixat, să se determine $a>0$, astfel încât:*

$$(n^2+n+a)^x-(n^2+n)^x\geq(n+3)^x+(n+2)^x-(n+1)^x-n^x,\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

Soluţie. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(n^2+n+a)^x-(n^2+n)^x-$ $-(n+3)^x-(n+2)^x+(n+1)^x+n^x$ pentru care avem $f(0)=0$. Inegalitatea din ipoteză se scrie $f(x)\geq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, deci $f(x)\geq f(0)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Atunci $x=0$ este punct de minim pentru funcţia derivabilă f şi din teorema lui Fermat avem că $f'(0)=0$. Cum

$$\begin{aligned}f'(x)&=(n^2+n+a)^x\ln(n^2+n+a)-(n^2+n)^x\ln(n^2+n)-\\&-(n+3)^x\ln(n+3)-(n+2)^x\ln(n+2)+\\&+(n+1)^x\ln(n+1)+n^x\ln n,\end{aligned}$$

relaţia $f'(0)=0\Leftrightarrow\ln(n^2+n+a)-\ln(n^2+n)-\ln(n+3)-\ln(n+2)+$ $+\ln(n+1)+\ln n=0\Leftrightarrow\ln(n^2+n+a)=\ln(n+2)(n+3)\Leftrightarrow n^2+n+a=$ $n^2+5n+6\Leftrightarrow a=4n+6$.

Arătăm că valoarea găsită $a=4n+6$ verifică relaţia din ipoteza problemei. Într-adevăr, aceasta se scrie:

$$(n^2+5n+6)^x+(n+1)^x+n^x\geq(n+3)^x+(n+2)^x+(n^2+n)^x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow((n+3)^x-1)((n+2)^x-1)\geq((n+1)^x-1)((n^x-1),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.\qquad(1)$$

Dacă $x\geq 0$, atunci $(n+3)^x-1\geq(n+1)^x-1\geq 0$ şi $(n+2)^x-1\geq n^x-1\geq 0$, deci relaţia (1) este adevărată.

Dacă $x<0$, atunci $(n+3)^x-1\leq(n+1)^x-1<0$ şi $(n+2)^x-1\leq n^x-1\leq 0$, deci relaţia (1) este adevărată.

Aşadar, $a=4n+6$ este unica soluţie.

Clasa a XII-a

1. *Să se arate că dacă* $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $a+b=\dfrac{\pi}{2}$ *şi* $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă, atunci avem că*

$$\int_a^b\cos^2 x\cdot g(\sin x)\cdot\cos x+g(\cos x)\cdot\sin x)dx=\int_{\sin a}^{\sin b}g(x)dx.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. În integrala $I=\displaystyle\int_a^b\cos^2 x(g(\sin x)\cos x+g(\cos x)\sin x)dx$ facem schimbarea de variabilă $t=a+b-x=\dfrac{\pi}{2}-x$ şi obţinem:

$$I=\int_a^b\sin^2 t(g(\cos t)\sin t+g(\sin t)\cos t)dt,$$

de unde deducem că

$$2I = \int_a^b (\sin^2 x + \cos^2 x)(g(\sin x)\cos x + g(\cos x)\sin x)dx$$
$$= \int_a^b g(\sin x)\cos x\,dx + \int_a^b g(\cos x)\sin x\,dx = A + B, \tag{1}$$

unde $A = \int_a^b g(\sin x)\cos x\,dx$ şi $B = \int_a^b g(\cos x)\sin x\,dx$.

Cu substituţia $\sin x = t$ obţinem $A = \int_{\sin a}^{\sin b} g(t)dt$, iar cu substituţia $a + b - x = \frac{\pi}{2} - x = t$ găsim că $B = \int_a^b g(\sin t)\cos t\,dt = A$.

Folosind acum (1) obţinem: $2I = A + B = 2A$, deci

$$I = A = \int_{\sin a}^{\sin b} g(t)dt,$$

adică are loc relaţia cerută.

2. *Se consideră funcţiile continue $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq -1$ astfel încât $f(x) + b \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = c$, $x^2 g(x) h\left(\frac{1}{x}\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) h(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$. Să se arate că:*

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}\,dx = \frac{c}{1+b}\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{g(x)}{h(x)}\,dx.$$

(În legătură cu problema 8, pag. 109 din Argument 11/2009)

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. În integrala $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}dx$ facem schimbarea de variabilă $\frac{1}{x} = t$ şi obţinem:

$$I = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot g\left(\frac{1}{t}\right)}{h\left(\frac{1}{t}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot g\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\cdot h\left(\frac{1}{t}\right)}\,dt \overset{ip}{=}$$
$$= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)t^2\cdot g(t)\cdot h\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\cdot h\left(\frac{1}{t}\right)h(t)}\,dt = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot g(t)}{h(t)}\,dt.$$

