*Revistă de matematică editată de Catedra de matematică*
*a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare*

Municipiul **Baia Mare**



Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana_heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *http://www.sincaibm.ro/*



**ISSN 1582– 3660**

# Utilizarea identităţilor pentru obţinerea de inegalităţi

**Gheorghe Boroica**

**Abstract.** In this article we shall present several inequalities which are based upon certain identities.

În cadrul concursurilor de matematică, inegalităţile au un rol bine definit dacă nu chiar privilegiat. Există o gamă variată de inegalităţi propuse la diferite concursuri, de aceea, a şti să abordezi astfel de probleme reprezintă o particularitate obligatorie a oricărui aspirant la astfel de concursuri.

În cele ce urmează, se vor prezenta prin exemple o serie de inegalităţi ce au la bază anumite identităţi. Pe parcursul acestei prezentări o să folosim următoarele identităţi:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \ x \in \mathbb{R}$;

2) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x,\ x \in D$;

3) $A, B \in M_2(C) \Rightarrow \det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det A + \det B)$;

4) Dacă $f$ este un polinom având coeficienţii complecşi, unde
$$f = (X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n),$$
atunci avem că
$$f(ix)f(-ix) = (X^2+a_1^2)(X^2+a_2^2)\dots(X^2+a_n^2);$$

5) $(z-z_1)(z_2-z_3) + (z-z_2)(z_3-z_1) + (z-z_3)(z_1-z_2) = 0$;

6) $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x),\ \ x, y, z \in C$;

7) $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(z-y) = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$, $x, y, z \in C$;

8) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right),\ \ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

9) $|\vec{v}_1+\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_1-\vec{v}_2|^2 = 2(|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2)$, $\forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ doi vectori din plan.

*Observaţia* 1. Este evident faptul că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a+b=2c$, atunci unul din cele două numere este mai mic sau egal decât $c$, iar celălalt mai mare sau egal decât $c$.

O gamă interesantă, dar dificilă, de inegalităţi o reprezintă cele care rezultă din identităţi. Dacă acestea se combină cu anumite inegalităţi celebre, atunci soluţia este şi mai greu de descoperit. Prezentăm în continuare câteva probleme care să pună în evidenţă acest lucru.

**1.** *Fie* $a, b, c, d > 0$ *astfel încât*

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

*Să se arate că* $abcd \geq 3$.

**Soluţie.** Din ipoteză deducem că există numerele strict pozitive $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aşa încât

$$a^2 = \operatorname{tg}\alpha,\ b^2 = \operatorname{tg}\beta,\ c^2 = \operatorname{tg}\gamma,\ d^2 = \operatorname{tg}\delta.$$

Relaţia din ipoteză se scrie

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1.$$

Folosind acum identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$ şi inegalitatea mediilor, avem că

$$\sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta \geq 3(\cos\beta\cos\gamma\cos\delta)^{\frac{2}{3}}$$

şi analoagele. Făcând produsul inegalităţilor anterioare, obţinem că

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \geq 3\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\delta.$$

Atunci $abcd = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\delta} \geq 3$.

**2.** *Să se arate că dacă suma pătratelor numerelor reale* $a, b, c, d$ *este cel mult* 1*, atunci avem inegalitatea*

$$ab + bc + cd + da + ac + bd \leq 1,25 + 4abcd.$$

(*Gabriel Dospinescu*)

**Soluţie.** Deoarece avem sume simetrice în problemă, probabil este indicat să avem şi polinoame. Să considerăm deci polinomul:

$$\begin{aligned} f &= (X-a)(X-b)(X-c)(X-d) \\ &= X^4 - \left(\sum a\right)X^3 + \left(\sum ab\right)X^2 - \left(\sum abc\right)X + abcd. \end{aligned}$$

În ipoteză se vorbeşte despre o sumă de pătrate, de aceea vom calcula $f(ix)$, $x \in \mathbb{R}$, cu scopul de a pune în evidenţă o sumă de pătrate. Avem:

$$\begin{aligned} \prod(x^2+a^2) = |f(ix)|^2 &= |x^4 + ix^3\sum a - x^2\sum ab - ix\sum abc + abcd|^2 \\ &= |x^4 - x^2\sum ab + abcd|^2 + |x^3\sum a - x\sum abc|^2. \end{aligned}$$

Luând acum $x = \dfrac{1}{2}$ în identitatea anterioară şi eliminând ultimul termen, obţinem

$$\prod\left(a^2+\frac{1}{4}\right) \geq \left(\frac{1}{16}-\frac{\sum ab}{4}+abcd\right)^2.$$

Cu inegalitatea mediilor, avem:

$$\prod\left(a^2+\frac{1}{4}\right) \leq \left(\frac{\sum\left(a^2+\frac{1}{4}\right)}{4}\right)^4 \leq \frac{1}{16}.$$

Atunci deducem că

$$\left|\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\sum ab+abcd\right| \leq \frac{1}{4},$$

de unde rezultă concluzia problemei.

**3.** *Fie $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, unde $a, b, c, d \in\ C$, $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$. Demonstraţi că există $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ astfel încât $|P(z)| \geq \sqrt{6}$.*

(*A.M.M. Problema* 4426)

**Soluţie.** Avem că

$$|P(z)|^2 = P(z)\overline{P(z)} = 4 + 2\,Re(a\overline{d}z^3 + (a\overline{c} + b\overline{d})z^2 + (a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{d})z).$$

Dacă

$$Q(z) = (a\overline{d}z^3) + (a\overline{c} + b\overline{d})z^2 + (a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{d})z),$$

atunci $|p(z)|^2 = 4 + 2Re\,Q(z)$.

Considerând rădăcinile $l, \varepsilon, \varepsilon^2$ de ordinul trei ale unităţii, vom obţine:

$$Q(z) + Q(\varepsilon z) + Q(\varepsilon^2 z) = 3a\overline{d}z^3.$$

Luând $z$ în această egalitate, aşa încât $z^3 = \overline{a}d$ (acest număr are modulul egal cu 1), obţinem că

$$Q(z) + Q(\varepsilon z) + Q(\varepsilon^2 z) = 3.$$

Pentru $z$ astfel ales, se obţine:

$$|p(z)|^2 + |p(\varepsilon z)|^2 + |p(\varepsilon^2 z)|^2 = 18.$$

Atunci cel puţin unul din aceste trei numere este mai mare sau egal decât 6, de unde se obţine concluzia.

**4.** *Dacă $A, B, C, D$ sunt patru puncte arbitrare din plan, atunci avem inegalitatea: $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$.*

(*Inegalitatea lui Ptolemeu*)

**Indicaţie**. Se foloseşte identitatea

$$(z-z_1)(z_2-z_3)+(z-z_2)(z_3-z_1)+(z-z_3)(z_1-z_2)=0$$

şi inegalitatea modulului, luând $(Az)$, $B(z_1)$, $C(z_2)$ şi $D(z_3)$.

**5.** *Să se arate că dacă $M$ este un punct în planul triunghiului $ABC$, atunci avem:*

$$AM^2\sin A+BM^2\sin B+CM^2\sin C\geq 2S_{ABC}.$$

**Indicaţie**. Se foloseşte identitatea

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x),\ x,y,z\in\mathbb{C}.$$

**6.** *Să se arate că dacă $M$ este un punct în planul triunghiului $ABC$ şi $G$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC$, atunci avem:*

$$AM^3BC+BM^3AC+CM^3AB\geq 3AB\cdot BC\cdot CA\cdot MG.$$

(*M. Chiriţă*)

**Indicaţie**. Se utilizează identitatea:

$$\begin{gathered}x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(z-y)\\=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z),\quad x,y,z\in\mathbb{C}.\end{gathered}$$

**7.** *Să se arate că dacă $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}\geq 2$ sunt vectori în plan, de modul mai mic sau egal cu 1, atunci există o alegere a semnelor $+,-$, astfel ca*

$$|\overrightarrow{v_1}\pm\overrightarrow{v_2}\pm\cdots\pm\overrightarrow{v_n}|\leq\sqrt{2}.$$

**Indicaţie**. Dacă $n=2$ atunci, din identitatea 9), rezultă că $|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}|^2\leq 2$ sau $|\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}|^2\leq 2$, de unde se obţine concluzia. În continuare se foloseşte metoda inducţiei matematice.

**8.** *Să se arate că pentru $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, A_1,A_2,\dots,A_n\in M_2(\mathbb{R})$, există o alegere a semnelor $+$ şi $-$ astfel încât*

$$\det(A_1\pm A_2\pm\cdots\pm A_n)\leq\det(A_1)+\det(A_2)+\cdots+\det(A_n).$$

**Indicaţie**. Pentru $n=2$ se foloseşte identitatea de la 3) şi apoi metoda inducţiei matematice.

**Observaţia 2**. Utilizând aceeaşi identitate, se poate arăta că există o alegere a semnelor $+$, $-$, astfel încât identitatea anterioară să fie de forma

$$\det(A_1\pm A_2\pm\cdots\pm A_n)\geq\det(A_1)+\det(A_2)+\cdots+\det(A_n).$$

**9.** *Fie $a, b, c, d > 0$ astfel încât*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = a + b + c + d \quad \text{şi} \quad a \cdot b \cdot c \cdot d = 1.$$

*Să se demonstreze inegalitatea:*

$$\frac{(a+1)^2}{a+b} + \frac{(b+1)^2}{b+c} + \frac{(c+1)^2}{c+a} + \frac{(d+1)^2}{d+a} \leq 2(a+b+c+d).$$

**Soluţie.** Utilizând inegalitatea $(1+x)^2 \leq 2(1+x^2)$ membrului stâng, reducem inegalitatea iniţială la inegalitatea

$$\sum_{ciclică} \frac{a^2+1}{a+b} \leq a+b+c+d. \tag{1}$$

Vom demonstra că (1) reprezintă de fapt chiar o egalitate. Se pune întrebarea firească: cum putem folosi relaţia din ipoteză? Pentru aceasta vom considera scrierea:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)(a+d) &= a^3 + a^2(b+c+d) + abc + abd + acd + bcd \\ &= a^2(a+b+c+d) + a+b+c+d \\ &= (a^2+1)(a+b+c+d).\end{aligned}$$

Atunci avem că $\dfrac{a^2+1}{a+b} = \dfrac{(a+c)(a+d)}{a+b+c+d}$ şi identităţile analoage obţinute prin permutări circulare. Aşadar,

$$\sum_{ciclică} \frac{a^2+1}{a+b} = \sum_{ciclică} \frac{(a+c)(a+d)}{a+b+c+d} = \sum a.$$

Cu aceasta, inegalitatea (1) este stabilită şi atunci inegalitatea cerută este demonstrată.

**Probleme propuse**.

**1.** *a) Să se arate că dacă $x, y, z$ sunt numere complexe distincte, atunci avem:*

$$\frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{zx}{(y-z)(y-x)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)} = 1.$$

*b) Fie $P$ un punct în planul triunghiului $ABC$. Să se arate că*

$$a \cdot PB \cdot PC + b \cdot PC \cdot PA + c \cdot PA \cdot PB \leq abc,$$

*unde $a, b, c$ sunt lungimile laturilor triunghiului $ABC$.*

**2.** *Să se arate că pentru* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, $\exists\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ *astfel încât:*

$$|a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_n z_n|^2 \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2.$$

## Bibliografie


[1] *Bacalaureat 2008 - Matematica*, Ed. Books Unlimited Publishing
[2] Andronache M., *Matematica*, Grup Editorial Art
[3] American Mathematical Monthly, problema 4426
[44 Math Problem Book I, 2011


*Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare*

# Asupra unor reţele de puncte

**Dana Heuberger**

**Abstract**. The purpose of this paper is to solve some countability problems using the tool of injective functions.

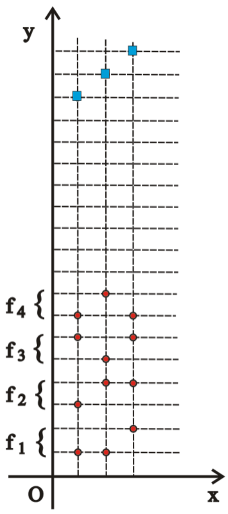
În această notă vom prezenta o metodă de rezolvare a unor probleme de numărare în care apar reţele de puncte, care este bazată pe tehnica funcţiilor injective.

**Definiţia 1**. Pentru $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $k \geq 2$ considerăm, în planul înzestrat cu reperul cartezian $xOy$, o reţea formată din toate punctele cu abscisele în mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ şi ordonatele în mulţimea $\{1, 2, \ldots, 2k\}$. Notăm cu $A_{i,j}$ punctul de coordonate $(i, j)$ al reţelei. Spunem că alegem o **configuraţie** în reţea, dacă pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi fiecare $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ selectăm unul singur dintre punctele $A_{i,2t-1}$ şi $A_{i,2t}$, pe care îl notăm cu $B_{i,t}$ şi pentru orice $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $p \neq t$, există $m, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât

$$y_{B_{m,t}} - y_{B_{m,p}} \neq y_{B_{j,t}} - y_{B_{j,p}} \qquad (1)$$

**Problema 1**. *În condiţiile din definiţia 1, pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, considerăm punctele $B_i$ care au abscisa egală cu $i$ şi ordonata egală cu suma ordonatelor punctelor de abscisă $i$ ale configuraţiei. Să se determine valorile lui $k$ pentru care sunt posibile alegeri ale configuraţiilor, astfel încât toate punctele $B_1, B_2, \ldots B_n$ să aibă ordonatele diferite.*

**Soluţie**.




Un exemplu de configuraţie convenabilă este cel din figura următoare, pentru $n = 3$ şi $k = 4$.
Scăzând din ordonata lui $B_{i,t}$ numărul $2t - 1$, obţinem un număr din mulţimea $\{0, 1\}$.
În acest fel, putem defini funcţiile

$$f_t : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\},\ f_t(i) = y_{B_{i,t}} - (2t - 1).$$

Pe figură am evidenţiat punctele din care se obţine fiecare funcţie. Condiţia 1 înseamnă că funcţiile sunt distincte.

Evident, dacă avem $k > 2^n$, atunci funcţiile, deci şi configuraţiile de pe unele linii, se repetă şi nu mai este îndeplinită condiţia 1. Aşadar $k \leq 2^n$. Observăm că

$$y_{B_i} - (1 + 3 + \ldots + (2k-1)) = f_1(i) + f_2(i) + \ldots + f_k(i)$$

deci a demonstra că ordonatele punctelor $B_1, B_2, \ldots B_n$ sunt diferite, înseamnă a arăta că funcţia $g_k : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, $g_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$, este injectivă.

Enunţăm aşadar

**Propoziţia 1**. *Se consideră* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ *şi mulţimile* $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ *şi* $\mathcal{F}_n = \{f : A_n \to \{0,\ 1\}\}$. *Sunt adevărate afirmaţiile*:

**a)** *Pentru orice* $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k < n-1$ *sau* $k > 2^n - n + 1$, *nu există funcţiile distincte* $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k \in \mathcal{F}_n$, *astfel încât funcţia* $g_k : A_n \to \mathbb{R}$, $g_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ *să fie injectivă.*

**b)** *Pentru orice* $k \in \{\, n-1,\ n,\ \ldots,\ 2^n - n + 1\,\}$ *există funcţiile distincte* $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k \in \mathcal{F}_n$, *astfel încât funcţia* $g_k : A_n \to \mathbb{R}$, $g_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ *este injectivă.*

Demonstraţia se găseşte în revista [2].

**Observaţia 1**.

**a)** Din demonstraţia propoziţiei rezultă că codomeniul funcţiilor din $\mathcal{F}_n$ poate fi orice mulţime de numere reale cu două elemente.

**b)** Propoziţia anterioară aparţine autoarei acestui articol şi a fost pe lista scurtă pentru Olimpiada Naţională de matematică în anul 2008, fiind publicată apoi în [1].

**Propoziţia 2**. *Se consideră* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ *şi mulţimile* $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ *şi* $\mathcal{F}_n = \{f : A_n \to \{a,\ b\}\}$, *unde* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Sunt adevărate afirmaţiile*:

**a)** *Pentru orice* $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k < n-1$ *sau* $k > 2^n - n + 1$, *nu există funcţiile distincte* $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k \in \mathcal{F}_n$, *astfel încât funcţia* $g_k : A_n \to \mathbb{R}$, $g_k = (f_1 - a + 1) \cdot (f_2 - a + 1) \cdot \ldots \cdot (f_k - a + 1)$ *să fie injectivă.*

**b)** *Pentru orice* $k \in \{\, n-1,\ n,\ \ldots,\ 2^n - n + 1\,\}$ *există funcţiile distincte* $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k \in \mathcal{F}_n$, *astfel încât funcţia*

$$g_k = (f_1 - a + 1) \cdot (f_2 - a + 1) \cdot \ldots \cdot (f_k - a + 1)$$

*este injectivă.*

**Indicaţie**. Se aplică Propoziţia 1 funcţiilor

$$h_t : A_n \to \{0,\ 1\},\ h_t(i) = \log_{b-a+1}(f_t(i) - a + 1).$$

**Observaţia 2.** Dacă $a = 1$, problema revine la studiul injectivităţii funcţiei

$$g_k = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k$$

**Definiţia 2**. Pentru $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $2 \leq k \leq 2^n$ considerăm, în planul înzestrat cu reperul cartezian $xOy$, o reţea formată din toate punctele cu abscisele în mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ şi ordonatele în mulţimea $\left\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2k-1}\right\}$. Notăm cu $A_{i,j}$ punctul de coordonate $(i, j)$ al reţelei. Spunem că alegem o **configuraţie** în reţea, dacă pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi fiecare $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ selectăm unul singur dintre punctele $A_{i,\, 2^{2t-2}}$ şi $A_{i,\, 2^{2t-1}}$, pe care îl notăm cu $B_{i,t}$ şi pentru orice $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $p \neq t$, există $m, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $\frac{y_{B\,m,\,t}}{y_{B\,m,\,p}} \neq \frac{y_{B\,j,\,t}}{y_{B\,j,\,p}}$.

**Problema 2**. *În condiţiile din Definiţia 2, pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, considerăm punctele $B_i$ care au abscisa egală cu $i$ şi ordonata egală cu produsul ordonatelor punctelor de abscisă $i$ ale configuraţiei. Să se determine valorile lui $k$ pentru care sunt posibile alegeri ale configuraţiilor, astfel încât toate punctele $B_1, B_2, \ldots, B_n$ să aibă ordonatele diferite.*

**Indicaţie**. Obţinem $\frac{y_{B_i}}{2^2 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{2k-2}} = f_1(i) \cdot f_2(i) \cdot \ldots \cdot f_k(i) = g_k(i)$, pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $f_t : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1,\ 2\}$, $f_t(i) = \frac{y_{B\,i,\,t}}{2^{2t-2}}$, pentru $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ şi apoi aplicăm Propoziţia 2.

Vom defini acum alte configuraţii, în alte tipuri de reţele de puncte, care conduc la probleme de acelaşi gen, a căror rezolvare o lăsăm pe seama cititorului:

**Definiţia 3**. Pentru $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $k \geq 2$ considerăm, în plan, semidreptele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de origine $O$ şi cercurile $\mathcal{C}(O, j)$, unde $j \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$.

Fie reţeaua formată din punctele $A_{i,j}$, unde $\{A_{i,j}\} = d_i \cap \mathcal{C}(O, j)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$. Spunem că alegem o **configuraţie** în reţea, dacă pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi fiecare $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ selectăm unul singur dintre punctele $A_{i,2t-1}$ şi $A_{i,2t}$, pe care îl notăm cu $B_{i,t}$ şi pentru orice $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $p \neq t$, există $m, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $B_{m,\ t}B_{m,\ p} \neq B_{j,\ t}B_{j\ ,\ p}$.

**Problema 3**. *În condiţiile din definiţia , pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, considerăm punctele $B_i$ astfel încât $\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{OB_{i,\,1}} + \overrightarrow{OB_{i,\,2}} + \ldots + \overrightarrow{OB_{i,\,k}}$. Să se determine valorile lui $k$ pentru care sunt posibile alegeri ale configuraţiilor, astfel încât oricare două dintre punctele $B_1, B_2, \ldots B_n$ să nu fie pe acelaşi cerc de centru $O$.*

**Definiţia 4**. Pentru $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $k \geq 2$ considerăm dreptele necoplanare $d_1, d_2, \ldots, d_n$, concurente în $O$ şi planele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$, care nu îl conţin pe $O$ şi sunt paralele, astfel încât fiecare dintre drepte intersectează $\alpha_1$ şi astfel încât

$$d(O, \alpha_1) = d(\alpha_1, \alpha_2) = \ldots = d(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$$

Fie reţeaua formată din punctele $A_{i,j}$, unde $\{A_{i,j}\} = d_i \cap \alpha_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$. Spunem că alegem o **configuraţie** în reţea, dacă pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi fiecare $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ selectăm unul singur dintre punctele $A_{i,2t-1}$ şi $A_{i,2t}$, pe care îl notăm cu $B_{i,t}$ şi pentru orice $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $p \neq t$, există $m, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât dreptele $B_{m,\,t}B_{j,\,t}$ şi $B_{m,\,p}B_{j,\,p}$ nu sunt paralele.