Prin urmare,

$$I+b\cdot I=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}\,dx+b\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot g(x)}{h(x)}\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(f(x)+b\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{g(x)}{h(x)}\,dx=c\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{g(x)}{h(x)}\,dx,$$

de unde deducem că

$$I=\frac{c}{b+1}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{g(x)}{h(x)}\,dx.$$

Observaţie. Dacă $b=1$, $g(x)=x^k$, $k\in\mathbb{N}$, atunci $x^2\cdot x^k\cdot h\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^k}h(x)$, $\forall\, x\in(0,\infty)$ sau $h(x)=x^{2k+2}\cdot h\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall\, x\in(0,\infty)$ şi

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^k\cdot f(x)}{h(x)}\,dx=\frac{c}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{x^k}{h(x)}\,dx,$$

adică se obţine problema 8, pag. 109, din Argument 11/2009.

3. *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.
Să se arate că există $c\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $F(c)\cdot f(c)=c^3$, *unde* F *este o primitivă pentru* f.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=F^2(x)-\frac{x^4}{2}$. Se ştie că f are primitive pe $\mathbb{R}$ şi e integrabilă pe orice interval $[a,b]\subset\mathbb{R}$ (f e continuă pe $\mathbb{R}^*$, f e mărginită şi are doar pe $x=0$ punct de discontinuitate).
Din $-1\le f(x)\le 1\Rightarrow -x\le\int_0^x f(t)dx\le x$, $\forall\, x\ge 0$ şi $x\le\int_0^x f(t)dt\le -x$, $\forall\, x\le 0$, deci

$$|F_1(x)|\le|x|,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}$$

sau

$$\left|\frac{F_1(x)}{x}\right|\le 1,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}^*,\tag{1}$$

unde F_1 e o primitivă ce se anulează în $x=0$.

Fie F o primitivă pentru f, cu $F(0)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Atunci $F_1(x)=F(x)-c$ şi relaţia (1) se scrie:

$$\left|\frac{F(x)-c}{x}\right|\le 1,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(\frac{F(x)-c}{x}\right)^2\le 1,\quad\forall\, x\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

Presupunând că G ar fi injectivă, cum G e şi continuă, ar rezulta că ea este strict monotonă (3). Deoarece

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} G(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(F^2(x)-\frac{x^4}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{F^2(x)}{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{(F(x)-c+c)^2}{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} x^2\left[\left(\frac{F(x)-c}{x}\right)^2+\frac{2c\cdot(F(x)-c)}{x\cdot x}-\frac{x^2}{2}\right] \overset{(2)}{=} -\infty\\
&= \lim_{x\to-\infty} G(x),
\end{aligned}$$

se obţine o contradicţie cu (3).

Aşadar, G nu e injectivă, deci $(\exists)\, a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$, astfel încât $G(a)=G(b)$. Cu teorema lui Rolle, va rezulta că există c situat între a şi b astfel încât $G'(c)=0$, deci $F(c)\cdot f(c)=c^3$.

4. *Să se arate că pentru orice a număr real nenul, ecuaţia*

$$4x^5\cdot\cos^2 x-10a^2\cdot x^4+4a\cdot x^3+5x^2\cdot\sin x+a^2x+2a^2=0$$

are cel puţin o soluţie în $(-1,1)$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=4x^5\cdot\cos^2 x-10a^2\cdot x^4+4ax^3+5x^2\sin x+a^2x+2a^2.$$

Cum $f(0)=2a^2>0$, dacă ecuaţia $f(x)=0$ nu ar avea soluţii în $(-1,1)$, ar rezulta că $f(x)>0$, $\forall\, x\in(-1,1)$, de unde (f e continuă) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx>0$.

Cum $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=(-2a^2x^5+2a^2x)\Big|_{-1}^{1}=0$, se obţine o contradicţie.

Aşadar, presupunerea făcută este falsă.

5. *Fie p un număr prim. Să se demonstreze că $C_{3p}^{p}-3\cdot C_{2p}^{p}+3$ se divide cu p^3.*

Meda şi Florin Bojor

Soluţie. Numărul C_{3p}^p este coeficientul lui x^p din dezvoltarea $(1+x)^{3p}$.
Deoarece $(1+x)^{3p} = (1+x)^p \cdot (1+x)^p \cdot (1+x)^p$, $x \in \mathbb{R}$, obţinem:

$$\begin{aligned} C_{3p}^p &= \sum_{k+q+r=p} C_p^k \cdot C_p^q \cdot C_p^r \\ &= \sum_{\substack{k+q+r=p \\ k,q,r\in\{1,2,\ldots,p-1\}}} C_p^k \cdot C_p^q \cdot C_p^r + \sum_{k+q=p} C_p^k \cdot C_p^q + \sum_{k+r=p} C_p^k \cdot C_p^r + \\ &\quad + \sum_{q+r=p} C_p^q \cdot C_p^r - 3 \\ &= \sum_{\substack{k+q+r=p \\ k,q,r\in\{1,2,\ldots,p-1\}}} C_p^k \cdot C_p^q \cdot C_p^r + 3C_{2p}^p - 3, \end{aligned}$$

deci

$$C_{3p}^p - 3C_{2p}^p = \sum_{\substack{k+r+q=p \\ k,r,q\in\{1,2,\ldots,p-1\}}} C_p^k \cdot C_p^q \cdot C_p^r.$$

Cum fiecare termen din membrul drept este divizibil cu p^3, se obţine concluzia.

6. *Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi mulţimile $M_n = \{x \in \mathbb{Z}_n | x^2 = \widehat{3} \cdot x + \widehat{1}\}$.*
a) Să se determine M_3 şi M_4
b) Dacă mulţimea M_n are un număr impar de elemente, să se determine n.

Dana Heuberger

Soluţie. a) $M_3 = \{x \in \mathbb{Z}_3 | x^2 = \widehat{1}\} = \{\widehat{1}, \widehat{2}\}$ iar $M_4 = \emptyset$.

b) Evident, $\widehat{0} \notin M_n$. Observăm că dacă $x \in M_n$, atunci şi $\widehat{3} - x \in M_n$.
Într-adevăr, $(\widehat{3} - x)(\widehat{3} - x - \widehat{3}) = x(x - \widehat{3}) = \widehat{1}$.

Dacă M_n are un număr impar de elemente, atunci există $x_0 \in M_n$, astfel încât $x_0 = \widehat{3} - x_0$. Deducem că $\widehat{2}x_0 = \widehat{3}$.
Din $x_0^2 = \widehat{3}x_0 + \widehat{1}$ rezultă $\widehat{2}x_0^2 = \widehat{6}x_0 + \widehat{2} \Leftrightarrow x_0(\widehat{2}x_0) = \widehat{3}(\widehat{2}x_0) + \widehat{2}$.
Deducem $\widehat{3}x_0 = \widehat{11} \Leftrightarrow x_0 + \widehat{2}x_0 = \widehat{11} \Leftrightarrow x_0 = \widehat{8}$. Din $\widehat{2}x_0 = \widehat{3}$ rezultă $\widehat{16} = \widehat{3}$, deci $\widehat{13} = \widehat{0}$, adică $n = 13$.

Pentru $n = 13$, $x^2 = \widehat{3}x + \widehat{1} \Leftrightarrow x^2 - \widehat{3}x - \widehat{1} = \widehat{0} \Leftrightarrow x^2 + \widehat{10}x + \widehat{12} = \widehat{0} \Leftrightarrow x^2 + \widehat{10}x + \widehat{25} = \widehat{0} \Leftrightarrow (x + \widehat{5})^2 = \widehat{0} \Leftrightarrow x = -\widehat{5} = \widehat{8}$ este unica soluţie.

Aşadar, $M = \{\widehat{8}\}$, deci $n = 13$ este soluţie.

7. *Să se determine inelul $(A, +, \cdot)$ cu $1 \neq 0$, astfel încât $\forall\, x, y \in A$, $x \neq y$, avem $x^2 = y + 1$ sau $y^2 = x + 1$.*

Dana Heuberger

Soluţie. Presupunem că $1 + 1 \neq 0$. Punând $x = 2$ şi $y = 0$ în ipoteză, obţinem $2^2 = 1$ sau $0^2 = 3$, deci $3 = 0$.

Pentru $x \in A$, deoarece $x+1 \neq x$, obţinem $(x+1)^2 = x+1$ sau $x^2 = (x+1)+1$, adică
$$x^2 + x = 0 \tag{1}$$
sau
$$x^2 = x + 2. \tag{2}$$
Deoarece $x + 2 \neq x$, obţinem $(x + 2)^2 = x + 1$ sau $x^2 = (x + 2) + 1$ adică, folosind faptul că $3 = 0$, obţinem:
$$x^2 = 0 \tag{3}$$
sau
$$x^2 = x. \tag{4}$$