**Problema 4**. *În condiţiile din definiţia , pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, considerăm punctele $B_i$ astfel încât $\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{OB_{i,\,1}} + \overrightarrow{OB_{i,\,2}} + \ldots + \overrightarrow{OB_{i,\,k}}$. Să se determine valorile lui $k$ pentru care sunt posibile alegeri ale configuraţiilor, astfel încât oricare două dintre punctele $B_1, B_2, \ldots, B_n$ să nu fie într-un plan paralel cu $\alpha_1$.*

Cu acelaşi tip de raţionament ca în cazul Propoziţiei 1, se poate demonstra:

**Propoziţia 3**. *Se consideră* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ *şi mulţimile* $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ *şi* $\mathcal{F}_n = \{f : A_n \to \{-1, 0, 1\}\}$. *Sunt adevărate afirmaţiile*:

**a)** *Pentru orice* $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k < \left[\frac{n}{2}\right]$ *sau* $k > 3^n - \left[\frac{n}{2}\right]$, *nu există funcţiile distincte* $f_1, f_2, \ldots,\ f_k \in \mathcal{F}_n$, *astfel încât funcţia* $g_k : A_n \to \mathbb{R}$, $g_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ *să fie injectivă.*

**b)** *Pentru orice* $k \in \left\{\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \ldots, 3^n - \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ *există funcţiile distincte* $f_1,\ f_2\ ,\ldots,\ f_k \in \mathcal{F}_n$, *astfel încât funcţia* $g_k : A_n \to \mathbb{R}$, $g_k = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ *este injectivă.*

**Demonstraţie**. **a)** Există $3^n$ funcţii în mulţimea $\mathcal{F}_n$. Presupunem că pentru $2 \leq k < \left[\dfrac{n}{2}\right]$ există funcţii $g_k : A_n \to \mathbb{R}$ cu proprietatea din enunţ.

Atunci, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $-\left[\frac{n}{2}\right] < -k \leq g_k(i) \leq k < \left[\frac{n}{2}\right]$. Aşadar pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $g_k(i)$ ia maximum $2k + 1 < n$ valori, deci $g_k$ nu poate fi injectivă, contradicţie.

Presupunem că pentru $k > 3^n - \left[\frac{n}{2}\right]$ există funcţii $g_k : A_n \to \mathbb{R}$ cu proprietatea din enunţ. Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem $3^{n-1}$ funcţii cu $f(i) = -1$, $3^{n-1}$ funcţii cu $f(i) = 0$ şi $3^{n-1}$ funcţii cu $f(i) = 1$, deci funcţia $g_{3^n} : A_n \to \mathbb{R}$, $g_{3^n} = f_1 + f_2 + \ldots + f_{3^n}$, este funcţia nulă. Pentru ca eliminând din $g_{3^n}$ cel mult $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ dintre funcţii, suma rămasă să fie o funcţie injectivă, este necesar ca suma funcţiilor eliminate să fie injectivă, ceea ce este imposibil, conform primei părţi a demonstraţiei.

**b)** Pentru $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, o soluţie este $g_{\left[\frac{n}{2}\right]} : A_n \to \mathbb{R}$ , $g_{\left[\frac{n}{2}\right]} = f_1 + f_2 + \ldots + f_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, unde

$$f_t(a) = \begin{cases} -1, & a \leq \left[\frac{n}{2}\right] - t + 1 \\ 0, & a \in \left[\left[\frac{n}{2}\right] - t + 2,\ 2\left[\frac{n}{2}\right] - t + 1\right] \\ 1, & a > 2\left[\frac{n}{2}\right] - t + 1 \end{cases},\ \forall\, t \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}.$$

Observăm că în componenţa unei funcţii $g_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ nu putem avea în acelaşi timp funcţiile nenule $f_k \in \mathcal{F}_n$ şi $-f_k \in \mathcal{F}_n$. Vom demonstra mai mult, şi anume că din orice soluţie $g_{\left[\frac{n}{2}\right]} : A_n \to \mathbb{R}$ a problemei, putem construi o soluţie $g_k : A_n \to \mathbb{R}$ a problemei, cu $k \in \left\{\left[\frac{n}{2}\right] + 1, \left[\frac{n}{2}\right] + 2, \ldots, 3^n - \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$.

De fapt, oricum am alege o soluţie $g_{\left[\frac{n}{2}\right]} : A_n \to \mathbb{R}$ a problemei, printre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ din componenţa acesteia nu putem avea două funcţii opuse.

Într-adevăr, pentru $n \in \{4, 5\}$, ar rezulta că $g_2(i) = 0$, $\forall i \in A_n$, fals, iar pentru $n \geq 6$, aceasta ar implica faptul că am avea o soluţie $g_{\left[\frac{n}{2}\right]-2} : A_n \to \mathbb{R}$ a problemei, ceea ce, conform punctului **a)**, este fals. În plus, printre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ nu există nici una dintre funcţiile $g$, $g'$, $g'' : A_n \to \{-1, 0, 1\}$, cu $g(x) = -1$, $g'(x) = 0$, şi $g''(x) = 1$, $\forall x \in A_n$ (altfel, ar rezulta că, eliminând-o, am avea o soluţie şi pentru $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$, fals).

Pentru $t \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{3^n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$, alegem funcţiile

$$f_{\left[\frac{n}{2}\right]+1},\ -f_{\left[\frac{n}{2}\right]+1},\ f_{\left[\frac{n}{2}\right]+2},\ -f_{\left[\frac{n}{2}\right]+2},\ \ldots,\ f_{\left[\frac{n}{2}\right]+t},\ -f_{\left[\frac{n}{2}\right]+t} : A_n \to \mathbb{R}$$

distincte şi diferite de $f_1, f_2, \ldots, f_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, ultimele alese fiind $g$ şi $g'' = g$, atunci când $t = \left[\frac{3^n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]$. Astfel, pentru $t = \left[\frac{3^n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]$, rămân neselectate complementarele funcţiilor $f_1, f_2, \ldots, f_{\left[\frac{n}{2}\right]}$.
Funcţia $g_{\left[\frac{n}{2}\right]+2t} : A_n \to \mathbb{R}$,

$$g_{\left[\frac{n}{2}\right]+2t} = g_{\left[\frac{n}{2}\right]} + f_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} + \left(-f_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\right) + \ \ldots + f_{\left[\frac{n}{2}\right]+t} + \left(-f_{\left[\frac{n}{2}\right]+t}\right) = g_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

este injectivă. Funcţia $g_{\left[\frac{n}{2}\right]+2t+1} : A_n \to \mathbb{R}$, $g_{\left[\frac{n}{2}\right]+2t+1} = g_{\left[\frac{n}{2}\right]+2t} + g'$, este de asemenea injectivă.

Lăsăm cititorului plăcerea de a găsi alte probleme cu reţele de puncte, folosind Propoziţia 3.

## Bibliografie


[1] Heuberger D., Problema 9, ”Argument”, Revista de matematică, Baia Mare, 11 (2009), No. 1, pag. 120

[2] ”Argument”, Revista de matematică, Baia Mare, 11 (2009), No. 2, pag. 69-70

[3] Pop V., Lupşor V. (colectiv), *Reţele laticeale în plan şi în spaţiu*, Matematică pentru grupele de performanţă, Ed. Dacia Educaţional, Cluj-Napoca (2003), pag. 31-40


*Profesor, Colegiul Naţional ”Gheorghe Şincai”, Baia Mare*

# Asupra unei probleme a lui Gh. Buicliu

**Cristi Niţă**

**Abstract**. This article propounds a new type of solution to a geometric construction problem, belonging to Gheorghe Buicliu.

În Gazeta Matematică 4/1945, Gh. Buicliu propunea următoarea problemă de construcţie geometrică:

*Să se demonstreze că folosind numai rigla, se pot construi oricâte tangente la un cerc dat, atunci când cercul are două tangente construite.*

Problema e "dificilă" deoarece solicită o construcţie geometrică mai complicată, nepermiţând folosirea compasului.

O cale de atac e sugerată de cel mai important element oferit în ipoteză: punctul (punctele) de tangenţă la cerc.

Pornind de la unul dintre aceste puncte de tangenţă date şi considerând încă un punct oarecare de pe cerc (în care ne-am propus să construim o altă tangentă la cerc), observăm că am avea nevoie de mediatoarea coardei ce uneşte cele două puncte de tangenţă.

Astfel, de o parte şi de alta a mediatoarei, care se comportă ca axă de simetrie, vor exista atât tangenta dată în ipoteza problemei cât şi tangenta omoloagă (pe care dorim să o construim).

Dar construcţia mijlocului unui segment (în cazul de faţă a unei coarde), deşi simplă când utilizăm rigla *şi* compasul, devine complicată în cazul folosirii doar a riglei negradate.

Fie $\mathcal{C}(O)$ şi tangentele $AB$ şi $AC$ la cercul $\mathcal{C}(O)$ în punctele $B$ şi $C$.

Fie $D$ ($D \in \mathrm{Int}\Delta ABC$), punctul în care vrem să construim tangenta la cerc.

Fie $B'$ intersecţia dintre $BO$ şi $\mathcal{C}(O)$. Fie $D'$ intersecţia dintre $DO$ şi $\mathcal{C}(O)$.

Atunci va rezulta $BD \| B'D'$ (perechile de puncte $(D, D')$ şi $(B, B')$ fiind diametral opuse).

Fie $E$ intersecţia dintre $AD$ şi $D'B'$. Fie $E'$ intersecţia dintre $AB$ şi $B'D'$. Cum $BD \| B'D' \Rightarrow BD \| EE'$ şi deci $BDEE'$ este trapez.

Fie $M$ intersecţia dintre $BE$ şi $DE'$. Fie $N$ intersecţia dintre $AM$ şi $EE'$.

Aplicând teorema lui Ceva în $\Delta AEE'$, pentru cevienele $AN, BE, DE'$, cu $AN \cap BE \cap DE' = M$, obţinem

$$\frac{NE}{NE'} \cdot \frac{BE'}{BA} \cdot \frac{DA}{DE} = 1.$$

Dar $BD \| B'D' \Rightarrow \dfrac{AB}{BE'} = \dfrac{AD}{ED} \Leftrightarrow \dfrac{E'B \cdot AD}{AB \cdot ED} = 1.$

Aceasta implică (ţinând cont de relaţia precedentă) $\dfrac{EN}{E'N} = 1$, deci $N$ este mijlocul laturii $EE'$.

De aici rezultă că $AN$ va fi mediană şi în $\Delta ABC$.

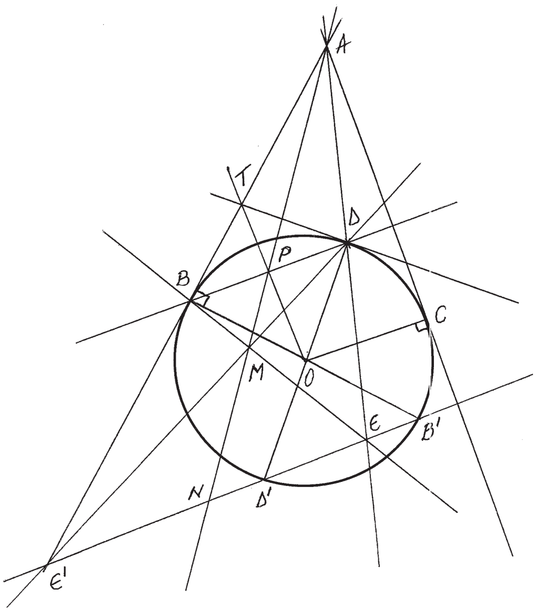



Figura 1

Fie $P$ intersecţia dintre $AN$ şi $BD$. Atunci $BP = PD$. Trasăm dreapta $OP$ care taie pe $AB$ în $T$. Avem de aici $PO \perp BD$ şi $OT$ este mediatoarea segmentului $BD$ (vezi proprietatea razei care trece prin mijlocul unei coarde).

Prin construcţie, $\Delta BOD$ şi $\Delta BTD$ sunt isoscele ($TO$ fiind mediatoare), iar $\Delta TBO \overset{\text{L.L.L.}}{\equiv} \Delta TDO$ ($TO = TO$ (l.c.), $TB = TD$, $BO = DO$) $\Rightarrow \widehat{TBO} = \widehat{TDO} = 90^\circ$, aşadar $TD$ este tangenta la $\mathcal{C}(O)$ în $D$.

Fie $D \in \text{Ext}\Delta ABC$, $D \in \mathcal{C}(O)$. Trasăm $DC$.

Trasăm $CO$ şi notăm cu $E$ intersecţia dintre $CO$ şi $\mathcal{C}(O)$. Trasăm $DO$ şi notăm cu $E'$ intersecţia dintre $DO$ şi $\mathcal{C}(O)$.

Va rezulta (ca şi în cazul figurii 1) $CD \| EE'$.

Notăm cu $F$ intersecţia dintre $EE'$ şi $AC$.

În trapezul $EFC$ ($EF(= EE') \| CD$) notăm cu $M$ intersecţia diagonalelor $FD$ şi $EC$. Notăm cu $N$ intersecţia dintre $ED$ şi $FC$.

Cum am văzut în rezolvarea de la figura 1, $NM$ va fi mediană în $\Delta NEF$ şi $\Delta NDC$, de unde rezultă $CP = PD$ (unde $\{P\} = NM \cap CD$).

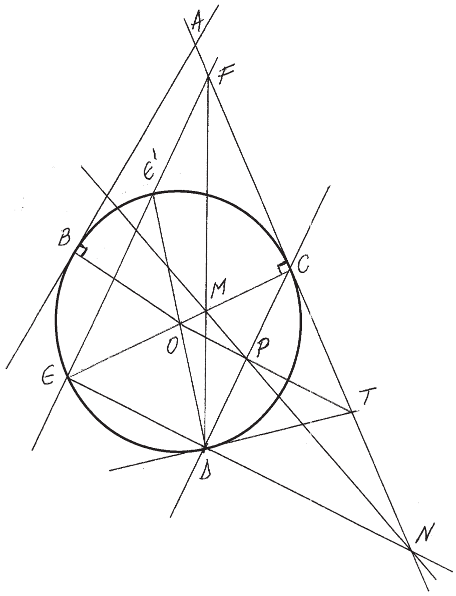



Figura 2

Dreapta $OP$, care trece prin mijlocul $P$ al segmentului $CD$, va fi mediatoare.

Notăm cu $T$ intersecţia dintre $OP$ şi $CN$. Punctul $T$ aflându-se pe mediatoare vom avea $CT = TD$.

Astfel vom obţine $\Delta CTO \overset{\text{L.L.L.}}{\equiv} \Delta DTO$ ($TO = TO$ (l.c.), $CO = DO$ (= raza cercului), $CT = TD$) $\Rightarrow \widehat{OCT} = \widehat{ODT} = 90^\circ$ astfel că $TD$ este tangenta în $D$ la $\mathcal{C}(O)$.

**Remarcă.** Metoda de rezolvare pe care am expus-o mai sus scoate în evidenţă un aspect important.

Comparând enunţul şi rezolvarea, observăm că din cele două puncte de tangenţă oferite în ipoteză, ne-am folosit doar de unul, în ambele figuri expuse. În consecinţă, enunţul se poate reformula:

*Să se demonstreze că folosind numai rigla, se pot construi oricâte tangente la un cerc dat, atunci când cercul are o tangentă construită.*

În acest caz, în figura de pornire, vom avea dat un cerc (de centru cunoscut), un singur punct de tangenţă la cerc, şi dreapta tangentă la cerc în punctul respectiv.

Dacă în rezolvarea problemei originale ne-am folosit de punctul $A$ dat, în problema reformulată nu ne rămâne decât să alegem un punct oarecare de pe dreapta tangentă la cerc.

*Profesor, Liceul Tehnologic "Constantin Brâncuşi", Bucureşti*

# *Argument 14*

## Bernhard Riemann şi curbura riemanniană

**Liviu Ornea**

**Abstract**. This is a very informal account of Riemann's ideas in geometry and of their follow-up in relativity.

Bernhard Riemann s-a născut la 17 septembrie 1826 şi a murit la 20 iulie 1866. A traăit, şadar, numai patruzeci de ani, nici aceştia întregi. Dintre ei, matematică a făcut, cu largheţe, douăzeci: deşi îşi uimise încă din şcoală profesorii prin capacitatea de calcul şi raţionament, la nouăsprezece ani a început să studieze filologia şi teologia; abia după un an a acceptat tatăl lui să-l lase să studieze matematica.

Cu toate acestea, Riemann este, fără nicio îndoială, cel mai important matematician al epocii sale. Opera sa publicată ocupă abia un volum, dar contribuţiile sale au fost decisive în mai multe domenii ale matematicii. Astăzi este imposibil să deschidem o revistă de matematică şi să nu întâlnim, măcar o dată, numele lui. Vorbim despre integrale Riemann (este motivul pentru care numele acesta ar trebui să fie cunoscut oricui a terminat un liceu), despre suprafeţe Riemann, despre spaţii Riemann etc. Numele său se leagă de domenii precum teoria măsurii, geometria algebrică şi complexă, geometria diferenţială, teoria numerelor. În această disciplină, de exemplu, a rămas încă şi azi nedemonstrată aşa-numita "ipoteză a lui Riemann" despre distribuţia zerourilor unei anumite funcţii, numită *zeta*. Acum câţiva ani, fundaţia Clay a oferit un premiu de un milion de dolari pentru rezolvarea, pozitivă sau negativă, a ipotezei lui Riemann. Premiul încă nu a fost decernat, dar problema polarizează interesul unui număr enorm de matematicieni şi către rezolvarea ei converg cercetări din cele mai variate domenii.

În 1854, Riemann îşi trecea *abilitarea* cu o lucrare despre ipotezele care stau la baza geometriei. A fost actul de naştere a ceea ce azi se numeşte geometrie riemanniană (neeuclidiană). Ideea lui a fost surprinzător de simplă şi, în acelaşi timp, şocantă. Dirichlet, care a asistat pa prezentare, povesteşte că, în afară de el şi Gauss, profesorul Riemann şi cel care alesese subiectul, nimeni nu a înţeles (dar trebuie spus că, pe atunci, la asemenea lecţii asistau nu doar profesorii din specialitatea candidatului).

Proprietăţile spaţiului, spunea Riemann, nu sunt dictate decât de felul în care noi convenim să măsurăm lungimile. Iar acest mod de măsurare revine la alegerea unui anumit obiect matematic, numit metrică (o formă pătratică, pentru cunoscători). Impostant e că modul de măsurare nu e unic. Nu poate fi nici complet aleator: în postularea unui anume fel de a măsura trebuie să ţinem seama de constrângeri de natură fizică, de exemplu. Dacă măsurăm folosind formula lui Euclid, obţinem geometria euclidiană. Dar dacă schimbăm modul de măsurare, şi Riemann a explicat care e modalitatea cea mai generală, obţinem alte geometrii, în particular pe cele neeuclidiene, deja descoperite de Bolyai şi Lobacevski. Tot din măsurători ne putem da seama de curbura spaţiului pe care-l studiem. Astfel, curbura devine o proprietate intrinsecă a spaţiului, şi nu una extrinsecă, aşa cum pare să dicteze intuiţia - in general, ca să spunem dacă un obiect e curbat sau nu, ne uităm la el, îl privim din exterior. Acest lucru era cunoscut deja de Gauss, care demonstrase că şi curbura definită clasic, pe suprafeţe, e o proprietate intrinsecă.[1] Riemann i-a preluat ideile şi le-a dus mult mai departe decât îşi putuse imagina chiar Gauss. Articolul în care Riemann şi-a expus rezultatele conţine foarte puţine formule, totuşi el dă forma precisă a ecuaţiei cu care se calculează curbura în funcţie de coeficienţii metricii. Ideile lui Riemann nu au fost deplin înţelese atunci când au apărut, dar după vreo cincizeci de ani, Minkowski, Poincaré şi Einstein nu doar le-au înţeles perfect, dar le-au şi aplicat în formularea teoriei relativităţii. Într-adevăr, Einstein defineşte gravitaţia cu ajutorul curburii, legând astfel proprietăţile geometrice ale spaţiului (forma) de cele fizice (materia). Formă egal materie egal, prin ecuaţia lui Einstein, energie. Egalităţile acestea au un sens matematic foarte precis, dar e bine să ne ferim să speculăm excesiv pe seama lor...

Aşadar, Riemann care a introdus, în acelaşi articol, şi noţiunea de *varietate n-dimensională*, adică spaţiu cu $n$ dimensiuni care seamănă local cu spaţiul euclidian, a explicat şi că acelaşi subiect (spaţiu) poate suporta mai multe feluri de a măsura. Fiecăruia îi va corespunde, în general, o altă curbură.
De exemplu, pe un disc plan care, măsurat euclidian aşa cum suntem obişnuiţi, are curbură zero (doar e plat!), putem măsura şi cu metrica hiperbolică a lui Poincaré şi obţinem o curbură constantă negativă... Iată deci că forma nu mai corespunde intim obiectului, ci felului în care măsurăm lungimile pe acel obiect.