Fie $x \in A \backslash \{0\}$. Dacă sunt adevărate relaţiile (1) şi (3), atunci $x = 0$, fals. Dacă sunt adevărate relaţiile (1) şi (4), atunci $2x = 0 \Leftrightarrow 3x = x \Leftrightarrow x = 0$, fals. Dacă sunt adevărate relaţiile (2) şi (3), atunci $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, deci A are două elemente, adică $1+1 = 0$, fals. Dacă sunt adevărate relaţiile (2) şi (4), atunci $x = x+2 \Leftrightarrow 2 = 0$, fals.
Aşadar presupunerea făcută este falsă, deci $1 + 1 = 0$. În aceste condiţii, din relaţiile (1) şi (2) deducem că
$$\forall x \in A,\ x^2 = x. \tag{5}$$
Folosind relaţia precedentă şi ipoteza, deducem că pentru $x, y \in A$, $x \neq y$, avem
$$x = x^2 = y + 1 \Leftrightarrow x + 1 = y + 2 \Leftrightarrow y = x + 1$$
sau
$$y = y^2 = x + 1.$$
Aşadar, $\forall x, y \in A$, $x \neq y$, $y = x + 1$. Obţinem că pentru $x = 0$ şi $y \in A\backslash\{0\}$, $y = 0 + 1$.

Aşadar, A are două elemente, deci $A = \{0, 1\}$.

8. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi polinomul $f = a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, $a_n \neq 0$. Să se arate că dacă $|f(\varepsilon)| \leq |a_n|$, unde ε este o rădăcină de ordinul n a unităţii, atunci f are cel puţin o rădăcină de modul cel mult doi.*

Nicolae Muşuroia

Soluţie. $f = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile lui f. Din $|f(\varepsilon)| \leq |a_n|$, obţinem
$$|\varepsilon - x_1| \cdot |\varepsilon - x_2| \ldots |\varepsilon - x_n| \leq 1.$$
Atunci, cel puţin unul din numerele $|\varepsilon - x_1|, |\varepsilon - x_2|, \ldots, |\varepsilon - x_n|$ este subunitar.

Fie $|\varepsilon - x_1| \leq 1$. Atunci
$$|x_1| = |x_1 - \varepsilon + \varepsilon| \leq |x_1 - \varepsilon| + |\varepsilon| \leq 1 + 1 = 2.$$

9. *Să se arate că dacă $a > 0$ şi $m \in (-a, a)$, atunci:*

$$-a < \frac{a^2(x+y) + m(a^2+xy)}{a^2+xy+m(x+y)} < a, \quad \forall\, x, y \in (-a, a).$$

Nicolae Muşuroia

Soluţie. Arătăm că $x * y = \dfrac{x+y}{1+\frac{1}{a^2}\,xy}$ este lege de compoziţie internă pe mulţimea $H = (-a, a)$.

Din $x, y \in H$ rezultă $|x| < a$, $|y| < a$, deci $|xy| < a^2$. Atunci $1 + \dfrac{1}{a^2}xy > 0$. Se verifică prin calcul că $x * y > -a$ şi $x * y < a$.
Avem $x * y \in (-a, a)$ şi $m \in (-a, a)$, rezultă $(x * y) * m \in (-a, a)$. Obţinem:

$$-a < \frac{a^2(x+y) + m(a^2+xy)}{a^2+xy+m} < a;\ \forall\, x, y, m \in (-a, a).$$

10. *Să se arate că* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\sin x) + \cos(\cos x))dx > \frac{16}{9}$.

Horia Zlamparet

Soluţie. Vom arăta că: $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ şi $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$ pentru $\forall\, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Pentru $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ avem $\sin x < x$, deci $\sin(\cos x) < \cos x$. Cum funcţia cosinus este descrescătoare pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x)$. Înlocuind în această inegalitate pe $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ cu $\dfrac{\pi}{2} - x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\sin\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right) < \cos\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right)$, adică $\sin(\sin x) < \cos(\cos x)$.
Folosind cele 2 inegalităţi, obţinem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(\sin x) + \cos(\cos x)]dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(\cos x) + \sin(\sin x)]dx >$$
$$> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{6}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{6}\right) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1-\sin^2 x}{6}\right) \cos x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1-\cos^2 x}{6}\right) \sin x\, dx$$
$$= 2\int_0^1 \frac{5+t^2}{6}\, dt = 2\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{18}\right) = 2 \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{9}.$$

11. *Să se calculeze:* $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{x^4+x^2+1} dx.$

Crina Petruţiu

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $\frac{1}{x} = t$, integrala din enunţ se poate scrie sub forma:

$$I = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}^{\frac{1}{\sqrt{2}+1}} \frac{\frac{1}{t}\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}-1}\right)}{\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}+1} \cdot \frac{1}{t^2}\, dt = -\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}{t^4+t^2+1}\, dt$$

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{-(x-1)}\right)}{x^4+x^2+1}\, dx = -I,$$

deci $I = 0$.