Riemann ne-a învăţat ce este curbura şi cum o putem, teoretic, determina. Dar cât de curbat e spaţiul nostru, cel în care trăim? E greu de spus. Nici măcar nu ştim în câte dimensiuni trăim. De la Einstein şi Minkowski încoace, universul nostru era imaginat ca o varietate cu 4 dimensiuni (spaţiu-timp). Dar există teorii noi - a (super)corzilor, teorii $M$ etc. - care utilizează varietăţi cu mai multe dimensiuni - zece, unsprezece... Pentru a cunoaşte curbura universului ar trebui să ştim să măsurăm lungimi. Nicio problemă la scară umană. Dar la scară infinitezimală sau cosmică?

Ceea ce fac acum matematicienii şi fizicienii este să încerce ca, din observaţiile făcute (în mod fatal limitate), din extrapolarea lor, să ghicească numărul de dimensiuni şi modalitatea bună de măsurare.

[1] Iată definiţia curburii gaussiene. Să ne imaginăm o porţiune mică de suprafaţă. în fiecare punct al ei rificăm un segment perpendicular pe planul tangent în acel punct, de lungime $l$, având grijă să păstrăm aceeaşi orientare pentru toate segmentele. Translatăm apoi toate aceste segmente în centrul unei sfere fixe de rază 1. Capetele lor mătură o porţiune din suprafaţa sferei. Măsurăm aria aceasta (prin integrare, pentru că vom avea de-a face cu o porţiune de formă neregulată) şi o raportăm la aria porţiunii de pe suprafaţă. Valoarea rezultată va fi curbura totală a porţiunii iniţiale de suprafaţă. E, intuitiv, clar că o suprafaţă va fi cu atât mai curbată cu cât vectorii normali translataţi acoperă o suprafaţă mai întinsă pe sferă; altfel spus, cu cât vectorii normali în puncte apropiate împung în direcţii mai diferite.

## Argument 14

Să dea modele de univers, adică să găsească acele obiecte matematice potrivite descrierii lui. Mai trebuie să spun că nici un model propus până acum nu e considerat pe deplin satisfăcător?

*Profesor, Universitatea din Bucureşti,*
*Facultatea de Matematică şi Informatică,*
*str. Academiei 14, Bucureşti*
*E-mail: lornea@ gta.math.unibuc.ro*

# Aritmetică la casierie (II)

**Vasile Pop**

**Abstract**. This article is meant to pled for the beauty and the elegance of arithmetic reasoning.

Prezentăm soluţiile celor două probleme propuse în numărul anterior.

**3.** *Fie $a, b$ numere naturale relativ prime. Să se arate că cel mai mare număr natural care nu poate fi scris sub forma $a \cdot x + b \cdot y$ cu $x, y \in \mathbb{N}$ este $N = ab - a - b$.*

*Frobenius*

**Soluţie.** Deoarece $a, b$ sunt relativ prime, există $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ astfel ca

$$ax_0 + by_0 = 1$$

iar soluţia generală (în $\mathbb{Z}$) a ecuaţiei $ax + by = d$ este $x = dx_0 - kb$, $y = dy_0 + ka$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

Condiţiile $x \geq 0$, $y \geq 0 \Leftrightarrow x > -1$, $y > -1$ devin:

$$-\frac{dy_0 + 1}{a} < k < \frac{dx_0 + 1}{b},$$

deci trebuie să existe un număr întreg în intervalul $\left(-\dfrac{dy_0 + 1}{a}, \dfrac{dx_0 + 1}{b}\right)$.

Lungimea acestui interval este

$$L = \frac{dx_0 + 1}{b} + \frac{dy_0 + 1}{a} = \frac{d(ax_0 + by_0) + a + b}{ab} = \frac{d + a + b}{ab}.$$

Dacă $d > ab - a - b$, atunci $L > 1$ şi în orice interval de lungime $L$ există numere întregi.

Pentru $d = ab - a - b$, $L = 1$ iar capetele intervalului sunt numere întregi:

$$\begin{aligned}\frac{dx_0 + 1}{b} &= \frac{(ab - a - b)x_0 + 1}{b} = ax_0 - x_0 + \frac{1 - ax_0}{b} \\ &= ax_0 - x_0 + \frac{ax_0 + by_0 - ax_0}{b} = ax_0 - x_0 + y_0 \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

*Observaţie.* Se poate arăta că dintre numerele $0, 1, 2, \ldots, ab - a - b$, jumătate pot fi scrise ca o combinaţie liniară cu coeficienţi naturali şi jumătate nu, deci numărul numerelor naturale care nu pot fi scrise sub forma $ax + by$ cu $a, b \in \mathbb{N}$, este

$$\frac{ab - a - b + 1}{2} = \frac{(a - 1)(b - 1)}{2}.$$

**4.** *La curtea regelui Merlin urma să se desfăşoare un mare ospăţ, pentru care se cumpără din regatul vecin 1000 sticle de vin. Regele află că una din sticle a fost înlocuită cu o sticlă ce conţinea o otravă extrem de puternică* (*o singură picătură este mortală*). *Pentru că nu mai este timp pentru procurarea altui vin, trebuie găsită sticla cu otravă. Sfetnicul regelui îl sfătuieşte să testeze vinul din sticle pe cei 10 hoţi care erau condamnaţi la moarte, dându-le fiecăruia câte un pahar de vin* (*amestecat din unele sticle*). *Cum se poate găsi sticla cu otravă dacă până la ospăţ mai sunt trei ore şi otrava îşi face efectul în trei ore?*

Facem o etichetare a celor 1000 de sticle de vin cu numere naturale de la 1 la 1000 şi încă o etichetare $h_1, h_2, \ldots, h_{10}$ a celor 10 hoţi. Să observăm că orice număr natural de la 1 la 1000 admite o scriere în baza doi cu cel mult 10 cifre. La aceste numere, dacă într-o astfel de scriere se folosesc mai puţin de 10 cifre, vom face o completare cu zerouri în faţă pentru a avea 10 astfel de cifre. De exemplu, $1 = 0000000001_{(2)}$; $2 = 0000000010_{(2)}$ etc. Acestea le putem organiza sub forma unui tabel ca şi mai jos.

| Nr. sticlă\hoţi | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ | $h_7$ | $h_8$ | $h_9$ | $h_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 999 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1000 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

În continuare, hoţul $k$ primeşte să bea vin din toate sticlele ce au 1 pe coloana $k$, pentru fiecare $k \in \overline{1,10}$. În acest mod, unii hoţi vor muri iar alţii vor trăi. Asociem fiecărui hoţ câte un număr $a_k = \begin{cases} 0, & \text{dacă hoţul } h_k \text{ trăieşte} \\ 1, & \text{dacă hoţul } h_k \text{ moare}, \ k \in \overline{1,10}. \end{cases}$
Numărul sticlei otrăvite este dat de numărul $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$ scris în baza 2.

*Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca*
*Str. C. Daicoviciu 15*
*400020, Cluj-Napoca, Romania*
*E-mail: vasile.pop@math.utcluj.ro*

## *Argument 14*

# Ecuaţiile funcţionale ale unor morfisme de grupuri

**Vasile Pop**

**Abstract**. In this article we shall present a few classical functional equations whose solutions are expressed through additive functions.

Legătura naturală între ecuaţii funcţionale şi morfismele de grupuri este evidentă chiar din definiţia morfismelor. În această lucrare grupul de bază este grupul aditiv $(\mathbb{R}, +)$, iar endomorfismele lui sunt soluţiile ecuaţiei lui Cauchy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, soluţii care în domeniul funcţiilor se numesc funcţii aditive.

Ne propunem să rezolvăm câteva ecuaţii funcţionale clasice ale căror soluţii se exprimă cu ajutorul funcţiilor aditive.

### 1. Ecuaţia funcţională a morfismelor

Fie $(G, *)$ şi $(H, \circ)$ două grupuri (sau semigrupuri).

**Definiţia 1.1**. Ecuaţia funcţională

$$f : G \to H,\ f(x * y) = f(x) \circ f(y), \quad \forall\, x, y \in G$$

se numeşte **ecuaţia morfismelor** de la $(G, *)$ la $(H, \circ)$, iar soluţiile ei sunt morfismele de la grupul $(G, *)$ la grupul $(H, \circ)$. Mulţimea soluţiilor se notează $\mathrm{Hom}(G, H)$.

**Observaţia 1.2**. Determinarea morfismelor între două grupuri revine la rezolvarea unei ecuaţii funcţionale.

**Definiţia 1.3**. Ecuaţia funcţională

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

se numeşte **ecuaţia lui Cauchy**, iar soluţiile ei se numesc **funcţii aditive**.

**Observaţia 1.4**.

• Ecuaţia lui Cauchy este ecuaţia endomorfismelor grupului $(\mathbb{R}, +)$.

• Mulţimea funcţiilor aditive de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$ este mulţimea morfismelor de la $(\mathbb{R}, +)$ la $\mathbb{R}, +)$, adică $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

• O funcţie $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie aditivă dacă verifică relaţia

$$A(x + y) = A(x) + A(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

• Singurele funcţii aditive care în plus au una din proprietăţile: continue într-un punct, continue pe $\mathbb{R}$, monotone, mărginite pe un interval, sunt funcţii liniare $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a = f(1)$ este o constantă arbitrară.

• Funcţiile aditive discontinue (care nu sunt de forma $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$) se numesc funcţii Hamel şi sunt funcţii cu proprietăţi surprinzătoare ("patologice"): imaginea şi preimaginea oricărui interval este o mulţime densă în $\mathbb{R}$, iar graficul unei

funcţii Hamel este mulţime densă în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Mai multe proprietăţi ale funcţiilor Hamel pot fi găsite în [1], [3], [5].

• Caracterizarea funcţiilor aditive discontinue este neelementară, necesitând cunoştinţe despre spaţii vectoriale, baze Hamel, spaţii cât. Ecuaţia lui Cauchy a fost pusă ca problemă deschisă în 1821, iar rezolvarea ei completă a fost dată în 1905 de G. Hamel.

• O proprietate simplă şi importantă a funcţiilor aditive este

$$A(q\cdot x)=q\cdot A(x),\ \forall\, q\in\mathbb{Q},\ \forall\, x\in\mathbb{R}\ \text{ (sunt } \mathbb{Q}-\text{liniare)}.$$

## 2. Ecuaţii funcţionale induse de izomorfisme

Fie $(G,*)$ şi $(H,\circ)$ două grupuri pentru care presupunem că putem determina mulţimea morfismelor $\mathrm{Hom}(G,H)$, adică putem rezolva ecuaţia funcţională $f:G\to H$,

$$f(x*y)=f(x)\circ f(y),\quad \forall\, x,y\in G.$$

Dacă $(G_1,\oplus)$ şi $H_1,\odot)$ sunt alte două grupuri şi dorim să rezolvăm ecuaţiile funcţionale:

$$\begin{aligned}
&f:G_1\to H,\ f(x\oplus y)=f(x)*f(y),\ \forall\, x,y\in G,\\
&g:G\to H,\ \ \ g(x*y)=g(x)\odot g(y),\ \forall\, x,y\in G,\\
&h:G_1\to H_1,\ h(x\oplus y)=h(x)\odot h(y),\ \forall\, x,y\in G_1,
\end{aligned}$$

în cazul în care grupurile $(G_1,\oplus)$ şi $(G,*)$ sunt izomorfe, iar grupurile $(H,\circ)$ şi $(H_1,\odot)$ sunt izomorfe, aceste ecuaţii se rezolvă simplu, folosind compuneri de morfisme (substituţii de funcţii în ecuaţiile funcţionale date).

**Teorema 2.1**. *Dacă $(G,*)$, $(H,\circ)$, $(G_1,\oplus)$, $(H_1,\odot)$ sunt patru grupuri şi $\varphi_1:G_1\to G$, $\varphi_2:H\to H_1$ izomorfisme de grupuri, atunci*:

*a) orice morfism de la $G_1$ la $H$ este de forma*

$$F_1=f\circ\varphi_1,$$

*b) orice morfism de la $G$ la $H$ este de forma*

$$F_2=\varphi_2\circ f,$$

*c) orice morfism de la $G_1$ la $H_1$ este de forma*

$$F_3=\varphi_2\circ f\circ\varphi_1,$$

*unde $f:G\to H$ este un morfism de la $G$ la $H$.*

**Demonstraţie**. a) Deoarece compunerea a două morfisme este un morfism, rezultă că, dacă $f:G\to H$ este un morfism (şi $\varphi_1$ este un izomorfism), atunci $F_1$ este morfism. Dacă $F_1:G_1\to H$ este un morfism (şi $\varphi_1^{-1}$ este un izomorfism), atunci $f=F_1\circ\varphi_1^{-1}$ este un morfism. Analog se demonstrează b) şi c).

**Observaţia 2.2**. Afirmaţiile a), b), c) din Teorema 2.1 se pot formula astfel:

$a')$ $\mathrm{Hom}(G_1,H)=\mathrm{Hom}(G,H)\circ\varphi_1$,

$b')$ $\mathrm{Hom}(G, H_1) = \varphi_2 \circ \mathrm{Hom}(G, H)$,
$c')$ $\mathrm{Hom}(G_1, H_1) = \varphi_2 \circ \mathrm{Hom}(G, H) \circ \varphi_1$.

### 3. Ecuaţii funcţionale de tip Cauchy

Considerăm grupurile

$$G_1 = (\mathbb{R}, +),\ G_2 = ((0, \infty), \cdot),$$
$$G_3 = ((-1, 1), *),\ G_4 = (\mathbb{R}^*, \cdot),$$
$$G_5 = (\mathbb{R}\backslash\{-1\}, \circ) \text{ – grupul lui Pompeiu},$$

unde

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}, \quad \forall\, x, y \in (-1, 1),$$
$$x \circ y = xy + x + y, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

şi izomorfismele între ele

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ \varphi_1(x) = e^x$$
$$\varphi_1^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \varphi_1^{-1}(x) = \ln x$$
$$\varphi_2 : (-1, 1) \to (0, \infty),\ \varphi_2(x) = \frac{x + 1}{1 - x}$$
$$\varphi_2^{-1} : (0, \infty) \to (-1, 1),\ \varphi_2^{-1}(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$
$$\varphi_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ \varphi_3(x) = x - 1$$
$$\varphi_3^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}^*,\ \varphi_3^{-1}(x) = x + 1.$$

Ne propunem să rezolvăm câteva ecuaţii funcţionale reductibile la ecuaţia lui Cauchy, ecuaţie de tip Cauchy:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{(ecuaţia exponenţială)} \tag{1}$$

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \quad \text{(ecuaţia logaritmică)}, \tag{2}$$

unde $D = [0, \infty)$, $D = \mathbb{R}^*$ sau $D = \mathbb{R}$,

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{(ecuaţia multiplicativă)}, \tag{3}$$

unde $D = (0, \infty)$, $D = \mathbb{R}^*$ sau $D = \mathbb{R}$,

$$f : \mathbb{R} \to (-1, 1),\ f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x) \cdot f(y)} \text{ (ecuaţia tangentei hiperbolice)} \tag{4}$$

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right) = f(x) + f(y) \tag{5}$$

(ecuaţia arctangentei hiperbolice)

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(xy + x + y) = f(x) \cdot f(y), \tag{6}$$

unde $D = (-1, \infty)$ sau $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Folosind Teorema 2.1 obţinem soluţiile ecuaţiilor (1) – (6), exprimate cu ajutorul funcţiilor aditive $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (care verifică ecuaţia $A(x+y) = A(x)+A(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$).

**Teorema 3.1**. *O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică ecuaţia* (1) *dacă şi numai dacă există o funcţie aditivă $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca*

$$f(x) = e^{A(x)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ sau } f = 0.$$

**Demonstraţie**. Dacă există $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) = 0$, atunci

$$f(x_0 + y) = f(x_0) \cdot f(y) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ deci } f = 0.$$

Dacă $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, atunci $f(2x) \cdot (f(x))^2 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deci $f$ ia valori în $(0, \infty)$. Acum $f : (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$ este morfism de grupuri. Folosind izomorfismul $\varphi_1^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, obţinem că $\varphi_1^{-1} \circ \varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ este morfism, deci funcţie aditivă. Din $\varphi_1^{-1} \circ f = A$, rezultă $f = \varphi_1 \circ A$.

**Teorema 3.2**. *Soluţiile ecuaţiei* (2) *sunt*:
*a*) $f = 0$ *dacă* $D = \mathbb{R}$;
*b*) $f(x) = A(\ln x)$, *dacă* $D = (0, \infty)$;
*c*) $f(x) = A(\ln |x|)$, *dacă* $D = \mathbb{R}^*$.

**Demonstraţie**. a) Avem $f(x \cdot 0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
b) $f$ este morfism de la $((0, \infty), \cdot)$ la $(\mathbb{R}, +)$ şi folosind izomorfismul $\varphi_1 : (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$, rezultă că funcţia $f \circ \varphi_1$ este funcţie aditivă. Din $f \circ \varphi_1 = A$ rezultă $f = A \circ \varphi_1^{-1}$.
c) Din b) rezultă că restricţia funcţiei $f$ la $(0, \infty)$ este $f(x) = A(\ln x)$.
În particular, $f(1) = A(0) = 0$, şi pentru $x = y = -1$ în (2) rezultă $f(-1) = 0$ şi apoi pentru $y = -1$ rezultă că $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$, deci $f$ este funcţie pară şi prelungirea de pe $(0, \infty)$ pe $\mathbb{R}^*$ este unică

$$f(x) = A(\ln |x|),\ x \in \mathbb{R}^*.$$

**Teorema 3.3**. *Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este funcţie multiplicativă dacă şi numai dacă există o funcţie aditivă $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca*:
*a*) $f = 0$ *sau* $f(x) = e^{A(\ln x)}$, *dacă* $D = (0, \infty)$;
*b*) $f = 0$ *sau* $f = 1$, *sau* $f(x) = sgn\, x$, *sau* $f(x) = |sgn\, x|$, *sau*

$$f(x) = \begin{cases} e^{A(\ln |x|)}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \textit{ sau } f(x) = \begin{cases} sgn\, x \cdot e^{A(\log |x|)}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

*dacă* $D = R$ *sau* $\mathbb{R}^*$.

**Demonstraţie**. a) $f = 0$ verifică ecuaţia.
Dacă $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (0, \infty)$, avem

$$f(x) = f\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) = \left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 > 0,$$

deci $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ este un endomorfism al grupului $((0,\infty),\cdot)$.
Prin compunere cu $\varphi_1$ şi $\varphi_1^{-1}$ rezultă că funcţia $\varphi_1^{-1}\circ f\circ\varphi_1$ este funcţie aditivă, $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Din $\varphi_1^{-1}\circ f\circ\varphi_1=A$ rezultă $f=\varphi_1\circ A\circ\varphi_1^{-1}$.

b) Pentru $y=1$, rezultă $f(x)=f(x)\cdot f(1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ sau $\mathbb{R}^*\Rightarrow f=0$, sau $f(1)=1$. Pentru $f=0$, din $f((-1)^2)=(f(-1))^2$ rezultă $f(-1)\in\{-1,1\}$.

Dacă $f(-1)=-1$, rezultă $f(-x)=-f(x)$, deci $f$ este funcţie impară, iar pentru $f(-1)=1$ rezultă $f(-x)=f(x)$, deci $f$ este funcţie pară.
Deoarece pe $(0,\infty)$ funcţia a fost determinată, la a) de obţin determinările din enunţ $((f(x)=\operatorname{sgn}x$ se obţine pentru $A=0)$.

Pentru următoarele teoreme lăsăm demonstraţiile în seama cititorilor.

**Teorema 3.4**. *Funcţiile* $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$ *care verifică ecuaţia* (4) *sunt de forma*

$$f(x)=\frac{e^{A(x)}-1}{e^{A(x)}+1},\quad x\in\mathbb{R},$$

*unde* $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este o funcţie aditivă.*

**Observaţia 3.5**. Dacă notăm $A(x)=2A_1(x)$ obţinem

$$f(x)=\operatorname{th}A_1(x),$$

unde funcţia tangentă hiperbolică este definită prin

$$\operatorname{th}:\mathbb{R}\to(-1,1),\ \operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

**Teorema 3.6**. *Funcţiile* $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ *care verifică ecuaţia* (5) *sunt de forma*

$$f(x)=A\left(\ln\frac{x+1}{1-x}\right),\quad x\in(-1,1),$$

*unde* $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este funcţie aditivă.*

**Observaţia 3.7**. Soluţiile ecuaţiei (5) pot fi puse sub forma

$$f(x)=A_1(\operatorname{arcth}x),$$

unde $A_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este funcţie aditivă.