12. *Aflaţi primitivele funcţiei:*

$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x(\ln 2 \cdot \operatorname{ctg}^{1006} x - 1006 \cdot \operatorname{ctg}^{1005} x - 1006 \cdot \operatorname{ctg}^{1007} x).$

Cristina Ocean

Soluţie. Funcţia f are primitive pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fiind continuă. Avem:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x \left(\ln 2 \cdot \operatorname{ctg}^{1006} x - 1006 \operatorname{ctg}^{1005} x - 1006 \operatorname{ctg}^{1007} x\right) \\ &= 2^x \left(\ln 2 \cdot \operatorname{ctg}^{1006} x - 1006 \operatorname{ctg}^{1005} x(1+\operatorname{ctg}^2 x)\right) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int 2^x \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{ctg}^{1006} x\, dx + 1006 \int (\operatorname{ctg} x)' \operatorname{ctg}^{1005} x \cdot 2^x dx \\ &= \int 2^x \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{ctg}^{1006} x\, dx + \int (\operatorname{ctg}^{1006} x)' 2^x dx \\ &= \operatorname{ctg}^{1006} x \cdot 2^x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

13. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă, cu proprietatea că graficul său este simetric faţă de dreapta de ecuaţie $x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că*

$$\int f'(x)(e^{f(2a-x)} + 2f(2a-x))dx = f^2(x) + e^{f(x)} + \mathcal{C}.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este simetric faţă de dreapta $x = a$, $a \in \mathbb{R}$, dacă şi numai dacă $f(2a - x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Atunci avem:

$$\int f'(x)\left(e^{f(2a-x)} + 2f(2a-x)\right)dx = \int f'(x)\left(e^{f(x)} + 2f(x)\right)dx$$
$$= e^{f(x)} + f^2(x) + \mathcal{C}.$$

14. *Se consideră funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{x+1} + e^{x+e^x}$.

a) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$;

b) Dacă F este o primitivă a lui f care se anulează în $x = 0$, atunci determinaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot F\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ionel Tudor, Giurgiu

Soluţie. a) Funcţia f fiind continuă va admite primitive. Avem:

$$\int f(x)dx = \int e \cdot x \cdot e^x dx + \int e^x \cdot e^{e^x} dx = e\int (e^x)' x\, dx + \int (e^{e^x})' dx$$
$$= e(e^x \cdot x - e^x) + e^{e^x} + \mathcal{C} = F_k(x) + \mathcal{C},$$

unde $F_k(x) = e^{x+1} \cdot x - e^{x+1} + e^{e^x} + k$, $k \in \mathbb{R}$. Aplicând formula lui Leibniz-Newton obţinem:

$$\int_0^1 f(x)dx = F_k(1) - F_k(0) = e^e.$$

b) Avem:

$$\lim_{n\to\infty} nF\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{F(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = e.$$

15. *Notăm cu M mulţimea funcţiilor $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ derivabile, cu proprietatea ca* $f'(x) \cdot f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$, *oricare ar fi* $x \in [2, \infty)$.

Demonstraţi că:

a) Mulţimea M este nevidă.

b) Mulţimea M conţine cel puţin o funcţie concavă.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Fie

$$F(x) = \int_2^x \frac{2t}{1+e^t}\,dt > 0, \quad x \in [2, \infty).$$

Avem

$$(f^2(x))' = \frac{2x}{1+e^x},$$

deci putem alege $f(x) = \sqrt{F(x)}$ astfel încât $f \in M$, deci M este nevidă.
Prin derivarea relaţiei date, obţinem

$$f''f + (f')^2 = \frac{1 - e^x(x-1)}{2e^x + e^{2x} + 1} < 0, \quad \text{pentru } x \geq 2,$$

deci $f''f < 0$. Cum $f = \sqrt{F} > 0$, rezultă că $f'' < 0$, deci f este concavă.

Argument 15

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{N}^3$ ecuaţia

$$(x+2y)^2 + 5x + 6y + 4 = z^2.$$

Gheorghe Boroica

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia

$$2^x + 3^x + 6^x = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3.$$

Gheorghe Boroica

3. Să se determine cel mai mic număr real a, ştiind că

$$15xy + 10xz + 6yz \leq a\,xyz,$$

pentru orice numere prime distincte x, y, z.

Gheorghe Boroica

4. Numărul $N = 100\ldots001$ are 2013 zerouri. Demonstraţi că N^2 se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule.

Cristinel Mortici, Târgovişte

5. Numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfac relaţia

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-z)^2 + (y-z)^2} = \sqrt{2}.$$

Aflaţi $x + y$ şi z.

Cristinel Mortici, Târgovişte

6. Să se rezolve ecuaţia $\left[\sqrt{x}\right] + \sqrt{[x]} = 2\sqrt{x}$.
(Am notat cu $[\alpha]$ partea întreagă a numărului real α).