**Teorema 3.8**. *Funcţiile* $f:D\to\mathbb{R}$ *care verifică ecuaţia* (6) *sunt de forma*:

*a)* $f=0$ *sau* $f(x)=e^{A(\ln(x+1))}$, $x>-1$, *dacă* $D=(-1,\infty)$;

*b)* $f=0$ *sau* $f(x)=e^{A(\ln|x+1|)}$, *sau* $f(x)=sgn(x+1)e^{A(\ln|x+1|)}$, *dacă* $D=\mathbb{R}^*$, *unde* $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este o funcţie aditivă.*

## Bibliografie

[1] V. Pop, *Ecuaţii funcţionale*, Ed. Mediamira, 2002
[2] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Univ. Slaski, Warszawa, 1985
[3] V. Pop, *Funcţii Hamel*, G. M. A. nr. 2/2000
[4] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer Science, 2009
[5] P. K. Sahoo, Pl. Kannappan, *Introduction to Functional Equations*, C. R. C. Press, 2011

*Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca*
*Str. C. Daicoviciu 15*
*400020, Cluj-Napoca, Romania*
*E-mail: vasile.pop@math.utcluj.ro*

# Tabăra de matematică, Baia Mare, 29.01.2011 - 02.02.2011

**Gheorghe Maiorescu şi Nicolae Muşuroia**

La a XIII-a ediţie a taberei judeţene de matematică - secţiunea liceu, organizată în acest an la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", au participat 125 de elevi.

Cursurile au fost susţinute de următorii profesori:

*Bojor Florin, Boroica Gheorghe, Fărcaş Natalia, Heuberger Cristian, Heuberger Dana, Muşuroia Nicolae, Petruţiu Crina, Pop Adrian* – Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", *Boroica Gabriela, Covaciu Traian, Darolţi Erika, Sfara Gheorghe, Zlampareţ Horia* – Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", *Friedrich Gabriela, Horge Daniel, Temian Gavril* – Colegiul Economic "Nicolae Titulescu", *Longaver Ludovic* – Liceul Teoretic "Nemeth Laszlo", *Maiorescu Gheorghe, Podină Camelia* – Liceul Teoretic "Emil Racoviţă", *Râmbu Gheorghe, Vlad Vasile* – matematicieni.

Prezentăm în continuare subiectele testului final şi lista premianţilor taberei de la liceu.

### Clasa a IX-a

**1.** Se consideră ecuaţia $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi rădăcinile $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

a) Daţi exemplu de $a,b,c\in\mathbb{Q}^*$ astfel încât $x_1,x_2\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

b) Dacă $x_1\in\mathbb{Q}$ şi $x_2\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, să se arate că cel puţin două dintre numerele $a,b,c$ sunt iraţionale.

*Florin Bojor*, Argument 11/2009

**2.** Se consideră ecuaţia $x^2(1-[x])=1+\{x\}$.

a) Să se arate că ecuaţia nu are soluţii în intervalul $[0,1)$.

b) Să se rezolve ecuaţia.

*Gheorghe Gherasin*, Argument 13/2011

**3.** Se consideră triunghiul $ABC$ şi $D,E,F$ punctele de intersecţie ale cercului înscris în triunghi cu laturile $BC$, $AC$, $AB$. Fie $H_1,H_2,H_3$ respectiv ortocentrele triunghiurilor $AEF$, $BDF$ şi $CDE$.

a) Să se arate că triunghiurile $H_1H_2H_3$ şi $DEF$ sunt congruente.

b) Să se arate că $\triangle H_1H_2H_3$ şi $\triangle DEF$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

*Dana Heuberger*

*Test selectat de: Prof. Dana Heuberger*

**Clasa a X-a**

**1.** Se consideră numerele reale $a, b, c$.

a) Să se arate că:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\sqrt{(x+1)(2x+1)}+\sqrt{(2x+1)(3x+1)}+\sqrt{(3x+1)(x+1)}=6x+3.$$

**2.** Se consideră mulţimea $D\subseteq[0,2\pi]$ şi funcţia

$$f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{\{\sin x\}}+\frac{\sin x}{[\sin x]},$$

unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagaă, respectiv partea fracţionară a lui $a$.

a) Să se determine $D$, domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f$ pe intervalul $[0,2\pi]$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=\dfrac{9}{2}$.

**3.** Se consideră numerele naturale $m, n, p$ cu $m, n, p\geq 2$, având proprietatea $\sqrt[m]{3^n}+\sqrt[n]{3^p}+\sqrt[p]{3^m}=9$.

a) Să se demonstreze că $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{p}+\dfrac{p}{m}\geq 3$.

b) Dacă $\sqrt[m]{3^n}+\sqrt[n]{3^p}+\sqrt[p]{3^m}=9$, demonstraţi că $m=n=p$.

Generalizare.

*Test selectat de: Prof. Meda Bojor*
*Prof. Florin Bojor*

**Clasa a XI-a**

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -21 & 3\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că dacă $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $A\cdot Y=Y\cdot A$, atunci există numerele complexe $u$ şi $v$ astfel încât $Y=\begin{pmatrix}u & 0\\ v & u\end{pmatrix}$.

b) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^3+2X^2=A$.

**2.** a) Să se arate că dacă $X, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $t\in\mathbb{R}$, atunci

$$\det(X+t\cdot Y)=t^2\cdot\det(Y)+a\cdot t+\det(X),\ a\in\mathbb{R}.$$

b) Să se arate că dacă $A, B, C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sunt matrice care comută două câte două şi $\det(A\cdot B+B\cdot C+C\cdot A)=0$, atunci

$$\det(A^2 + B^2 + C^2 + \alpha(A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A)) \geq 0,\ \forall\, \alpha \in [-2, 2].$$

*N. Muşuroia*, Argument 11, nr.1/2009

**3.** Se consideră şirul $a > 0$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 > 0$ şi

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{a + x_n^2 + x_n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că şirul este divergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$.

b) Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} > x_{n+1} - x_1$, $\forall\, n \geq 1$.

*Test selectat de: Prof. Gheorghe Boroica*

## Clasa a XII-a

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se demonstreze că există $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = \lambda \cdot B$;

b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $A^{n+1} - 2A^n = 2^n \cdot B$;

c) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ecuaţia matriceală $X^2 + 3X = 5A$.

**2.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcţia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^{2n}}{e^x + 1}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ şi să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei $f_1$;

b) Să se arate că $f'_{n+1}(x) = 2x \cdot f_n(x) + x^2 \cdot f'_n(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

c) Să se calculeze $\displaystyle\int (f_n(x) + f_n(-x))dx$, $x \in \mathbb{R}$.

**3.** Fie $N$ mulţimea elementelor neinversabile din $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$. Spunem că $\mathbb{Z}_n$ are proprietatea $(P)$ dacă $\forall\, \widehat{x}, \widehat{y} \in N$, $\widehat{x} + \widehat{y} \in N$.

a) Să se arate că $\mathbb{Z}_9$ are proprietatea $(P)$;

b) Să se studieze dacă $\mathbb{Z}_{12}$ are proprietatea $(P)$;

c) Să se demonstreze că dacă $\mathbb{Z}_n$ are proprietatea $(P)$ şi dacă $\forall\, \widehat{x}, \widehat{y} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$, $\widehat{x} + \widehat{y} \in N$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 2^k$.

*Dana Heuberger*

*Test selectat de: Prof. Cristian Heuberger*

## Premianţii

### Clasa a IX-a

**Excelenţă.** *Miclea Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul I.** *Stretea Roland* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Bud Cristian* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul al II-lea**. *Nicolaescu Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Sântejudean Bogdan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Fodoruţ Ioan* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Morar Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul al III-lea**. *Grigoraş Adriana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ulici Ioana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ciurte Tudor* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tomoiagă Daiana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vele Corina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Avram Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Suciu Alexandra* (C. N. "Gheorghe Şincai").

### Clasa a X-a

**Excelenţă.** *Bretan Paula Alice* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul I**. *Ofrim Adriana* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul al II-lea**. *Lupănescu Andrea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vişovan Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Trif Dan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Sava Bianca* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul al III-lea**. *Cosma Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Topan Andra* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ignatyuk Florin* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Chiuzbăian Cristina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ciocotişan Iulia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bozîntan Iuliana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ulici Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lup Iulia* (C. N. "Gheorghe Şincai").

### Clasa a XI-a

**Excelenţă.** *Suciu Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu").

**Premiul I**. *Petca Alexandra* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Herman Paul* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Paşca Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul al II-lea**. *Dragoş Hanna* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vago Timea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Feier Florin* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Pop Sergiu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Zicher Norbert* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul al III-lea**. *Morar Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Buzilă Bianca* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Sfara Anamaria* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Grumaz Ciprian* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Ciurdaş Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lupu Catrinel* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Clasa a XII-a M1**

**Excelenţă.** *Petrovan Marius* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul I**. *Buda Bogdan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Kando Enikö* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Mihalca Daniel* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Romocea Roxana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Iriciuc Iosif* (C. N. "Gheorghe Şincai").

**Premiul al II-lea** *Muscan Ronela* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Iepan Cristian* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Lupan Andreea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Trif George* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop M. Mihai* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ungur Corina* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Chiş Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Moldovan Miruna* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tîrnovan Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Mariş Claudiu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Miholca Diana* (C. N. "Vasile Lucaciu").

**Premiul al III-lea**. *Moraru Alexandru* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Andreea Maria* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Pop V. Mihai* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bilţ Bianca* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Fînăţan Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Breban Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Jurje Paula* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Todoran Denisa* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Dacian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Dragomir Ramona* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Jaszberenyi Andrea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bâlc Liliana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Griguţă Paula* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ilieş Roxana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Mugur Oana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Balko Andreea* (C. N. "Gheorghe Şincai").

*Profesor, Liceul Teoretic "Emil Racoviţă" Baia Mare*
*Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare*

# Concursul ”Argument” al Colegiului Naţional ”Gheorghe Şincai” Ediţia a III-a

În 12 noiembrie 2011 a avut loc la Colegiul Naţional ”Gheorghe Şincai” din Baia Mare cea de-a treia ediţie a concursului interjudeţean de matematică ”Argument”, concomitent cu lansarea celui de-al treisprezecelea număr al revistei cu acelaşi nume, editat de membrii catedrei de matematică a liceului gazdă. Concurenţii au fost cei mai buni elevi din clasele a V-a şi a VI-a de la şcolile din Baia Mare şi liceeni de la colegiile naţionale ”Alexandru Papiu Ilarian” din Târgu Mureş, ”Andrei Mureşanu” din Dej, ”Liviu Rebreanu” din Bistriţa, ”Mihai Eminescu” din Satu Mare, ”Dragoş Vodă” din Sighetu Marmaţiei, ”Vasile Lucaciu” şi ”Gheorghe Şincai” din Baia Mare.

Prezentăm în continuare enunţurile problemelor şi lista premianţilor.

### Clasa a V-a

**Fiecare problemă are un singur răspuns corect**.

**1.** Numărul $9^4 : 3^3 : 9^2 + 2^4 \cdot 5 : 4$ este egal cu:

a) 43  b) 23  c) 103  d) 32

**2.** Numărul $\left[128^{15} \cdot 5^{75} - 125^{25}(2^{15})^7 + 2^5\right]^2$ este egal cu:

a) 1024  b) 1100  c) 1224  d) 20

**3.** Dacă $3 \cdot 5^n = (9 \cdot 5^{2011}) : (3 \cdot 5^{2001})$, atunci numărul $n$ este egal cu:

a) 10  b) 1024  c) $3 \cdot 5^{10}$  d) 100

**4.** Cel mai mare pătrat perfect mai mic ca 500 este:

a) 529  b) 441  c) 484  d) 244

**5.** Dacă $n = \overline{abc} - \overline{cba}$, atunci cea mai mică valoare nenulă a lui $n$ este:

a) 301  b) 99  c) 324  d) 100

**6.** Dacă $a + b = 72$, iar $b + c = 990$, atunci numărul $3 \cdot a + 8 \cdot b + 5 \cdot c$ este egal cu:

a) 30166  b) 60166  c) 6166  d) 5166

**7.** Se consideră şirul: $n, n+1, n+2, \ldots, n+999$, unde $n$ este un număr natural dat. Ultimele trei cifre ale sumei termenilor acestui şir sunt:

a) 350  b) 900  c) 500  d) 250

**8.** Dacă restul împărţirii numărului $n$ la 2012 este 505, atunci restul împărţirii numărului $n$ la 503 este:

a) 501 b) 502 c) 2 d) 22

**La următoarele probleme se cer soluţiile complete**.

**9.** Considerăm egalitatea: $\overline{abc} + \overline{de} + f = 543$, unde $a, b, c, d, e, f$ sunt numere consecutive în această ordine.

a) Determinaţi $a$;

b) Pentru $a = 4$, calculaţi restul împărţirii numărului $\overline{abcd}$ la $\overline{ef}$;

c) Să se verifice dacă numărul $\overline{ab}^c + \overline{de}^f$ este pătrat perfect.

**10.** Notăm cu $n(a;b)$ numărul de elemente $x \in \mathbb{N}$, pentru care $a \leq x \leq b$.

a) Calculaţi $n(10;15)$;

b) Calculaţi $S = n(1;2) + n(2;4) + n(3;6) + \cdots + n(1006;2012)$;

c) Determinaţi $x \in \mathbb{N}$, dacă $n(x;1999) + n(x;2011) = 2012$.

*Testul a fost elaborat de:*
*Prof. Ella Ilie* - Şc. "Nicolae Iorga" Baia Mare
*Prof. Nicolae Muşuroia* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare

## Clasa a VI-a

**Fiecare problemă are un singur răspuns corect**.

**1.** Numărul $12,5 - 5 \cdot 1,4 : 2 + 5 \cdot 2^4 : 2^2$ este egal cu:

a) $4,25$ b) 29 c) 11 d) $23,5$

**2.** Numărul

$$\left[2 \cdot \frac{350}{14} : \frac{25}{5^0} - 6 \cdot \left(\frac{0}{3}\right)^3 + 2,(8) \cdot 12^2 : \left(18 - 5,3(6) : \frac{483}{900}\right)\right] : 30$$

este egal cu:

a) 18 b) $1,8$ c) 54 d) $1,6$

**3.** Dacă $4^n = (16 \cdot 2^{2011}) : (4 \cdot 2^{2001})$, atunci numărul $n$ este egal cu:

a) 6 b) 4096 c) 5 d) 12

**4.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 144 şi 324 este:

a) 24 b) 18 c) 36 d) 48

**5.** Suma cifrelor celui mai mic multiplu comun al numerelor $45, 135$ şi 360 este:

a) 1080 b) 8 c) 10 d) 9

**6.** Numărul divizorilor din $\mathbb{N}$ ai numărului $\dfrac{156}{\frac{4}{2}} \cdot \dfrac{\frac{156}{4}}{2}$ este:

a) 3 b) 9 c) 1421 d) 8

**7.** Dacă $\dfrac{a}{b}=\dfrac{12}{5}$ iar $\dfrac{c}{b}=\dfrac{48}{32}$, atunci numărul $\dfrac{a+c}{b}$ este egal cu:

a) $3,25$ b) $4,1$ c) $3,90$ d) $4,5$

**8.** Un pătrat are aria $36\,\mathrm{m}^2$. Un dreptunghi are lungimea 10 m şi acelaşi perimetru cu al pătratului. Atunci aria dreptunghiului este:

a) $0,2\,\mathrm{dm}^2$ b) $24\,\mathrm{m}^2$ c) $20\,\mathrm{m}$ d) $200\,000\,\mathrm{cm}^2$

**La următoarele probleme se cer soluţiile complete.**

**9.** Pe un cerc de centru $O$ se consideră punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ în această ordine şi astfel încât

$$m(\sphericalangle A_0OA_1)=2^\circ, m(\sphericalangle A_1OA_2)=4^\circ, m(\sphericalangle A_2OA_3)=6^\circ, \ldots m(\sphericalangle A_{n-1}OA_n)=2n^\circ.$$

a) Calculaţi $m(\sphericalangle A_0OA_6)$ şi $m(\sphericalangle A_3OA_6)$;

b) Aflaţi $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sphericalangle A_0OA_n$ să fie unghi drept;

c) Aflaţi cel mai mic număr natural $n$ de două cifre astfel încât $\sphericalangle A_0OA_n$ să fie ascuţit.

**10.** Considerăm cifrele nenule $a$ şi $b$.

a) Arătaţi că fracţia $\dfrac{\overline{a00a}}{\overline{bb}}$ este reductibilă;

b) Dacă $a$ şi $b$ îndeplinesc condiţia $\underbrace{\overline{a\,a\ldots a}}_{2011\text{ cifre}}\cdot 3=\underbrace{\overline{b\,b\ldots b}}_{2011\text{ cifre}}$, arătaţi că printre numerele $n=2a^3+3b$ există un unic pătrat perfect.

*Testul a fost elaborat de:*
*Prof. Ella Ilie* - Şc. "Nicolae Iorga" Baia Mare
*Prof. Cristian Heuberger* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare

## Clasa a IX-a

**1.** Se consideră ecuaţia $x^2-3x-2=0$ cu rădăcinile $x_1>0$ şi $x_2<0$.

a) Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ numerele $S_n=x_1^n+x_2^n$ sunt numere naturale impare.

b) Să se arate că $[x_1^n]-n$ este un număr par pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

*Maria Pop*

**2.** Fie $A\subset[1,2]$ o mulţime de 2011 numere.

Să se arate că există două mulţimi $B$ şi $C$ astfel ca $B\cup C=A$, $B\cap C=\emptyset$ şi dacă notăm cu $S(B)$ şi $S(C)$ sumele numerelor din $B$, respectiv $C$, atunci sunt verificate inegalităţile:

$$\frac{502}{503}<\frac{S(B)}{S(C)}<1.$$

*Vasile Pop*

**3.** Fie $ABCD$ un patrulater convex şi $O$ intersecţia diagonalelor $AC$ şi $BD$. O dreaptă variabilă ce trece prin $O$ taie segmentele $AB$ şi $CD$ în $M$ şi $N$.

a) Să se arate că există o constantă $k$ astfel ca

$$S(AOM)\cdot S(DON)=k\cdot S(BOM)\cdot S(CON),$$

unde $S(AOM)$ este aria triunghiului $AOM$.

b) În ce condiţii $k=1$?

*Vasile Pop*

**Clasa a X-a**

**1.** Să se determine funcţiile $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ cu proprietatea:

$$3f(f(x))-8f(x)+4x=0,\quad \forall\, x\in\mathbb{Z}.$$

*Vasile Pop*

**2.** Se consideră ecuaţia $x^{[x]}=a$, cu necunoscuta $x>0$ şi parametrul $a>0$.

a) Să se arate că pentru $a=5$ ecuaţia are soluţie.

b) Să se arate că pentru $a=10$ ecuaţia nu are soluţie.

c) Să se determine valorile lui $a\in(0,\infty)$ pentru care ecuaţia are soluţie.

*Maria Pop*

**3.** Fie $A,B,C$ mărimile unghiurilor unui triunghi. Să se demonstreze inegalităţile:

$$\frac{1}{3}\le\frac{A\sin A+B\sin B+C\sin C}{(A+B+C)(\sin A+\sin B+\sin C)}<\frac{1}{2}\,.$$

*Vasile Pop*

**Clasa a XI-a**

**1.** Să se determine numărul numerelor care în baza 10 se scriu cu 15 cifre, toate fiind 1 sau 2, astfel ca în număr să avem trei secvenţe 12, două secvenţe 21, cinci secvenţe 11 şi patru secvenţe 22. (Exemplu: 111122122211122).

*Vasile Pop*

**2.** Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice fixată. Să se arate că ecuaţia

$$AX-XA=A$$

are soluţie $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă $A^2=0$.

*Vasile Pop*

**3.** Fie $a, b$ numere pozitive cu $a < b$ şi $f : (a, b) \to (a, b)$ o funcţie bijectivă cu proprietatea

$$f(x)f^{-1}(x) = x^2, \quad \forall\, x \in (a, b).$$

Să se arate că $f(x) = x$, $\forall\, x \in (a, b)$.

*Vasile Pop*

**Clasa a XII-a**

**1.** Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie continuă.
a) Să se arate că dacă există $n \geq 2$ astfel ca $f^n(x) = x$, $\forall\, x \in [0, 1]$, atunci

$$f^2(x) = x, \quad \forall\, x \in [0, 1].$$

b) Să se determine toate funcţiile continue pentru care $f^2(x) = x$, $\forall\, x \in [0, 1]$.

*Vasile Pop*

**2.** Fie $A$ o mulţime şi "$\circ$" $: A \times A \to A$ o lege de compoziţie pe $A$ cu proprietăţile:
1) $x \circ (x \circ y) = y$, $\forall\, x, y \in A$;
2) $(x \circ y) \circ y = x$, $\forall\, x, y \in A$.
a) Să se arate că legea este comutativă.
b) Să se dea exemplu de astfel de lege care este asociativă.
c) Să se dea exemplu de astfel de lege care nu este asociativă.

*Vasile Pop*

**3.** Să se decidă dacă există funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi care verifică una din relaţiile:
a) $f(F(x)) = 2x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
b) $f(F(x)) = 2x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

*Vasile Pop*

**Premianţii concursului "Argument", ediţia a III-a**

**Premiul I de excelenţă**. *Petruş Andrei*, cls. a IX-a, C. N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare; *Bretan Paula Alice*, cls. a X-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare; *Dicu Daria*, cls. a XI-a, C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei; *Petrovan Marius*, cls. a XII-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare.

**Premiul al II-lea**. *Bura Lucia*, cls. a IX-a, C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare; *Ţiplea Tudor*, cls. a X-a, C. N. "Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei; *Feier Florin*, cls. a XI-a, C. N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare; *Mihalca Daniel*, cls. a XII-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare.

**Premiul al III-lea**. *Cerrahoglu Ali*, cls. a IX-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare; *Raţiu Kinga*, cls. a IX-a, C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare; *Bora Cristina*, cls. a X-a, C. N. "Andrei Mureşanu" Dej; *Berce Vasile*, cls. a X-a, C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare; *Blaga Zelia*, cls. a XI-a, C. N. "Andrei Mureşanu" Dej.

**Menţiune specială**. *Muntean Sam*, cls. a IX-a, C. N. Dragoş Vodă" Sighetu Marmaţiei; *Stretea Roland*, *Fodoruţ Ioan*, cls. a IX-a, C. N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare; *Avram Diana*, cls. a IX-a, C. N. "Papiu Ilarian", Târgu Mureş; *Stanciu Alexander*, cls. a IX-a, C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare; *Vele Corina*, cls. a IX-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare, *Ofrim Adriana*, *Lupănescu Andreea*, cls. a X-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare; *Covaci Rareş*, *Tătar Mara*, cls. a X-a, C. N. "Papiu Ilarian" Târgu Mureş; *Tătar Antoniu*, cls. a XI-a, C. N. "Papiu Ilarian" Târgu Mureş; *Puicar Bogdan*, cls. a XI-a, C. N. "Bogdan Vodă" Sighetu Marmaţiei; *Vago Timea*, cls. a XI-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare; *Balint Florin*, *Petrican Teodor*, cls. a XII-a, C. N. "Andrei Mureşanu" Dej; *Lupan Andreea*, cls. a XII-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare.

**Menţiune**. *Bud Cristina*, *Miclea Andrei*, *Sântejudean Bogdan*, cls. a IX-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare; *Zicher Norbert*, cls. a XI-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare; *Tanko Noemi*, *Ignat Patricia*, cls. a XI-a, C. N. "Liviu Rebreanu" Bistriţa; *Miholca Diana*, clas. a XII-a, C. N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare; *Rusznak Erik*, *Kando Enikö*, cls. a XII-a, "Gheorghe Şincai" Baia Mare.

# Concursul "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni 26 aprilie 2012

**1.** Se consideră numerele:

$$a = 3 + 3 \times [60 + 24 : (8 - 4 : 2)] : 4;$$
$$b = [202 + 3 \times (4 \times 12 - 36 : 2)] \times (196 : 14 - 4 \times 7 : 2),$$

iar $c$ verifică relaţia $8 \times [(270 - 17 \times c) : 3 + 972 : 9] + 64 : 4 = 920$.

1) Aflaţi numerele $a$, $b$, $c$;

2) Să se arate că răsturnatul numărului $a + 2011 \times b$ este numărul $c + 2012 \times b$.

**2.** Patru copii au fiecare o sumă de bani. Dacă primul ar avea cu 3 lei mai puţin, al doilea cu 3 lei mai mult, al treilea de trei ori mai puţin, atunci toţi patru ar avea aceeaşi sumă de bani. Ştiind că al treilea şi al patrulea copil au împreună 40 de lei, să se afle:

1) Câţi lei are al patrulea copil?

2) Ce sumă de bani au cei patru copii în total?

**3.** Într-o sală de clasă sunt 20 de elevi. Primul elev scrie pe tablă numărul 1, al doilea scrie pe tablă numerele 2 şi 3, al treilea scrie numerele 4, 5 şi 6 şi aşa mai departe până la ultimul elev.

1) Care este suma numerele scrise pe tablă de al patrulea elev?

2) Câte numere s-au înscris pe tablă în total?

3) Să se arate că suma numerele scrise pe tablă este un număr impar;

4) În pauză un elev şterge la întâmplare 20 de numere din cele scrise pe tablă. Să se arate că suma numerelor rămase pe tablă nu poate fi 18000.

*Testul a fost elaborat de:*
*Prof. Cristian Heuberger* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare
*Prof. Florin Bojor* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare

# Rezolvarea problemelor din numărul anterior

## Clasa a IX-a

**1.** *Să se determine* $n \in \mathbb{N}^*$, *care verifică ecuaţia*

$$2^n + 3^n = 11n^2.$$

*Ionel Tudor*, Călugăreni, Giurgiu

**Soluţie.** Dacă $n$ este număr par nenul, atunci $2^n + 3^n$ este impar şi $11 \cdot n^2$ este par, deci ecuaţia nu are soluţie.

Numerele $n = 1$ şi $n = 3$ nu verifică ecuaţia, iar numărul $n = 5$ este soluţie.

Pentru $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, ecuaţia se scrie:

$$2(2^{n-1} - n^2) + 9(3^{n-2} - n^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2[(2^k)^2 - (2k+1)^2] + 9[3^{2k-1} - (2k+1)^2] = 0. \qquad (*)$$

Prin inducţie matematică, rezultă că $2^k > 2k + 1$ şi $3^{2k-1} > (2k + 1)^2$, $\forall\, k \geq 3$, de unde deducem că ecuaţia $(*)$ nu are soluţie. Aşadar, $S = \{5\}$.

**2.** *Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$x^2(1 - [x]) = 1 + \{x\}.$$

*Gheorghe Gherasin*, Sighetu Marmaţiei

**Soluţie.** Pentru $x \geq 1$ avem că $0 \geq x^2(1 - [x]) = 1 + \{x\} \geq 1$, contradicţie.

Pentru $x \in [0, 1]$ ecuaţia devine $x^2 = 1 + x \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\} \cap [0, 1) = \emptyset$.

Pentru $x \in [-1, 0)$ ecuaţia dată devine:

$$2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\} \cap [-1, 0),$$

deci $x = -\dfrac{1}{2}$ este soluţie.

Dacă $x < -1$, atunci $x^2(1 - [x]) > 2$, în timp ce $1 + \{x\} < 2$.

În concluzie, $x = -\dfrac{1}{2}$ este unica soluţie.

**3.** *Notăm cu* $l_a, l_b, l_c$ *lungimile bisectoarelor interioare unui triunghi* $ABC$, *notaţiile* $r, R, p$ *fiind cele uzuale.*

*Să se arate că:*

$$\frac{2rp^2}{R} \leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq \frac{3}{4}\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

*Ludovic Longaver*

**Soluţie.** Cu notaţiile obişnuite avem: $h_a \le l_a \le m_a$ şi analoagele. Aşadar,

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \ge h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \ge h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c = \frac{4S^2}{ab} + \frac{4S^2}{ac} + \frac{4S^2}{bc}$$
$$= \frac{4S^2}{abc}(a+b+c) = \frac{4S^2}{4RS}2p = \frac{2r \cdot p^2}{R}$$

şi

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Avem egalitate în oricare din cele două inegalităţi, rezultă că triunghiul $ABC$ este echilateral.

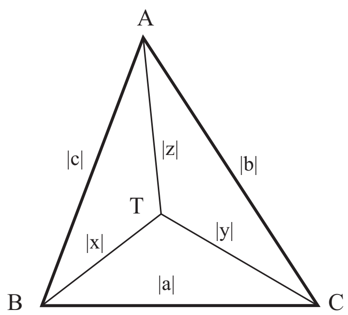
**4.** *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$, $c^2 < b^2 + a^2$.*
*Să se arate că sistemul*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + |xy| = a^2 \\ y^2 + z^2 + |yz| = b^2 \\ z^2 + x^2 + |zx| = c^2 \end{cases}$$

*este compatibil.*

*Ludovic Longaver*

**Soluţie.** $(|b| + |c|)^2 = b^2 + c^2 + 2|bc| > a^2 + 2|bc| \ge a^2 \Rightarrow |b| + |c| > |a|$, analog $|a| + |c| > |b|$, şi $|a| + |b| > |c|$.




Condiţiile de mai sus asigură existenţa unui triunghi $ABC$, având laturile de lungimi $|a|$, $|b|$, $|c|$. Triunghiul $ABC$ este ascuţitunghic, întrucât $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2|b| \cdot |c|} > 0$, analog $\cos B > 0$, $\cos C > 0$.

Se cunoaşte că există în interiorul triunghiului $ABC$ un punct $T$ (punctul lui Toricelli) din care laturile se văd sub unghiuri de $120°$. Notăm cu $|x|$, $|y|$, $|z|$, respectiv lungimile segmentelor $TB$, $TC$, $TA$. Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile $TBC$, $TCA$, $TAB$:

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 + |x \cdot y| \\ b^2 = y^2 + z^2 + |y \cdot z| \\ c^2 = z^2 + x^2 + |z \cdot x| \end{cases}$$

, ceea ce ne arată că lungimile segmentelor $TA$, $TB$, $TC$ sunt soluţii pentru sistem, astfel sistemul este compatibil.

**5.** *Să se determine*
$$\min\left\{n\in\mathbb{N}/\frac{1}{100}<\{\sqrt{n}\}<\frac{1}{10}\right\},$$
*unde* $\{x\}$ *reprezintă partea fracţionară a numărului real* $x$.

*Dorin Mărghidanu*, Corabia

**Soluţie.** Fie $\sqrt{n}=k+f$, unde $k=\left[\sqrt{n}\right]\in\mathbb{N}$ şi $f=\left\{\sqrt{n}\right\}\in[0,1)$, sunt partea întreagă şi respectiv partea fracţionară a numărului $\sqrt{n}$. Din condiţiile problemei avem:
$$\frac{1}{100}<f<\frac{1}{10}\Leftrightarrow k+\frac{1}{100}<k+f<k+\frac{1}{10}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k+\frac{1}{100}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{10}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2+0,02\cdot k+0,0001<n<k^2+0,2\cdot k+0,01. \qquad (*)$$
După cum se poate uşor observa, inegalitatea $(*)$ nu poate avea loc în $\mathbb{N}$ pentru $k=0,1,2,3,4$.

Pentru $k=5$, avem cu relaţia $(*)$:
$$25+0,1+0,0001<n<25+1+0,01\Leftrightarrow 25,1001<n<26,01,$$
deci $n=26$, care este cel mai mic număr natural ce verifică condiţiile enunţului.

**6.** *Dacă* $0\le a_k\le k$, $(\forall)\,k\in\{1,2,\ldots,n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, *să se demonstreze că:*
$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n+(1-a_1)(2-a_2)\cdot\ldots\cdot(n-a_n)<n!$$

*Dorin Mărghidanu*, Corabia

**Soluţie.** Avem în mod evident următoarea afirmaţie:

Dacă $a_k,b_k\ge 0$, $k\in\overline{1,n}$, atunci
$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdot\ldots\cdot(a_n+b_n)\ge a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n+b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n \qquad (*)$$
(deoarece în dezvoltarea produsului din membrul stâng s-au reţinut doar primul şi ultimul termen). Egalitatea se obţine dacă $n=1$ sau $n$ oarecare şi $a_i=0$ sau $b_i=0$. Luând în $(*)$ $b_k=k-a_k$, pentru care în condiţiile enunţului avem $b_k\ge 0$ şi $a_k+b_k=k$, $\forall\,k\in\overline{1,n}$, se obţine:
$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\ge a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n+(1-a_1)(2-a_2)\cdot\ldots\cdot(n-a_n),$$
adică inegalitatea din enunţ. Egalitatea se obţine dacă $n=1$, sau $n$ oarecare şi $a_k=0$ sau $a_k=k$.

**7.** *Să se demonstreze că:*
$$\sum_{k=1}^{2n(n+1)}\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}}<n<\sum_{k=1}^{2n(n+1)}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}}.$$

*Dorin Mărghidanu*, Corabia

**Soluţie.** Fie

$$A = \sum_{k=1}^{2n(n+1)} \frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}} \quad \text{şi} \quad B = \sum_{k=1}^{2n(n+1)} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}}.$$

Cum $\dfrac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}}$, rezultă că

$$A < B. \tag{1}$$

Mai avem (prin raţionalizarea numitorilor),

$$\begin{aligned} B + A &= \sum_{k=1}^{2n(n+1)} \left(\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1}\right) + \sum_{k=1}^{2n(n+1)} \left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n(n+1)} \left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right) \\ &= \left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\cdots+\left(\sqrt{4n(n+1)+1}-\sqrt{4n(n+1)-1}\right) \\ &= \sqrt{4n(n+1)+1}-1 = \sqrt{(2n+1)^2}-1 = 2n. \end{aligned}$$

Deci

$$A + B = 2n. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) avem, pe de o parte $2A < A + B = 2n$, adică $A < n$, iar pe de altă parte $2B > A + B = 2n$, adică $B > n$.

**8.** *Dacă $x, y, z, t > 0$, atunci:*

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) \geq \left(\frac{x+y}{\sqrt{xy}}+\frac{z+t}{\sqrt{zt}}\right)^2 \geq 16.$$

*D. M. Bătineţu-Giurgiu*

**Soluţie.** Fie $x + y = u$, $z + t = v$, $xy = w^2$, $zt = \omega^2$. Atunci

$$\begin{aligned} (x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) &= (u+v)\left(\frac{u}{w^2}+\frac{v}{\omega^2}\right) \\ = \frac{u^2}{w^2}+\frac{uv}{\omega^2}+\frac{uv}{w^2}+\frac{v^2}{\omega^2} &\geq \left(\frac{u}{w}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{u^2v^2}{w^2\omega^2}} + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u}{w}\right)^2 + 2\frac{u}{w}\cdot\frac{v}{\omega} + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ = \left(\frac{x+y}{\sqrt{xy}}+\frac{z+t}{\sqrt{zt}}\right)^2 &\geq \left(\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}+\frac{2\sqrt{zt}}{\sqrt{zt}}\right)^2 = 4^2 = 16 \end{aligned}$$

cu egalitate, dacă $x = y = z = t$.

**9.** *Dacă $a, b, m, n \in \mathbb{R}_+^*$, atunci:*

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{\sqrt{(ma+nb)(mb+na)}}{m+n} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

*D. M. Bătineţu-Giurgiu*

**Soluţie.** Deoarece $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\forall\, a, b > 0$, vom demonstra că

$$\sqrt{ab} \leq \frac{\sqrt{(ma+nb)(mb+na)}}{m+n} \leq \frac{a+b}{2}$$

şi atunci se obţin inegalităţile de demonstrat.

Prima inegalitate devine:

$$(m+n)\sqrt{ab} \leq \sqrt{(ma+nb)(mb+na)} \Leftrightarrow (m+n)^2 ab$$
$$\leq m^2 ab + n^2 ab + mn(a^2+b^2) \Leftrightarrow mn(a-b)^2 \geq 0,$$

ceea ce este evident. Avem egalitate, rezultă $a = b$.

A doua inegalitate se scrie:

$$2\sqrt{(ma+nb)(mb+na)} \leq (a+b)(m+n) \Leftrightarrow 4(ma+nb)(mb+na)$$
$$\leq (a+b)^2(m+n)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(m-n)^2 \geq 0,$$

ceea ce este evident. Avem egalitate, rezultă $a = b$ sau $m = n$.

**10.** *Să se arate că dacă $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi*

$$x^2 + \sqrt{a^{2^n} + b^{2^n}} \cdot x + 1 \geq 0, \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R},$$

*atunci $x^2 + \sqrt{a^{2^k} + b^{2^k}} \cdot x + 1 \geq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.*

*Nicolae Muşuroia*

**Soluţie.** Trebuie să arătăm că $\Delta_k = a^{2^k} + b^{2^k} - 4 \leq 0$, $\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Din $x^2 + \sqrt{a^{2^n} + b^{2^n}} \cdot x + 1 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că $\Delta_n = a^{2^n} + b^{2^n} - 4 \leq 0$. Atunci $a^{2^n} \leq a^{2^n} + b^{2^n} \leq 4$, deci $a^{2^{n-1}} \leq 2$. Analog $b^{2^{n-1}} \leq 2$.
Obţinem $\Delta_{n-1} = a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}} \leq 4$, deci $x^2 + \sqrt{a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}}} \cdot x + 1 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Din aproape în aproape obţinem $\Delta_1 \leq 0$ şi de aici $\Delta_0 \leq 0$.

**11.** *Se consideră triunghiul $ABC$, în care*

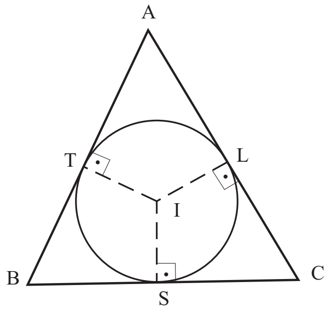
$$\max\left\{\frac{IA^2}{bc}, \frac{IB^2}{ac}, \frac{IC^2}{ab}\right\} = \frac{1}{3},$$

*unde $I$ reprezintă centrul cercului înscris.*

*Să se arate că triunghiul $ABC$ este echilateral.*

*Nicolae Muşuroia*

**Soluţie.** Notăm cu $T, S, L$ punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile $AB$, $BC$ respectiv $AC$.




Din $AT = AL$, $BT = SB$ şi $CS = CL$, obţinem $AT = AL = p - a$, $BT = SB = p - b$, $CS = CL = p - c$.

$$IA^2 = AT^2 + r^2 = (p-a)^2 + \left(\frac{S}{p}\right)^2 = (p-a)^2 + \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}$$
$$= \frac{p-a}{p}\left[p(p-a) + (p-b)(p-c)\right] = \frac{p-a}{p}\, bc.$$

Atunci

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ac} + \frac{IC^2}{ab} = 1.$$

Dar $\dfrac{IA^2}{bc} \le \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{IB^2}{ac} \le \dfrac{1}{3}$ şi $\dfrac{IC^2}{ab} \le \dfrac{1}{3}$. Obţinem $\dfrac{IA^2}{bc} = \dfrac{IB^2}{ac} = \dfrac{IC^2}{ab}$, deci $\dfrac{p-a}{p} = \dfrac{p-b}{p} = \dfrac{p-c}{c}$.

Rezultă $a = b = c$.

**12.** *Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $a + b + c = abc$, atunci:*

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \ge 64.$$

*Nicolae Muşuroia*

**Soluţie.** Din $a + b + c = abc$ rezultă $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{ab} = 1$. Atunci

$$1 + a^2 = a^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) = a^2\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2}\right)$$
$$= a^2\left[\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]$$
$$= a^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = \frac{(a+b)(a+c)}{bc} \ge \frac{4a\sqrt{bc}}{bc} = \frac{4a}{\sqrt{bc}}.$$

Obţinem

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq 64\frac{a}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{\sqrt{ab}} = 64$$

cu egalitate pentru $a = b = c = \sqrt{3}$.

**13.** *Se consideră triunghiul $ABC$ şi punctele $M, Q \in (AB)$, $N, P \in (AC)$, astfel încât*

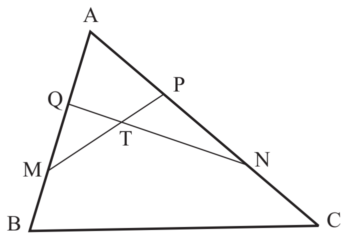
$$\frac{MB}{MA} = \frac{QA}{QB} = \frac{PA}{PC} = \frac{NC}{NA} = k \in (0,1).$$

*Fie $\{T\} = MP \cap NQ$ şi $G$ centrul de greutate al triunghiului.*
*a) Să se demonstreze că $G, T, A$ sunt coliniare.*
*b) Să se demonstreze că $T \in (AG)$.*
*c) Să se arate că*

$$AT + BT + CT > \frac{k^2 - k + 1}{(1+k)^2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}\,.$$

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** a) $T$ este punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului $MNPQ$, deci punctele $A, T$ şi mijlocul $A'$ al segmentului $[BC]$ sunt coliniare. Cum $G \in (AA')$, rezultă concluzia.




b) Notăm $\dfrac{TQ}{TN} = \alpha$ şi $\dfrac{TP}{TM} = \beta$. Obţinem

$$\overrightarrow{XT} = \frac{\overrightarrow{XQ} + \alpha\overrightarrow{XN}}{1+\alpha} = \frac{\overrightarrow{XP} + \beta\overrightarrow{XM}}{1+\beta}\,. \tag{1}$$

Avem $\forall X \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{XM} = \dfrac{\overrightarrow{XB} + k\overrightarrow{XA}}{1+k}$, $\overrightarrow{XP} = \dfrac{\overrightarrow{XA} + k\overrightarrow{XC}}{1+k}$, $\overrightarrow{XQ} = \dfrac{\overrightarrow{XA} + k\overrightarrow{XB}}{1+k}$, $\overrightarrow{XN} = \dfrac{\overrightarrow{XC} + k\overrightarrow{XA}}{1+k}$.