Dana Heuberger

7. Fie X o mulţime cu $|X| = n \geq 4$ şi funcţia $f : X \to X$.

a) Să se determine f, dacă există $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, astfel încât $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$ cu $|A| = k$, avem $f(A) = A$.

b) Să se demonstreze că nu există f astfel încât $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(X)$, cu $A \cap B = \emptyset$ şi $|A| = |B| = 2$, să avem $f(A) = B$ sau $f(B) = A$.

Dana Heuberger

8. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu proprietatea $x + y + z = 2013$.

a) Să se arate că $\sqrt{2013x + yz} \leq \dfrac{2x + y + z}{2}$.

b) Să se arate că

$$\frac{1}{\sqrt{2013x + yz}} + \frac{1}{\sqrt{2013y + xz}} + \frac{1}{\sqrt{2013z + xy}} \geq \frac{3}{1342}\,.$$

Florin Bojor şi Adrian Pop

9. Fie n un număr natural nenul fixat. Să se determine numerele pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ştiind că $x_1 + 2 \cdot x_2 + \cdots + n \cdot x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ şi $x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n \leq n$.

Meda Bojor

10. Se consideră triunghiul ABC şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Notăm cu A_2, B_2, C_2 intersecţiile segmentelor (AA_1), (BB_1), (CC_1) cu cercul înscris în triunghi. Să se arate că $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă triunghiul $A_1B_1C_1$ are laturile paralele şi proporţionale cu laturile triunghiului ABC.

Florin Bojor

11. Să se determine rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$(x^2 - 2x) \cdot (x^2 - x - 6) \cdot (x^2 - 3x - 4) + 36 = 0.$$

Ludovic Longaver

12. Fie $a, b \in [0, \pi]$. Să se afle valoarea minimă şi valoarea maximă a expresiei

$$E(a, b) = 7 - \cos(2a) + 4\cos(2b) - 8\sin a \cdot \cos b - 5\sin a + 10\cos b.$$

Ludovic Longaver

13. Arătaţi că, dacă $x, y, z > 0$, atunci
$$\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}\geq 2(x+y+z).$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

14. Arătaţi că, dacă $x, y, z > 0$, atunci
$$\frac{a}{x+y}+\frac{b}{y+z}+\frac{c}{z+x}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{a+c}{x}+\frac{a+b}{y}+\frac{c+b}{z}\right).$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

15. Să se arate că dacă $x, y, z > 0$, atunci
$$2xyz+3(x^2+y^2+z^2)+27\geq 6(xy+yz+zx).$$

Gheorghe Boroica

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuaţia $\left[\sqrt{\left[\sqrt{x}\right]}\right]+\sqrt[4]{[x]}=2\sqrt[4]{x}$.
(Am notat cu $[\alpha]$ partea întreagă a numărului real α).

Dana Heuberger

2. Se consideră funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = g(h(x)) = -x$.

a) Să se demonstreze că $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) + h(-x) = 0$.

b) Să se arate că există o infinitate de funcţii nemonotone f, g, h care verifică relaţia din enunţ.

Dana Heuberger

3. Fie $p \geq 2$ un număr natural fixat. Să se rezolve ecuaţia
$$x\left(1+2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}+\cdots+p^{\frac{1}{x}}\right)+\frac{1}{x}(1+2^x+3^x+\cdots+p^x)=p(p+1).$$

Adrian Pop

4. Să se afle minimul expresiei

$$E = \log_6^3(2x + 3y + 1) + \log_6^3(2y + 3z + 1) + \log_6^3(2z + 3x + 1),$$

ştiind că $x, y, z > 0$ şi $x \cdot y \cdot z = 1$.

Gheorghe Boroica

5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve ecuaţia

$$2^{ax^2-2ax+3} + (x-1)^2 = 4,$$

ştiind că aceasta are o unică soluţie reală.

Gheorghe Boroica

6. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z| = r$. Să se afle minimul expresiei

$$E(z) = \sqrt{r - Re\, z} + \sqrt{r + Im\, z}\,.$$

Gheorghe Boroica

7. Se consideră tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ şi care nu are feţele perpendiculare. Notăm: $S_1 = S_{[A_2A_3A_4]}$, $S_2 = S_{[A_1A_3A_4]}$, $S_3 = S_{[A_1A_2A_4]}$, $S_4 = S_{[A_1A_2A_3]}$; α_{ij} = unghiul dintre feţele tetraedrului de arie S_i şi S_j, $i, j = \overline{1,4}$, $i \neq j$.

Să se arate că

$$\sum_{1 \le i < j \le 4} \frac{S_i + S_j}{\cos \alpha_{ij}} \ge 9S,$$

unde S reprezintă aria totală a tetraedrului.

Nicolae Muşuroia

8. Fie M un punct în interiorul tetraedrului $ABCD$. Notăm cu $d_a = d(M, (BCD))$ şi cu $h_a = d(A, (BCD))$. Să se arate că

$$\sum \left(\frac{d_a}{h_a} + \frac{h_a}{d_a} \right) \ge 17.$$

Nicolae Muşuroia

9. a) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} - [x]$ este bijectivă.

b) Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x + 2 = 2[\operatorname{tg} x] + \sqrt{3}.$$

Ludovic Longaver

10. Să se rezolve ecuaţia

$$\{\log_{27} x\} + \{\log_{27}(3x)\} + \{\log_{27}(9x)\} = 3\log_{27} x - 2.$$

Ludovic Longaver

11. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\widehat{A}) = 60^\circ$. Să se arate că

$$AC + BD \geq \frac{\sqrt{3}+1}{2}(AB + AD).$$

Gheorghe Râmbu

12. Fie patrulaterul convex $ABCD$ şi $\{O\} = AC \cap BD$. Pe planul patrulaterului se ridică o perpendiculară în punctul O şi pe care se ia un punct V. Considerând un punct $M \in (VO)$, să se arate că

$$V_{[VMAB]} = V_{[VMAD]} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{[ABC]} = \mathcal{A}_{[ADC]}.$$

Gheorghe Râmbu

13. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\left[\frac{2^a}{\{2^a\}}\right] = 2.$$

Ludovic Longaver

14. Să se determine numerele $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt[3]{a_3} + \cdots + \sqrt[n]{a_n} = \frac{n \sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nicolae Muşuroia

15. Fie M, N, P, Q puncte coplanare situate pe muchiile (AB), (BC), (CD), (DA) ale tetraedrului $ABCD$. Să se arate că

$$MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM \geq$$
$$\geq 16 \cdot AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ \sin\frac{\widehat{ABC}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{BCD}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{CDA}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{DAB}}{2}.$$

Nicolae Muşuroia

Argument 15

Clasa a XI-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, iar $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcţie surjectivă şi continuă. Demonstraţi că cel puţin una din mulţimile $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) = x\}$, $B = \{x \in [a, b] \mid f(x) = a + b - x\}$, are cardinalul mai mare sau egal cu 2.

Cristian Heuberger

2. Fie $\alpha \in (0, 1]$. Demonstraţi că:
a) există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_0$, există şi este unic $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, cu proprietatea că $\sin^n x_n + \cos^n x_n = \alpha$;
b) şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi calculaţi limita lui.

Cristian Heuberger

3. Se consideră şirurile de numere strict pozitive $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{1 + a_n}$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l > 0$, să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita acestuia.

Dana Heuberger

4. Fie $0 < m < M$ şi $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu proprietatea $m < a_n < M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + a}{x_n^2}$, $\forall\, n \geq 0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Florin Bojor

5. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii şi $x_0 \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $k > 0$ şi o vecinătate V a lui x_0, astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq k|g(x) - g(y)|$, $\forall\, x, y \in V$. Dacă funcţia g are limita finită în x_0, să se demonstreze că funcţia f are limită finită în x_0.

Meda şi Florin Bojor

6. Fie n un număr natural nenul şi p, q două numere prime distincte.
a) Să se dea un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ cu proprietatea că matricea $p \cdot A + q \cdot I_n$ nu este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.
b) Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, atunci matricea $p \cdot A + q \cdot I_n$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Gheorghe Boroica

7. Fie n un număr natural nenul şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 - A + a \cdot I_n = \mathcal{O}_n$, unde $a \in \mathbb{C}^*$.

i) Să se arate că A este inversabilă.

ii) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_n \in \mathbb{C}$, astfel încât

$$A^n + a^n \cdot A^{-n} = x_n \cdot I_n$$

şi apoi stabiliţi relaţiile $x_{2n} = x_n^2 - 2a^n$ şi $x_{3n} = x_n^3 - 3a^n \cdot x_n$.

Gheorghe Boroica

8. Arătaţi că, dacă $A_1A_2\ldots A_n$ este un poligon convex, atunci are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\cos\frac{A_1}{2}} + \sqrt{\cos\frac{A_2}{2}} + \cdots + \sqrt{\cos\frac{A_n}{2}} \leq n\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}}\,.$$

Adrian Pop

9. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $Tr(A) = \det(A) = 1$. Să se calculeze

$$\det(A - I_2) \cdot \det(A - \varepsilon \cdot I_2) \cdot \det(A - \varepsilon^2 \cdot I_2),$$

unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Marian Cârstea, Râmnicu Vâlcea

10. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, iar $a, b \in \mathbb{R}$.