Înlocuind în (1) rezultă

$$\frac{1+k\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{XA} + \frac{k}{1+\alpha}\overrightarrow{XB} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{XC} = \frac{1+k\beta}{1+\beta}\overrightarrow{XA} + \frac{\beta}{1+\beta}\overrightarrow{XB} + \frac{k}{1+\beta}\overrightarrow{XC}. \tag{2}$$

Punând $X = C$ în (2) şi ţinând cont de unicitatea coordonatelor în baza $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, deducem

$$\frac{1+k\alpha}{1+\alpha} = \frac{1+k\beta}{1+\beta} \tag{3}$$

şi

$$\frac{k}{1+\alpha} = \frac{\beta}{1+\beta}\,. \tag{4}$$

Punând $X + B$ în (2) şi ţinând cont de unicitatea coordonatelor în baza $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, deducem

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{k}{1+\beta}\,. \tag{5}$$

Din (4) şi (5) rezultă $\beta = \dfrac{k^2}{\alpha}$ şi înlocuind în (3) obţinem că $\alpha = \beta = k$. Din (1) rezultă:

$$\begin{aligned}\forall\, X \in \mathcal{P},\ \overrightarrow{XT} &= \frac{(1+k^2)\overrightarrow{XA} + k\overrightarrow{XB} + k\overrightarrow{XC}}{(1+k)^2}\\ &= \frac{(1-k+k^2)\overrightarrow{XA} + k(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})}{(1+k)^2}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Punând $X = G$ în (6), rezultă $\overrightarrow{GT} = \dfrac{1-k+k^2}{(1+k)^2}\overrightarrow{GA}$.

Aşadar $GT = \dfrac{1-k+k^2}{(1+k)^2}GA < GA$, deci $T \in (AG)$.

c) Din (6) deducem $\overrightarrow{AT} = \dfrac{k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}{(1+k)^2}$, $\overrightarrow{BT} = \dfrac{(1+k^2)\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{BC}}{(1+k)^2}$, $\overrightarrow{CT} = \dfrac{(1+k^2)\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}}{(1+k)^2}$ şi

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \frac{(-1+k-k^2)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}{(1+k)^2} = -\frac{(1-k+k^2)2\overrightarrow{AA'}}{(1+k)^2}\,.$$

Aşadar

$$AT + BT + CT > \frac{2(k^2-k+1)}{(1+k)^2}AA' = \frac{k^2-k+1}{(1+k)^2}\sqrt{2(AB^2+AC^2) - BC^2}.$$

**14.** *Fie $a < b < c$ cifre nenule. Demonstraţi că*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{5a+2b+5c}{8160}\,.$$

*Când are loc egalitatea?*

*Cristinel Mortici*

**Soluţie.** Avem

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2}+\frac{k}{2(b+c)(a+c)(a+b)}, \tag{1}$$

unde

$$k=2a^3+2b^3+2c^3-ab^2-a^2b-ac^2-a^2c-bc^2-b^2c.$$

Însă

$$b-a\geq 1,\ c-b\geq 1 \quad \text{şi} \quad c-a\geq 2, \tag{2}$$

deci

$$\begin{aligned}
a^3+b^3-ab^2-a^2b&=(a+b)(b-a)^2\geq a+b\\
b^3+c^3-bc^2-b^2c&=(b+c)(c-b)^2\geq b+c\\
c^3+a^3-ca^2-c^2a&=(a+c)(c-a)^2\geq 4(a+c)
\end{aligned}$$

şi prin adunare, $k\geq 5a+2b+5c$. În (1) obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&\geq\frac{3}{2}+\frac{5a+2b+5c}{2(b+c)(a+c)(a+b)}\\
&\geq\frac{3}{2}+\frac{5a+2b+5c}{2(8+9)(7+9)(7+8)}\\
&=\frac{3}{2}+\frac{5a+2b+5c}{8160},
\end{aligned}$$

unde am folosit $a\leq 7$, $b\leq 8$, $c\leq 9$.

Egalitate are loc pentru $a=7$, $b=8$, $c=9$.

**15.** *Fie $m,n,p,q,r$ numere prime, astfel încât*

$$m^4+n^4+p^4+q^4=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2r-1)+1555.$$

*Demonstraţi că $m=n=p=q=r=5$.*

*Cristinel Mortici*

**Soluţie.** Nu sunt soluţii pentru $r=2$.

Pentru $r\geq 3$, $1\cdot 3\ldots(2r-1)$ se divide cu 5, deci $m^4+n^4+p^4+q^4$ se divide cu 5.

$x^4$ dă restul 0 sau 1 la împărţirea cu 5, deci $m,n,p,q$ se divid cu 5.

Dar ele sunt prime, deci $m=n=p=q=5$, apoi $r=5$.

## Clasa a X-a

**1.** *Se consideră numerele complexe distincte $z_1,z_2,z_3$, de acelaşi modul, astfel încât*

$$\frac{z_2^2+z_3^2}{z_1^2},\frac{z_3^2+z_1^2}{z_2^2},\frac{z_1^2+z_2^2}{z_3^2}\in\mathbb{R}.$$

*Să se demonstreze că triunghiul care are vârfurile de afixe $z_1, z_2, z_3$ este dreptunghic sau isoscel.*

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** Notăm $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$. Fie $M_1, M_2, M_3$ respectiv imaginile numerelor $z_1, z_2, z_3$.

$$\frac{z_2^2 + z_3^2}{z_1^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_2^2 + z_3^2}{z_1^2} + 1 = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z_1^2} \in \mathbb{R}.$$

Analog obţinem $\dfrac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z_2^2}$, $\dfrac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z_3^2} \in \mathbb{R}$.

1) Dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \neq 0$, atunci din

$$\left|\frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z_1^2}\right| = \left|\frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z_2^2}\right| = \left|\frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z_3^2}\right|$$

deducem că exact două dintre numerele $z_1^2, z_2^2, z_3^2$ coincid.

Dacă $z_1^2 = z_2^2$, obţinem $z_2 = -z_1$ şi din ipoteză rezultă că $\dfrac{z_1^2}{z_3^2} \in \mathbb{R}$, deci există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $z_3^2 = k \cdot z_1^2$. Trecând la module, obţinem $|k| = 1$, deci $k = \pm 1$, apoi $z_3^2 = -z_1^2$ şi $z_3 = \pm i \cdot z_1$, iar triunghiul este dreptunghic.
Celelalte două cazuri conduc la aceeaşi concluzie.

2) Dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, fie $\alpha = z_1^2$, $\beta = z_2^2$, $\gamma = z_3^2$.

Deoarece $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ |\alpha| = |\beta| = |\gamma| \end{cases}$, triunghiul cu vârfurile de afixe $\alpha, \beta, \gamma$ este echilateral.

Aşadar, pentru $\varepsilon \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ o rădăcină de ordinul 3 a unităţii, avem $\beta = \varepsilon \cdot \alpha$ şi $\gamma = \varepsilon^2 \cdot \alpha$. Obţinem $z^2 = \varepsilon \cdot z_1^2 = \varepsilon^4 \cdot z_1^2$ şi $z_3^2 = \varepsilon^2 \cdot z_1^2$, deci $\begin{cases} z_2 = \pm \varepsilon^2 \cdot z_1 \\ z_3 = \pm \varepsilon \cdot z_1 \end{cases}$.

Dacă $\begin{cases} z_2 = \varepsilon^2 \cdot z_1 \\ z_3 = \varepsilon \cdot z_1 \end{cases}$, atunci triunghiul este echilateral, iar în celelalte cazuri rezultă că triunghiul este isoscel.

**2.** *Se consideră $a \in \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{N}^*$, cu $(n, k) = 1$ şi ecuaţia*

$$\{a^k\}x^2 - 4\{a^n\}x + 6 = 0.$$

*a) Să se arate că dacă rădăcinile ecuaţiei sunt numere întregi, atunci $a \in \mathbb{Q}$.*

*b) Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ există o infinitate de valori ale lui $a > 1$, astfel încât ecuaţia*

$$\{a^{2n+1}\}x^2 - 4\{a^n\}x + 6 = 0$$

*să aibă rădăcinile întregi.*

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** a) **I**. Dacă $\begin{cases} a^k \in \mathbb{Z} \\ a^n \in \mathbb{Z} \end{cases}$, obţinem $6 = 0$, fals.

**II**. Dacă $\begin{cases} a^k \in \mathbb{Z} \\ a^n \notin \mathbb{Z} \end{cases}$, ecuaţia are soluţia $x = \dfrac{3}{2\{a^n\}} \in \mathbb{Z}$, de unde deducem că $\{a^n\} \in \mathbb{Q}$, adică $a^n \in \mathbb{Q}$. Atunci, deoarece există $p, q \in \mathbb{Z}$ astfel ca $nq + kp = 1$, obţinem că $a = (a^n)^q \cdot (a^k)^p \in \mathbb{Q}$.

**III**. Dacă $a^k \notin \mathbb{Z}$, atunci ecuaţia este de gradul al doilea. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ rădăcinile ecuaţiei. Rezultă $x_1x_2 = \dfrac{6}{\{a^k\}}$, deci $\{a^k\} = \dfrac{6}{x_1x_2} \in \mathbb{Q}$, adică $a^k \in \mathbb{Q}$ şi apoi $x_1 + x_2 = \dfrac{4\{a^n\}}{\{a^k\}} = \dfrac{2x_1x_2}{3}\{a^n\} \in \mathbb{N}$, deci $\{a^n\} \in \mathbb{Q}$, adică $a^n \in \mathbb{Q}$. Ca în cazul **II**, deducem că $a \in \mathbb{Q}$.

b) Observăm că pentru $a = \dfrac{1}{2}$, ecuaţia devine $\dfrac{x^2}{2^{2n+1}} - \dfrac{4x}{2^n} + 6 = 0$, adică $x^2 - 2^{n+3}x + 3 \cdot 2^{2n+2} = 0$, cu soluţiile $x_1 = 2^{n+1}$ şi $x_2 = 3 \cdot 2^{n+1}$.
Apoi, pentru orice $s \in \mathbb{N}^*$ $a_s = 2^{2n} \cdot s + \dfrac{1}{2}$ este o soluţie a problemei, deoarece, folosind binomul lui Newton, deducem că $\{a_s^{2n+1}\} = \dfrac{1}{2^{2n+1}}$ şi $\{a_2^n\} = \dfrac{1}{2^n}$ şi obţinem ecuaţia de mai înainte, cu soluţiile întregi.

**3.** *Să se determine şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale, astfel încât $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$,*

$$a_1 \cdot a_{a_1} + a_2 \cdot a_{a_2} + \cdots + a_n \cdot a_{a_n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** Avem $a_1 \cdot a_{a_1} = 1$. Scăzând din relaţia din enunţ pe cea pentru $n - 1$, obţinem că $\forall n \geq 2$, $a_n \cdot a_{a_n} = n^2$, deci

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \cdot a_{a_n} = n^2.$$

Demonstrăm că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n$.

Pentru $n = 1$, din $a_1 \cdot a_{a_1} = 1$, deoarece numerele sunt naturale, rezultă că $a_1 = a_{a_1} = 1$.

Presupunem că pentru $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\forall t = \overline{1, k-1}$, $a_t = t$.
Avem $a_k \cdot a_{a_k} = k^2$.

Presupunem că $a_k = s < k$. Din ipoteza de inducţie deducem că $a_{a_k} = a_s = s < k$, deci $a_k \cdot a_{a_k} = s^2 < k^2$, fals.

Presupunem că $a_k = s > k$. Deducem $a_s = a_{a_k} = \dfrac{k^2}{a_k} = \dfrac{k^2}{s} < \dfrac{k^2}{k} = k$, deci

$$a_{a_k} \cdot a_{a_{a_k}} = \frac{k^2}{s} \cdot a_{a_s} = \frac{k^2}{s} \cdot a_{\frac{k^2}{s}} \overset{ip\ ind}{=} \frac{k^2}{s} \cdot \frac{k^2}{s} = \frac{k^4}{s^2} < \frac{k^4}{k^2} = k^2,\ \text{fals}.$$

Aşadar $a_k = k$, deci $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n$.

**4.** *Să se arate că:*

$$(\operatorname{arctg} x)^2 + \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)^2 \geq \frac{\pi^2}{8}, \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}^*.$$

*D. M. Bătineţu-Giurgiu*

**Soluţie.** Se ştie că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este convexă pe $\mathbb{R}$ şi atunci, conform inegalităţii Jensen, avem:

$$f(a) + f(b) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Deci luând $a = \operatorname{arctg} x$, $b = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, rezultă că:

$$(\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arctg} \frac{1}{x})^2 \geq 2\left(\frac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Deoarece $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in (0, \infty)$, rezultă că (2) ne conduce la

$$(\operatorname{arctg} x)^2 + \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)^2 \geq 2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{8}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,$$

adică relaţia enunţului. Egalitate avem atunci când $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

**5.** *Să se arate că în orice triunghi au loc inegalităţile:*

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{\sqrt{3}}{r} \geq \frac{9}{p},$$

*notaţiile fiind cele obişnuite.*

*Gheorghe Râmbu*, matematician

**Soluţie.** Funcţia $\operatorname{tg} x$ este convexă pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi atunci, aplicând inegalitatea lui Jensen, obţinem:

$$\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right)\right) \geq \operatorname{tg}\left(\frac{A+B+C}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right) \geq \sqrt{3} \tag{3}$$

Dar

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = \frac{S}{p(p-a)}$$

şi analoagele.
Înlocuind în $(*)$, obţinem

$$\sum \frac{S}{p(p-a)} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \sum \frac{r}{(p-a)} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{(p-a)} \geq \frac{\sqrt{3}}{r}.$$

Inegalitatea $\frac{\sqrt{3}}{r} \geq \frac{9}{p}$ este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} &p^2 \geq 3 \cdot S \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow p^4 \geq 27 \cdot p(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow \\ &p^3 \geq 27(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow (p-a+p-b+p-c)^3 \\ &\quad \geq 27(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow p-a+p-b+p-c \\ &\quad \geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

care este adevărată, reprezentând inegalitatea mediilor de ordinul 3.

În concluzie rezultă

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{\sqrt{3}}{r} \geq \frac{9}{p}.$$

Se observă că a fost întărită inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz, adică

$$\sum (p-a) \sum \frac{1}{p-a} \geq 9.$$

**6.** *Se consideră mulţimea* $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
*Să se determine numărul perechilor* $(A, B)$ *care satisfac condiţiile:* $A \cup B = M$ *şi* $card(A \cap B) \leq 2$.

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Dacă $n = 1$, atunci ecuaţia are 3 soluţii şi anume: $(\emptyset, M)$; $(M, \emptyset)$; $(M, M)$.

Dacă $n \geq 2$, atunci presupunând că $A \cap B$ are $k$ elemente ($k \in \overline{1, 2}$), acestea se pot alege în $C_n^k$ moduri. La fiecare din aceste posibilităţi, orice alt element din $M$ (diferit de cele $k$ alese) poate fi pus în $A \backslash B$ sau în $B \backslash A$ în 2 moduri.

Aşadar, există $C_n^k \cdot 2^{n-k}$ posibilităţi. Numărul cerut este

$$\sum_{k=0}^{2} C_n^k 2^{n-k} = 2^n + n \cdot 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} = 2^{n-3}(n^2 + 3n + 8).$$

**7.** *Se consideră mulţimea* $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
*Să se determine numărul de perechi* $(A, B)$ *ştiind că îndeplinesc condiţiile:*
$A \cup B = M$ *şi* $card(A \cap B)$ *este număr par.*

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Dacă $A \cap B$ are $2k$ elemente, $k \in \overline{0, n}$, atunci acestea se pot alege în $C_{2n}^{2k}$ moduri. Pentru fiecare element $x$ din $M$, mai puţin cele $2k$ alese, există două

posibilităţi ($x \in A$ sau $x \notin B$ sau $x \in B$ şi $x \notin A$).
Cu principiul produsului, deducem că numărul cerut este

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} \cdot 2^{2n-2k} = 4^n \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} \cdot \frac{1}{2^{2k}} = 4^n \cdot T_n.$$

Deoarece

$$(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} x^k + \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k}(-x)^k = 2\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} x^{2k},$$

punând $x = \dfrac{1}{2}$, deducem că

$$T_n = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(1-\frac{1}{2}\right)^{2n}\right] = \frac{3^{2n}+1}{2^{2n+1}},$$

deci

$$a_n = \frac{3^{2n}+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

**8.** *Să se rezolve ecuaţia:*

$$13^{\log_3 |4x-1|} - 2 \cdot 9^{\log_{13}(32x^2-16x+9)} = 7.$$

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Este necesar ca $x \neq \dfrac{1}{4}$. Ecuaţia se scrie:

$$13^{\log_9 (4x-1)^2} - 2 \cdot 9^{\log_{13}(32x^2-16x+9)} = 7.$$

Cu notaţiile $a = \log_9(4x-1)^2$ şi $b = \log_{13}(32x^2-16x+9)$, obţinem că

$$13^a - 2 \cdot 9^b = 7 \tag{1}$$

şi

$$\begin{cases} (4x-1)^2 = 9^a \\ 32x^2 - 16x + 9 = 13^b \end{cases} \Rightarrow 13^b - 2 \cdot 9^a = 7. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem că $13^a + 2 \cdot 9^a = 13^b + 2 \cdot 9^b$, deci $a = b$, deoarece funcţia $f(x) = 13^x + 2 \cdot 9^x$, $x \in \mathbb{R}$, este injectivă fiind strict crescătoare.
Atunci relaţia (2) devine: $13^a = 2 \cdot 9^a + 7 \Leftrightarrow \left(\dfrac{13}{9}\right)^a = 2 + 7\left(\dfrac{1}{9}\right)^a \Leftrightarrow a = 2$ este unica soluţie căci funcţiile din cei doi membri au monotonii stricte şi diferite.

Aşadar, $\log_9(4x-1)^2 = 2 = \log_{13}[2(4x-1)^2 + 7] \Leftrightarrow (4x-1)^2 = 81 \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{5}{2}; -2\right\}$. Soluţia este $S = \left\{-2; \dfrac{5}{2}\right\}$.

**9.** *a) Exprimaţi* $(C_{n+1}^k)^2 - (C_n^{k-1})^2$, *în funcţie de* $(C_n^k)^2$, $k \in \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
*b) Să se arate că:*

$$1 + \frac{n+2}{n}(C_n^1) + \frac{n+3}{n-1}(C_n^2)^2 + \cdots + \frac{2n+1}{1}(C_n^n)^2 = C_{2n+2}^{n+1} - C_{2n}^n,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

*Ionel Tudor*, Călugăreni, Giurgiu

**Soluţie.** a) Folosind formula de descompunere a combinărilor, obţinem succesiv:

$$\begin{aligned}
(C_{n+1}^k)^2 - (C_n^{k-1})^2 &= (C_{n+1}^k - C_n^{k-1})(C_{n+1}^k + C_n^{k-1})\\
&= (C_n^k + C_n^{k-1} - C_n^{k-1})\left(\frac{n+1}{k}\,C_n^{k-1} + C_n^{k-1}\right)\\
&= C_n^k \frac{n+k+1}{k}\,C_n^{k-1} = \frac{n+k+1}{k}(C_n^k)^2 \frac{C_n^{k-1}}{C_n^k}\\
&= \frac{n+k+1}{k}\,(C_n^k)^2 \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{k!(n-k)!}{n!}\\
&= \frac{n+k+1}{n-k+1}\,(C_n^k)^2.
\end{aligned}$$

Deci

$$(C_{n+1}^k)^2 - (C_n^{k-1})^2 = \frac{n+k+1}{n-k+1}\,(C_n^k)^2, \quad \forall\, k = \overline{1,n}.$$

b) Trebuie să arătăm că:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{n-k+1}\,(C_n^k)^2 = C_{2n+2}^{n+1} - C_{2n}^n.$$

Folosind relaţia găsită la punctul a), scriem succesiv:

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{n-k-1}\,(C_n^k)^2 &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left[(C_{n+1}^k)^2 - (C_n^{k-1})^2\right]\\
&= 1 + \left[C_{2(n+1)}^{n+1} - (C_{n+1}^0)^2 - (C_{n+1}^{n+1})^2\right] - \left[C_{2n}^n - (C_n^n)^2\right]\\
&= 1 + C_{2n+2}^{n+1} - 1 - 1 - C_{2n}^n + 1 = C_{2n+2}^{n+1} - C_{2n}^n.
\end{aligned}$$

**10.** *Să se determine* $a, b \in \mathbb{R}$, *dacă*

$$\begin{cases} a \cdot b & \geq 5 \\ 2^{a^2} + 2^{b^2} & \leq 64. \end{cases}$$

*Nicolae Muşuroia*

**Soluţie.** Avem succesiv:

$$\begin{aligned}
64 &\geq 2^{a^2} + 2^{b^2} \geq 2\sqrt{2^{a^2}\cdot 2^{b^2}} = 2\sqrt{2^{a^2+b^2}} \geq 2\sqrt{2^{2ab}}\\
&\geq 2\sqrt{2^{2\cdot 5}} = 64.
\end{aligned}$$

Deci avem egalitate în inegalitatea mediilor. Prin urmare $2^{a^2} = 2^{b^2}$, deci $a^2 = b^2$.

*Cazul* 1. $a = b$

Sistemul devine: $\begin{cases} a^2 \geq 5 \\ 2^{a^2} \leq 32 \end{cases}$, deci $a^2 = 5$. Obţinem $a_1 = \sqrt{5}$, $b_1 = \sqrt{5}$ şi $a_2 = -\sqrt{5}$, $b_2 = -\sqrt{5}$.

*Cazul* 2. $a = -b$

Din $ab \geq 5$ rezultă $-a^2 \geq 5$, deci fals.

**11.** *a) Să se construiască o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că ecuaţia $f(x) = t$ are exact 2 soluţii distincte în $\mathbb{R}$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$.*

*b) Să se construiască o funcţie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cu proprietatea că ecuaţia $g(x) = z$ are exact 2 soluţii distincte în $\mathbb{C}$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$.*

*Ion Savu*

**Soluţie.** a) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left[\dfrac{[x]}{2}\right] + \{x\}$, verifică cerinţa.

b) Funcţia $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(x) = \left[\dfrac{[\mathcal{R}e(x)]}{2}\right] + \{\mathcal{R}e(x)\} + i \cdot Im(x)$ verifică cerinţa.

**12.** *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} 2^x + 3^x = 3y + 2 \\ 2^y + 3^y = 3z + 2 \\ 2^z + 3^z = 3x + 2. \end{cases}$$

*Nicolae Muşuroia*

**Soluţie.** Dacă $x \leq y$ rezultă $2^x + 3^x \leq 2^y + 3^y$, deci $3y + 2 \leq 3z + 2$, adică $y \leq z$. Atunci $2^y + 3^y \leq 2^z + 3^z$, deci $3z + 2 \leq 3x + 2$, adică $z \leq x$. Obţinem $x \leq y \leq z \leq x$, deci $x = y = z$.

Din prima ecuaţie a sistemului rezultă:

$$2^x + 3^x = 3x + 2. \tag{1}$$

În (1), membrul stâng reprezintă o funcţie strict convexă iar membrul drept o funcţie liniară. Atunci ecuaţia (1) are cel mult două soluţii.
Obţinem $x = y = z = 0$ şi $x = y = z = 1$.

**13.** *Se consideră numerele $a, b, c \in (1, 2]$. Să se arate că:*

$$\log_a(4b^2 - 5b + 2) + \log_b(4c^2 - 5c + 2) + \log_c(4a^2 - 5a + 2) \geq 9.$$

*Când are loc egalitate?*

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Pentru $x \in [1, 2]$ avem:

$x^3 \leq 4x^2 - 5x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) \leq 0$, adevărată. Atunci $\log_a(4b^2 - 5b + 2) \geq \log_a b^3 = 3\log_a b$ şi analoagele. Atunci

$$S = \sum_{cycl} \log_a(4b^2 - 5b + 2) \geq 3 \sum_{cycl} \log_a b \overset{ineg.\,med.}{\geq} 3 \cdot 3 = 9.$$

Avem egalitate, rezultă $a = b = c = 2$.

**14.** *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{\ldots\sqrt{3 + 2x}}}} = \frac{x^2 - 3}{2}.$$

*Florin Bojor*

**Soluţie.** Considerăm funcţia $f : \left[-\frac{3}{2}, \infty\right) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, care este o funcţie bijectivă şi inversa sa este $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$.

Atunci ecuaţia devine $\left(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{de\ n\ ori\ f}\right)(x) = f^{-1}(x)$, care este echivalentă cu $f^{n+1}(x) = x$. Deoarece $f$ e strict crescătoare, atunci

$$f^{n+1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow x = 3.$$

**15.** *Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, care verifică simultan relaţiile:*

$$x^3 f^3(x) - 3x f(x) g^2(x) = \cos x$$
$$g^3(x) - 3x^2 f^2(x) g(x) = -\sin x,\ (\forall)\, x \in \mathbb{R}^*.$$

*Dorin Mărghidanu*, Corabia

**Soluţie.** Dacă înmulţim a doua ecuaţie cu $-i$ şi apoi o adunăm la prima ecuaţie, obţinem:

$$(x \cdot f(x) + i \cdot g(x))^3 = \cos x + i \sin x,$$

adică

$$x \cdot f(x) + i \cdot g(x) = \cos\frac{x + 2k\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{x + 2k\pi}{3},\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

Pentru $x \in \mathbb{R}^*$ avem următoarele trei perechi de soluţii ale sistemului din enunţ:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \cos\dfrac{x + 2k\pi}{3} \\ g(x) = \sin\dfrac{x + 2k\pi}{3} \end{cases},\quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

## Clasa a XI-a

**1.** *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} e^{x^2} & 1 \\ \ln(1+x^2) & \cos x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

*Notăm* $A^n(x) = \begin{pmatrix} a_n(x) & b_n(x) \\ c_n(x) & d_n(x) \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Să se calculeze*

$$\lim_{x \to 0} \frac{a_n(x) - d_n(x)}{c_n(x)}.$$

*Ludovic Longaver*

**Soluţie.** Arătăm că limita de mai sus nu depinde de $n$.
În geberal, pentru o matrice oarecare $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $c \neq 0$, avem relaţia evidentă: $M \cdot M^n = M^n \cdot M = M^{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm acum $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, şi aplicăm relaţia de mai sus. Obţinem sistemul:

$$\begin{cases} a \cdot a_n + b \cdot c_n = a \cdot a_n + c \cdot b_n \\ a \cdot b_n + b \cdot d_n = b \cdot a_n + d \cdot b_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \cdot c_n = c \cdot b_n \\ (a_n - d_n)b = (a-d)b_n \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n - d_n}{c_n} = \frac{a-d}{c}.$$

Avem de calculat limita: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a_n(x) - d_n(x)}{c_n(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{\ln(1+x^2)}$.
Ultima limită se poate calcula prin artificii de calcul:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left( \frac{x^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

**2.** *a) Fie* $n \in \mathbb{N}^*$. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2^{nx} + 2(n-1) = \frac{2}{x}.$$

*b) Să se studieze convergenţa şirului* $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *dat de relaţia de recurenţă:*

$$2^{x_1} + 2^{2x_2} + 2^{3x_3} + \cdots + 2^{nx_n} = \frac{2}{x_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

*Ludovic Longaver*

**Soluţie.** a) Se observă că $x > 0$. Funcţia definită de membrul stâng al ecuaţiei este strict crescătoare, iar cea definită de membrul drept este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$, deci $x = \dfrac{1}{n}$ este soluţia unică a ecuaţiei.

b) Folosind inducţia matematică, se demonstrează că $x_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Fie $P(n) : x_n = \dfrac{1}{n}$. Observăm că $P(1)$ este adevărată şi presupunem $P(k)$ adevărată pentru orice număr natural $k$, $k \le n-1$. Demonstrăm că şi $P(k)$ este adevărată. Obţinem

$$2^{1\cdot\frac{1}{1}} + 2^{2\cdot\frac{1}{2}} + \cdots + 2^{(k-1)\frac{1}{k-1}} + 2^{k\cdot x_k} = \frac{2}{x_k} \Leftrightarrow (k-1)\cdot 2 + 2^{k\cdot x_k} = \frac{2}{x_k},$$

relaţie care ne dă, pe baza punctului a), $x_k = \dfrac{1}{k}$. Expresia termenului general al şirului este $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ care, este evident, converge la zero.

**3.** *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^k}\, C_n^k.$$

*Ionel Tudor*, Călugăreni, Giurgiu

**Soluţie.** Calculăm $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^k} C_n^k$, $n \ge 1$, plecând de la derivarea membru cu membru a identităţii binomiale $(1+x)^n = 1 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \cdots + C_n^n \cdot x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$. Deci $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 \cdot x + \cdots + nC_n^n \cdot x^{n-1}$, identitate pe care o înmulţim cu $x \neq 0$ şi apoi o derivăm din nou:

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + \cdots + nC_n^n x^n.$$

Mai derivăm încă o dată şi apoi înmulţim cu $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = C_n^2 + 2^2 C_n^2 x + \cdots + n^2 C_n^n x^{n-1}\\
&n(1+x)^{n-2}(1 + x + nx - x) = C_n^1 + 2^2 C_n^2 x + \cdots + n^2 C_n^n x^{n-1}\\
&C_n^1 x + 2^2 C_n^2 x^2 + \cdots + n^2 C_n^n x^n = nx(1+nx)(1+x)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Considerând $x = \dfrac{1}{n} \neq 0$ în ultima egalitate, obţinem:

$$a_n = \frac{1}{n}\, C_n^1 + \frac{2^2}{n^2}\, C_n^2 + \cdots + \frac{n^2}{n^n}\, C_n^n = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2}, \quad \forall\, n \ge 1.$$

Deci limita cerută este:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} = 2 \cdot e \cdot 1 = 2e.$$

**4.** *Dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie derivabilă cu proprietatea că* $f(a) = 0$*, să se demonstreze că există* $c \in (a, b)$ *astfel încât:*

$$f(c) = (b - c)f'(c).$$

*Dorin Mărghidanu*, Corabia

**Soluţie.** Considerăm funcţia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (b - x) \cdot f(x)$, care este de asemenea derivabilă şi, în plus, $g(a) = g(b) = 0$.

Cu teorema lui Rolle deducem că există $c \in (a, b)$, astfel încât $g'(c) = 0$. Cum $g'(x) = -f(x) + (b - x) \cdot f'(x)$, rezultă că

$$-f(c) + (b - c) \cdot f'(c) = 0.$$

**5.** *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât:*

*a)* $f$ *este o funcţie derivabilă pe* $\mathbb{R}$*;*

*b) derivata sa* $f'$ *este o funcţie periodică pe* $\mathbb{R}$*.*

*Să se demonstreze că există două funcţii* $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietăţile:*

*1)* $\varphi$ *este funcţie periodică pe* $\mathbb{R}$*;*

*2)* $\psi$ *este funcţie liniară pe* $\mathbb{R}$*,*

*astfel încât* $f = \varphi + \psi$*.*

*Dorin Mărghidanu*, Corabia

**Soluţie.** Cum $f'$ este periodică, $\exists\, T > 0$ astfel încât $f'(x+T) = f'(x)$. Deci $f(x+T)$ şi $f(x)$ diferă printr-o constantă $k \in \mathbb{R}$, adică

$$f(x + T) - f(x) = k. \tag{1}$$

Fie funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{k}{T}x. \tag{2}$$

Atunci,

$$\begin{aligned}\varphi(x + T) - \varphi(x) &\overset{(2)}{=} f(x + T) - \frac{k}{T}(x + T) - f(x) + \frac{k}{T}x \\ &= f(x + T) - f(x) - k \overset{(1)}{=} k - k = 0,\end{aligned}$$

deci $\varphi$ este periodică de perioada $T$.

Cu alegerea $\psi(x) = \dfrac{k}{T}x$, evident funcţie liniară, cu relaţia (2) avem

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{k}{T}x = \varphi(x) + \psi(x),$$

care răspunde cerinţelor enunţului.

**6.** *Dacă $a, b \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, să se găsească cel mai mare $\lambda \in \mathbb{R}$, pentru care*

$$\sqrt[m]{a + \sqrt[n]{b}} \geq \sqrt[m+mn]{\lambda \cdot ab}\,.$$

*Dorin Mărghidanu*, Corabia

**Soluţie.** Prin ridicare la putearea $m + mn$, inegalitatea este echivalentă cu

$$\left(a + \sqrt[n]{b}\right)^{1+n} \geq \lambda \cdot ab.$$

Considerăm $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \sqrt[n]{b}\right)^{1+n} - \lambda \cdot x \cdot b$, $x \geq 0$. Avem,

$$f'(x) = (1+n)\left(x + \sqrt[n]{b}\right)^{n} - \lambda \cdot b.$$

Cum $f''(x) = (1+n) \cdot n\left(x + \sqrt[n]{b}\right)^{n-1} \geq 0$, rezultă $f'$ crescătoare pe $\mathbb{R}_+$. Deci

$$f'(x) \geq f'(0) = (1+n)b - \lambda \cdot b = (1+n-\lambda)b.$$

Pentru $\lambda \leq 1+n$, avem $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$, deci $f$ crescătoare pe $\mathbb{R}_+$; în consecinţă

$$f(a) \geq f(0) = \left(\sqrt[n]{b}\right)^{1+n} \geq 0.$$

Din această ultimă relaţie rezultă şi condiţia de egalitate $b = 0$, şi apoi din inegalitatea iniţială $a = 0$.

Constanta $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = 1+n$ este cea mai bună posibilă pentru inegalitatea din enunţ.

**7.** *Se consideră $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin condiţiile:*

$$x_1 = \frac{24}{5} \quad \text{şi} \quad 5x_{n+1} = 13x_n + 12\sqrt{x_n^2 + 4}\,,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

*Să se determine termenul general al şirului şi să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2}$.

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Avem $x_1 = 5 - \dfrac{1}{5}$,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{5}\left(13x_1 + 12\sqrt{x_1^2 + 4}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(13\frac{24}{5} + 12\sqrt{\left(5 - \frac{1}{5}\right)^2 + 4}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{312}{5} + 12\left(5 + \frac{1}{5}\right)\right) = \frac{624}{25} = 5^2 - \frac{1}{5^2}\,. \end{aligned}$$

Presupunând că $x_k = 5^k - \frac{1}{5^k}$, $(k \in \mathbb{N}^*)$ avem că

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{5}\left(13x_k + 12\sqrt{x_k^2+4}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(13\left(5^k - \frac{1}{5^k}\right) + 12\left(5^k + \frac{1}{5^k}\right)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(25 \cdot 5^k - \frac{1}{5^k}\right) = 5^{k+1} - \frac{1}{5^{k+1}}, \end{aligned}$$

deci $x_n = 5^n - \frac{1}{5^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right)^{x_n^2} \overset{=}{1^\infty} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right)^{-5^{2n}}\right]^{-\frac{x_n^2}{5^{2n}}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

**8.** *Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ dat prin condiţiile $a_0 = 2$ şi $a_{n+1} = \sqrt[p]{3^p - 3 + a_n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, unde $p \geq 3$ este un număr natural fixat.*

*Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$.*

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Avem că $a_0 = 2$, $a_1 = \sqrt[p]{3^p - 3 + a_0} = \sqrt[p]{3^p - 1} \in (2;3)$. Prin inducţie matematică

$$a_n \in [2,3), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Deoarece relaţia $a_0 < a_1 \Leftrightarrow 2 < \sqrt[p]{3^p - 1} \Leftrightarrow 2^p + 1 < 3^p$ este adevărată pentru $p \geq 3$, presupunând acum că $a_k < a_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$, avem:

$$a_{k+1} < a_{k+2} \Leftrightarrow \sqrt[p]{3^p - 3 + a_k} < \sqrt[p]{3^p - 3 + a_{k+1}} \Leftrightarrow a_k < a_{k+1} \text{ este adevărată.}$$

Aşadar, şirul este strict monoton şi mărginit conform (1), deci el este convergent.

Fie $l = \lim_{n\to\infty} a_n \in [2,3]$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă găsim că $l = \sqrt[p]{3^p - 3 + l} \underset{l\geq 0}{\Leftrightarrow} l^p = 3^p - 3 + l \Leftrightarrow l \in \{1;3\}$ deoarece membrul stâng este o funcţie convexă pe $[0,\infty)$, iar membrul drept este o funcţie liniară. Convine doar $l = 3$.

**9.** *Dacă $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ este o funcţie injectivă, să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(k)}{k^3}$.*

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Dacă $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(k)}{k^3}$ avem că $a_{n+1} - a_n = \frac{f^2(n+1)}{(n+1)^3} > 0$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi atunci există

$$\lim_{n\to\infty} a_m \overset{not}{=} l \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{1}$$

Cum

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{f^2(n+1)}{(n+1)^3} + \frac{f^2(n+2)}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{f^2(2n)}{(2n)^3} \\ &\geq \frac{f^2(n+1) + f^2(n+2) + \cdots + f^2(2n)}{(2n)^3} \overset{f\ inj}{\geq} \\ &\geq \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{8n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{8n^2} > \frac{n \cdot 2n}{8n^2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

avem că $a_{2n} - a_n > \frac{1}{4}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Presupunând că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ ar fi mărginit superior, deci convergent (şirul este strict crescător), trecând la limită în relaţia anterioară, găsim că $0 \geq \frac{1}{4}$, contradicţie. Aşadar, utilizând (1), deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

**10.** *Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $x_1 \in \mathbb{R}$ şi*

$$x_{n+1} = \begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

*Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Discuţie după $x_1 \in \mathbb{R}$.*

*Meda şi Florin Bojor*

**Soluţie.** Calculând determinantul obţinem

$$x_{n+1} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci $x_{n+1} = 2x_n$, $\forall\, n \geq 2$, adică $x_n = 2^{n-1}x_2 = 2^{n-1}(1+x_1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -\infty, & x_1 < -1 \\ 0, & x_1 = -1 \\ +\infty, & x_1 > -1 \end{cases}.$$

**11.** *Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifică relaţia $(\exists)\, a \in (0,1)$ şi $b \geq 0$ astfel încât $x_{n+1} \leq ax_n + a^n b$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.*

*i) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

*ii) Să se demonstreze că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $y_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ este convergent.*

*Florin Bojor*

**Soluţie.** *i*) Înlocuind în inegalitatea de mai sus $n = 1, 2, \ldots, n$, înmulţind convenabil şi adunând relaţiile obţinute, avem

$$0 \leq x_n \leq a^n x_0 + na^n b, \quad \forall n \imath \mathbb{N}. \tag{1}$$

Trecând la limită, vom obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$.

*ii*) Deoarece $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, vom deduce că şirul $y_n$ este crescător. Folosind relaţia (1) vom obţine

$$\begin{aligned} y_n &= x_0 \sum_{i=1}^{n} x_k \leq x_0 + x_0 \sum_{i=1}^{n} a^i + b \sum_{i=1}^{n} ia' \\ &= x_0 + x_0 \frac{a - a^{n+1}}{1-a} + b \frac{a - na'' + (n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2} \leq \frac{x_0 + a(b - x_0)}{(1-a)^2}, \end{aligned}$$

deci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior, deci convergent.

**12.** *Fie* $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1 > 0$ *şi* $x_{n+1} = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k}\ln(1 + kx_n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Generalizarea problemei C.649, G.M. 11-12/1986
*D. M. Bătineţu-Giurgiu, Nicolae Muşuroia*

**Soluţie.** Se arată prin inducţie că

$$x_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Arătăm că şirul $(x_n)_n$ este descrescător.

$$px_{n+1} - px_n = \ln(1 + x_n) + \frac{1}{2}\ln(1 + 2x_n) + \cdots + \frac{1}{p}\ln(1 + px_n) - px_n = f(x_n) \tag{2}$$

unde $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(1 + x) + \frac{1}{2}\ln(1 + 2x) + \cdots + \frac{1}{p}\ln(1 + px) - px.$$

Avem $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+2x} + \cdots + \dfrac{1}{1+px} - p$ şi $f''(x) < 0, \forall x > 0$.

| $x$ | | 0 | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | / / | | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | / / | 0 | $-$ | $\searrow$ | $-$ | |
| $f(x)$ | / / | 0 | | $\searrow$ | | |

Deci $f(x) < 0, \forall x > 0$. Cum $x_n > 0$, deducem că $f(x_n) < 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, şirul $(x_n)_n$ este strict descrescător.
Din (1) şi (2) rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \geq 0$. Arătăm că $l = 0$.

Fie $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{p}\Big[\ln(1+x) + \dfrac{1}{2}\ln(1+2x) + \cdots + \dfrac{1}{p}\ln(1+px)\Big]$.
Atunci

$$g'(x) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+2x} + \cdots + \frac{1}{1+px}\right),$$
$$g''(x) = -\frac{1}{p}\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+2x)^2} + \cdots + \frac{p}{(1+px)^2}\right].$$

| $x$ | | $0$ | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | / / | | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $g'(x)$ | / / | $1$ | $-$ | $\searrow$ | $-$ | $0$ |
| $g(x)$ | / / | $0$ | | $\nearrow$ | | |

Din $x_{n+1} = g(x_n)$, $g$ continuă, trecând la limită, obţinem că $l = g(l)$. Din tabelul de mai sus, obţinem $l = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nx_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \overset{s-c}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n g(x_n)}{x_n - g(x_n)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{xg(0)}{x - g(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{g(x) + xg'(x)}{1 - g'(x)} \\
&\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2g'(x) + xg''(x)}{-g''(x)} == \frac{2g'(0)}{-g''(0)} = \frac{4}{p+1}\,.
\end{aligned}$$

*Observaţie.* Pentru $p = 1$, obţinem problema $C : 649$, G. M. 11-12/1986, autor M. Bencze.