Să se arate că, dacă şirurile de termen general $y_n = \sqrt{x_n} \cdot \sin x_n + a$ şi $z_n = \sqrt{x_n} \cdot \cos x_n + b$ sunt convergente, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Marian Cârstea, Râmnicu Vâlcea

11. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 2$, $a_2 = 12$ şi $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} + 4 \cdot a_n$, $n \geq 1$. Să se cerceteze existenţa limitei pentru şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \cos\left(\dfrac{a_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right)$.

Ludovic Longaver

12. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2n-3} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2n-5} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{1}$.

a) Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$;

b) Să se arate că şirul $\left(n \cdot a_n - \ln\left(2 \cdot \sqrt{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

Ludovic Longaver

13. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{pmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se arate că

$$\det(A) = (c-a)^2(c-b)^2(b-a)^2.$$

Ludovic Longaver

14. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 + 2A^2 = \mathcal{O}_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este fixat.
Să se arate că, dacă matricea $I_n - A$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, atunci $\det(A^2 + 3A + 3I_n) = 3^n$.

Gheorghe Boroica

15. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sum\limits_{1\le i<j\le n} \frac{1}{\sqrt{ij}}}.$$

Nicolae Muşuroia

Clasa a XII-a

1. Calculând în două moduri integrala $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^{2n-1}dx$, deduceţi identitatea

$$1 + \frac{C_{2n-1}^1}{2} + \frac{C_{2n-1}^2}{3} + \dots + \frac{C_{2n-1}^{2n-1}}{2n} = \frac{4^n - 1}{2n},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

2. Să se determine numărul elementelor grupului $(G, \cdot)$ care au proprietatea că

$$\forall\, x, y \in G \backslash \{e\} \text{ cu } x \neq y,\ x \cdot y \cdot x = y \cdot x^{2013} \cdot y.$$

Dana Heuberger

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu n elemente şi cu elementul neutru e. Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea $(\mathcal{P})$, dacă este un subgrup propriu al lui G şi $\forall\, x, y \in G \backslash H \Rightarrow xy \in H$.

a) Dacă există subgrupurile distincte H_1 şi H_2 ale lui G, care au proprietatea $(\mathcal{P})$ şi $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, să se arate că grupul G este izomorf cu grupul lui Klein.

b) Să se demonstreze că, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ are cel mult un subgrup cu proprietatea $(\mathcal{P})$.

Dana Heuberger

4. Se consideră polinomul $f = (X^2 + X + 1)^n - X$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Calculaţi suma $S = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{x_k}$.

Dan Bărbosu

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi pară. Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x(f(x) - x)}{1 + x^2}\, dx.$$

Dan Bărbosu

6. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \displaystyle\int_0^1 x^n \cdot \cos(x^n) dx$.

Dan Bărbosu

7. Să se determine toate funcţiile $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ primitivabile şi cu proprietatea că există $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o primitivă pentru f, astfel încât

$$f(x) = \frac{2F(x)}{x} + \frac{x^4}{F(x)}, \quad \forall\, x > 0.$$

Gheorghe Boroica

8. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Să se arate că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $1 < f(c) < \dfrac{1}{c}$.

Gheorghe Boroica

9. Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 e^{2\arcsin\sqrt{x}}dx \cdot \int_0^1 e^{2\arcsin\sqrt{1-x}}dx \geq e^{\pi}$.

Nicolae Muşuroia

10. Fie $f : [0,1] \to [0,\infty)$ o funcţie continuă. Să se arate că

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \sqrt{f(t)}dt\right) dx \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\int_0^1 f(x)dx}\,.$$

Nicolae Muşuroia

11. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_0^1 f(t\cdot x)dt \cdot \int_0^1 f(a\cdot t\cdot x)dt = e^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Nicolae Muşuroia

12. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\{n\}}{x^2+[x]^2}\,dx$, este convergent.

Ludovic Longaver

13. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, neinjectivă şi $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = (x-a)\int_x^b f(t)dt + (x-b)\int_a^x f(t)dt.$$

Să se arate că există $c \in (a,b)$ pentru care $F''(c) = 0$.

Ludovic Longaver

14. Să se calculeze integrala

$$I = \int x \cdot \mathrm{tg}(2x^2+a)\cdot \mathrm{tg}(3x^2+a)\cdot \mathrm{tg}(5x^2+a)dx,$$

pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi x dintr-un interval I convenabil ales.

Gheorghe Boroica

15. Fie $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie derivabilă cu $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [0,\infty)$.
Să se arate că

$$\int_0^{x^2} t\cdot f^2\left(\sqrt{t}\right) dt \geq 2\left(\int_0^x t\cdot f(t)dt\right)^2.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Argument 15

Eratӑ

- La problema 4, clasa a IX-a, relaţia $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$, devine $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$.

Sumar