**13.** *Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ care satisface relaţia de recurenţă $x_{n+1} = ax_n + \sqrt{bx_n^2 - 2}$, unde $x_1, a, b \in \mathbb{N}^*$.*

*a) Demonstraţi că dacă $a = 2$, $b = 3$ şi $x_1 = 1$, atunci $x_n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.*

*b) Demonstraţi că mulţimea $A = \{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / (\exists)\, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_n \notin \mathbb{N}^*$, $(\forall)\, x_1 \in \mathbb{N}^*\}$ este infinită.*

*Cristian Heuberger*

**Soluţie.** a) Aşadar $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 - 2}$ şi $x_1 = 1$, rezultând $x_2 = 3$.
Prin inducţie imediată avem $x_n \geq 1$ şi mai departe $x_{n+1} > 2x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Prin ridicarea la pătrat a egalităţii $x_{n+1} - 2x_n = \sqrt{3x_n^2 - 2}$ obţinem

$$x_{n+1}^2 - 4x_n \cdot x_{n+1} + x_n^2 = -2.$$

Deducem

$$x_{n+2}^2 - 4x_{n+1} \cdot x_{n+2} + x_{n+1}^2 = -2.$$

Efectuând diferenţa ultimelor egalităţi rezultă:

$$x_{n+2}^2 - 4x_{n+1} \cdot x_{n+2} + 4x_n \cdot x_{n+1} - x_n^2 = 0$$

şi de aici $(x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} + x_n - 4x_{n+1}) = 0$.

Cum $x_{n+2} - x_n > 0$, rezultă $x_{n+2} + x_n - 4x_{n+1} = 0$, sau altfel $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Având $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$, prin inducţie se obţine uşor că $x_n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Considerăm $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 2$. Pentru fiecare astfel de $a$ vom considera $b = a^2$, relaţia de rexurenţă devenind $x_{n+1} = ax_n + \sqrt{a^2x_n^2 - 2}$ şi de aici $x_2 = ax_1 + \sqrt{a^2x_1^2 - 2}$. Se demonstrează prin calcul direct că, pentru orice $x_1 \in \mathbb{N}^*$, are loc $ax_1 - 1 < \sqrt{a^2x_1^2 - 2} < ax_1$, rezultând că $\sqrt{a^2x_1^2 - 2}$ nu poate fi număr natural şi de aici $x_2 \notin \mathbb{N}^*$. Evident, numărul perechilor $(a, a^2)$ cu $a \geq 2$ este infinit.

**14.** *Pentru permutarea $\sigma \in S_n$, notăm cu $k$ cel mai mic exponent din $\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$ şi considerăm funcţia $f_\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$,*

$$f_\sigma(i) = \sigma(i) + \sigma^2(i) + \cdots + \sigma^k(i).$$

*a) Să se determine $\sigma \in S_3$, astfel încât funcţia $f_\sigma$ este constantă.*
*b) Să se determine $\sigma \in S_4$, astfel încât funcţia $f_\sigma$ este constantă.*

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** a) Soluţiile sunt transpoziţia (13) şi ciclurile de lungime 3.

b) Orice permutare se descompune într-un produs de cicluri şi transpoziţii disjuncte, care comută şi ordinul său este cel mai mic multiplu comun al ordinelor ciclurilor şi transpoziţiilor componente. Fie $\sigma \in S_4$. Să observăm că permutarea identică nu este soluţie.

$(I)$ Dacă $\sigma = (ij)$ este o transpoziţie, atunci $ord(\sigma) = 2$.
Pentru $m_1, m_2 \in \{1, 2, 3, 4\} \backslash \{i, j\}$, $f_\sigma(m_1) = 2m_1$ şi $f_\sigma(m_2) = 2m_2$, deci funcţia $f_\sigma$ nu este constantă.

$(II)$ Dacă $\sigma$ este un ciclu de lungime 3, atunci $ord(\sigma) = 3$ şi $\sigma$ nu este soluţie. Într-adevăr, dacă $i = 1$ este punct fix pentru $\sigma$, atunci $f_\sigma(1) = 3$ şi pentru $j \in \{2, 3, 4\}$ avem $f_\sigma(j) = 2 + 3 + 4 = 9 \neq 3$.
Se raţionează la fel în celelalte cazuri.

$(III)$ Dacă $\sigma = (ij)(kl)$, cu $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, atunci $ord(\sigma) = 2$. Dacă $m \in \{i, j\}$, atunci $f_\sigma(m) = i + j$, iar dacă $m \in \{k, l\}$, atunci $f_\sigma(m) = k + l$. Aşadar $f_\sigma$ e constantă $\Leftrightarrow i + j = k + l \Leftrightarrow \sigma = (14)(23)$.

$(IV)$ Dacă $\sigma$ este un ciclu de lungime 4, atunci $ord(\sigma) = 4$ şi $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $f_\sigma(i) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, aşadar $f_\sigma$ este constantă.

În concluzie, soluţiile sunt $\sigma = (14)(23)$ şi ciclurile de lungime 4.

**15.** *Fie matricea*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3 & 7\\ 0 & -4 & 4 & -6\\ -9 & -13 & 11 & -8\\ 10 & 14 & -10 & 9\end{pmatrix}.$$

*Calculaţi* $\log_2 S$, *unde* $S$ *este suma elementelor matricei* $A^{2011}$.

*Cristian Mortici*

**Soluţie.** Avem $A=\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}$, unde $X,Y,Z,T\in\mathcal{G}_1$,

$$\mathcal{G}_k=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}|a+c=k,\ b+d=k\right\}.$$

$\mathcal{G}_1$ este închis la operaţia de înmulţire.

$$A^2=\begin{pmatrix}YZ+X^2 & TY+XY\\ TZ+XZ & YZ+T^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}98 & 122 & -86 & 64\\ -96 & -120 & 88 & -62\\ -188 & -248 & 176 & -145\\ 190 & 250 & -174 & 147\end{pmatrix}$$

$YZ+X^2$, etc. sunt în $\mathcal{G}_2$. Avem $S(A^2)=8\cdot 2$. Apoi $S(A^3)=8\times 2^2$, etc.
$S(A^{2011})=8\times 2^{2010}$, deci $\log_2 S=2013$.

## Clasa a XII-a

**1.** *Se consideră* $a\geq 0$ *un număr fixat şi şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(n+k)^3}{(n+k)^4+a}$, $n\in\mathbb{N}$.

*Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\ln 2$.

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Avem:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{(n+k)^4+a}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{(n+k)^4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\overset{not}{=}x_n.$$

Pe de altă parte, pentru $n$ suficient de mare (de exemplu $n\geq\sqrt[3]{a}$) avem că

$$\begin{aligned}b_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{(n+k)^4+a}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{(n+k)^4+(n+k)^3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k+1}\\&=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}=x_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Aşadar,

$$x_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \le b_n \le x_n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge \sqrt[3]{a}. \tag{1}$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2,$$

folosind (1) şi teorema cleştelui, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ln 2$.

**2.** *Fie $(G,\cdot)$ un grup finit comutativ şi funcţia injectivă $f : G \to G$, astfel încât*

$$f(f(x\cdot y)y^{-1}) = x\cdot f(x\cdot y)y^3, \quad (\forall)\, x, y \in G.$$

*Să se arate că $ord(G)$ este un număr de forma $4k+1$.*

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Pentru $x = y = e$ în relaţia dată obţinem:

$$f(f(e)) = f(e) \overset{inj}{\Rightarrow} f(e) = e,$$

unde $e$ este elementul neutru din grup.
Luând acum $y = x^{-1}$ găsim că $f(x) = x^{-2}$, $\forall x \in G$. Relaţia din ipoteză devine:
$f((xy)^{-2}y^{-1}) = x(xy)^{-2}y^3 \Leftrightarrow (x^{-2}y^{-3})^{-2} = x^{-1}y \Leftrightarrow x^4y^6 = x^{-1}y \Leftrightarrow x^5y^5 = e \Leftrightarrow (x\cdot y)^5 = e$, valabilă pentru $\forall x, y \in G$.

Dacă $y = e$, atunci $x^5 = e$, $\forall x \in G$. Arătăm acum faptul că orice element $x \in G\backslash\{e\}$ are ordinul 5.

Dacă există $a \in G\backslash\{e\}$ astfel încât:

i) $ord\, a = 2 \Rightarrow a^2 = e \Rightarrow a^4 = e \Rightarrow a = e$, fals;

ii) $ord\, a = 3 \Rightarrow a^3 = e \Rightarrow a^6 = e \Rightarrow a = e$, fals;

iii) $ord\, a = 4 \Rightarrow a^4 = e \Rightarrow a = e$, fals.

Aşadar, $ord\, x = 5$ pentru orice $x \in G\backslash\{e\}$.
Atunci $G = \{e\} \cup < a_1 > \cup < a_2 > \cup \ldots$, unde $< a_i >$ reprezintă subgrupul generat de elementul $a_i \in G$, iar $a_1 \ne e$, $a_2 \notin < a_1 >$, $a_3 \notin < a_1 > \cup < a_2 >, \ldots$. Cum $< x > = \{x, x^2, x^3, x^4, e\}$ pentru $x \ne e$, deducem că $ord\,(G) = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

**3.** *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Să se arate că funcţia*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} |x^i - a_i| \sin\dfrac{i}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

*are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.*

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Funcţia $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_i(x) \begin{cases} (|x^i - a_i| - |a_i|) \sin \dfrac{i}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci ea are primitive pe $\mathbb{R}$.
Cum

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot g_i(x), \ x \in \mathbb{R},$$

unde

$$g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ g_i(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{i}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \ i \in \overline{1,n},$$

deducem că $f$ are primitive pe $\mathbb{R}$, fiind o sumă finită de funcţii primitivabile (funcţiile $g_i$, $i \in \overline{1,n}$ au primitive pe $\mathbb{R}$). Atunci $f$ are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

**4.** *Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care*

$$\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x (x-t)f(t)dt = x, \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

*Nicolae Muşuroia*

**Soluţie.** Relaţia din ipoteză poate fi scrisă

$$\int_0^x f(t)dt - 2x\int_0^x f(t)dt + 2\int_0^x tf(t)dt = x.$$

derivând relaţia anterioară obţinem

$$f(x) - 2\int_0^x f(t)dt - 2xf(x) + 2x \cdot f(x) = 1,$$

adică

$$f(x) - 2\int_0^x f(t)dt = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Derivând din nou, avem că

$$f'(x) - 2f(x) = 0,$$

de unde rezultă că $f(x) = ke^{2x}$. Verificând, obţinem $k = 1$, deci $f(x) = e^{2x}$.

**5.** *Fie $a > 0$ şi $f : [-a,a] \to \mathbb{R}_+$ o funcţie pară, iar $g : [-a,a] \to \mathbb{R}_+$ o funcţie impară. Demonstraţi că*

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{f(x)}}{e^{g(x)}+1}\, dx \leq \sqrt{ac}, \ \ \textit{unde} \ \ c = \int_0^a f(x)dx.$$

*Horia Zlampareţ*

**Soluţie.**

$$I=\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{f(x)}}{e^{g(x)}+1}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{f(-x)}}{e^{g(-x)}+1}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{f(x)}}{e^{g(x)}+1}\,e^{g(x)}dx$$
$$=\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{f(x)}}{e^{g(x)}+1}\,(e^{g(x)}+1-1)dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{f(x)}dx-I.$$

De unde $I=\displaystyle\int_0^a\sqrt{f(x)}dx$.

Aplicând inegalitatea CBS pentru integrale, avem că

$$I^2=\left(\int_0^a 1\cdot\sqrt{f(x)}dx\right)^2\le\int_0^a 1^2dx\cdot\int_0^a f(x)dx=ac.$$

De unde rezultă $I\le\sqrt{ac}$.

**6.** *Fie inelul $(A,+,\cdot)$ cu $0\neq 1$ şi mulţimea $M=\{x\in A|x^2=x+1\}$. Dacă $M$ are un număr impar de elemente, să se demonstreze că*

$$(\forall)\,x\in M,\quad x^{10}+1=0.$$

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** Evident, $0,1,2\notin M$. Observă că dacă $x\in M$, atunci şi $1-x\in M$. Într-adevăr,

$$(1-x)^2=1-2x+x^2=1-2x+x+1=(1-x)+1.$$

Dacă $M$ are un număr impar de elemente, atunci există $x_0\in M$, astfel încât $x_0=1-x_0$. Obţinem $x_0^2=x_0-x_0^2\Leftrightarrow x_0+1=x_0-x_0^2\Leftrightarrow x_0^2=-1\Leftrightarrow x_0+1=-1\Leftrightarrow x_0=-2$. Aşadar $-2\in M$, deci $(-2)^2=-2+1\Leftrightarrow 5=0$.
Deoarece inelul are caracteristica 5, pentru $x\in M$ obţinem:

$$x^{10}=(1+x)^5=1+x^5=1+x(x^2)^2=1+x(x+1)^2=1+x(x^2+2x+1)$$
$$=1+x(x+1+2x+1)=2+3x^2+2x=1+3(x+1)+2x=5x+4=-1.$$

**7.** *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu $|A|\ge 4$ astfel încât $(\forall)\,x,y\in A\backslash\{0,1\}$, $x\neq y$, avem $x^2=y$ sau $y^2=x$.*

*Să se determine numărul elementelor inelului $A$.*

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** Pentru $k\in\mathbb{N}^*$ notăm ca de obicei $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k}=k$.

Fie $x\in A\backslash\{0,1,-1\}$. aplicând ipoteza pentru $y=x+1\in A\backslash\{1,2,0\}$, obţinem $(x+1)^2=x$ sau $x^2=x+1$, deci

$$x^2+x=-1\quad\text{sau}\quad x^2-x=1,\tag{1}$$

aşadar $x$ este inversabil. Rezultă că $A$ este un corp.

Presupunem că $2 \neq 0$. Atunci $\forall\, x \in A\backslash\{0,1,2\}$, $x^2 = 2$ sau $x = 4$. Aşadar $\forall\, x \in A\backslash\{0,1,2,4\}$, avem $x^2 = 2$.

$(a)$ Dacă $4 \notin \{0,1\}$, atunci $3 \notin \{0,1,2,4\}$, deci $3^2 = 2$, adică $7 = 0$. Cum 7 este un număr prim, deducem că inelul $A$ are caracteristica 7, deci $5 \neq 0$.
Rezultă că $5 \in A\backslash\{0,1,2,4\}$, deci $25 = 2$, de unde obţinem $4 = 2$, adică $2 = 0$, fals.

$(b)$ Dacă $4 = 0$, cum $A$ este corp, rezultă că el are caracteristica 2, deci $2 = 0$, fals.

$(c)$ Dacă $4 = 1$, atunci avem $\forall\, x \in A\backslash\{0,1,2\}$, $x^2 = 2$.
Cum $x + 1 \in A\backslash\{1,2,0\}$, avem şi $(x+1)^2 = 2$. Obţinem $x^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow 2 + 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2$. Rezultă $4x = 4$, adică $x = 1$, fals.
Din $(a), (b), (c)$ rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci $2 = 0$.
Din (1) obţinem că $\forall\, x \in A\backslash\{0,1\}$, $x^2 = -x - 1 = x + 1$.

Fie $x \in A\backslash\{0,1\}$. Avem şi $x + 1 \in A\backslash\{0,1\}$. Presupunem că există $y \in A\backslash\{0,1,x,x+1\}$. Obţinem

$$y = x^2 \quad \text{sau} \quad y^2 = x \tag{2}$$

$$y = (x+1)^2 = x^2 + 1 \quad \text{sau} \quad y^2 = x + 1. \tag{3}$$

$(i)$ Dacă $y = x^2$, din (3) rezultă $y^2 = x + 1$, deci $x^4 = x + 1$. Cum $x^2 = x + 1$, obţinem $x^4 = x^2$ şi cum $A$ este corp, rezultă că $x^2 = 1$. Deoarece $x^2 = x+1$, obţinem $x + 1 = 1$, deci $x = 0$, fals.

$(ii)$ Dacă $x = y^2$, se raţionează la fel şi se ajunge la un fals.
Din $(i)$ şi $(ii)$ deducem că presupunerea făcută este falsă, deci $A$ are 4 elemente, $A = \{0,1,x,y\}$, cu $y = x + 1$, $x^2 = y$ şi $y^2 = x$.

**8.** *Se consideră ecuaţiile*

$$\widehat{3}x^2 + \widehat{5}x + \widehat{9} = \widehat{0},\ x \in \mathbb{Z}_{71}$$

$$\overline{4}x^2 + \overline{3}x + \overline{33} = \overline{0},\ x \in \mathbb{Z}_{59}$$

*a) Fără a rezolva efectiv ecuaţiile, să se arate că una dintre ele are soluţii, iar cealaltă nu.*

*b) Să se rezolve ecuaţiile.*

*Costel Chiteş*

**Soluţie.** Avem $\Delta_1 = \widehat{59}$ şi $\Delta_2 = \overline{71} = \overline{12}$.
Prima ecuaţie are soluţii dacă şi numai dacă există $\widehat{u} \in \mathbb{Z}_{71}$ pentru care $\widehat{u}^2 = \widehat{59}$, adică dacă şi numai dacă 59 este rest păratic modulo 71. Analog, cea de-a doua ecuaţie are soluţii dacă şi numai dacă 71 este rest pătratic modulo 59.

Vom folosi legea reciprocităţii pătratice a lui Gauss şi criteriul lui Euler, pe care le vom enunţa în continuare. Pentru mai multe amănunte, se poate consulta paragraful 10.1 al cărţii *Matematică pentru grupele de performanţă, clasa a XII-a, autori D. Heuberger şi colab., Ed. Dacia Educaţional,* 2004.

**Definiţie**. Dacă $p \geq 2$ este un număr prim şi $d \in \mathbb{Z}$ cu $(d,p)=1$, spunem că $d$ este un rest pătratic modulo $p$ dacă există $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d \equiv a^2 (\bmod p)$.

Numărul $\left(\dfrac{d}{p}\right) = \begin{cases} 1, & d \text{ e rest pătratic modulo } p \\ -1, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$
se numeşte simbolul lui Legendre.

**Criteriul lui Euler**. Dacă $p \geq 3$ este un număr prim şi $a \in \mathbb{Z}$ cu $(a,p)=1$, atunci $\left(\dfrac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (\bmod p)$.

**Legea reciprocităţii pătratice Legendre-Gauss**
Dacă $p$ şi $q$ sunt două numere naturale prime impare distincte, atunci

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

a) Aplicând legea reciprocităţii pătratice numerelor prime $p=71$ şi $q=59$, obţinem $\left(\dfrac{71}{59} \cdot \left(\dfrac{59}{71}\right)\right) = (-1)^{35 \cdot 29} = -1$, şi cum $\left(\dfrac{71}{59}\right), \left(\dfrac{59}{71}\right) \in \{-1, 1\}$, rezultă că unul singur dintre numerele $\left(\dfrac{71}{59}\right)$ şi $\left(\dfrac{59}{71}\right)$ este egal cu 1, deci sau 71 este rest pătratic modulo 59, sau 59 este rest pătratic modulo 71, dar nu amândouă.

b) Din criteriul lui Euler obţinem $\left(\dfrac{59}{71}\right) \equiv 59^{35} (\bmod 71) \equiv -1 (\bmod 71)$, adică 59 nu este un rest pătratic modulo 71. Aşadar prima ecuaţie nu are soluţii.
Cea de-a doua ecuaţie are soluţii dacă şi numai dacă există $\overline{w} \in \mathbb{Z}_{59}$ pentru care $\overline{w}^2 = \overline{12}$. Cum $\overline{w} = \overline{22}$ verifică această egalitate, obţinem soluţiile $(-\overline{3} \pm \overline{22}) \cdot \overline{8}^{-1}$, sau $x_1 = \overline{54}$ şi $x_2 = \overline{19}$.

**9.** *a) Să se arate că există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivabilă şi $F$ o primitivă a sa, aşa încât $f\left(F(x) - \dfrac{1}{2}x^2\right) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

*b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie primitivabilă şi $a, b \in \mathbb{R}$. Arătaţi că nu există nici o primitivă $F$ a lui $f$ pentru care $f(F(x) + ax + b) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** a) Se poate lua $f(x) = 2x$ şi $F(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Presupunem că există $F$ ca şi în enunţ şi fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + ax + b$.
Din ipoteză avem că $f \circ G = 1_{\mathbb{R}}$, deci $G$ e injectivă şi $f$ e surjectivă.
Din $G$ continuă şi injectivă rezultă că $G$ este strict monotonă, deci

$$G'(x) = f(x) + a \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

sau

$$G'(x) = f(x) + a \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

contradicţie cu surjectivitatea lui $f$. Aşadar, presupunerea făcută este falsă.

**10.** *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

*Să se arate că dacă* $F$ *este o primitivă pentru* $f$ *şi* $F(1)=0$, *atunci*

$$F(n+1)\geq n-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right),\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

*Gheorghe Boroica*

**Soluţie.** Deoarece $f=g+\dfrac{1}{2}h$, unde $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}$,

$$h(x)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

cum $g,h$ are primitive, deducem că $f$ are primitive.

Aplicând teorema lui Lagrange funcţie $F$ pe $[k,k+1]$, $k\geq 1$, deducem că $\exists\, c_k\in(k,k+1)$ astfel încât $F(k+1)-F(k)=f(c_k)=\cos^2\left(\dfrac{1}{c_k}\right)$, deci

$$F(n+1)-F(1)=\sum_{k=1}^{n}(F(k+1)-F(k))=\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{1}{c_k}\right)\geq\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{1}{k}\,,\qquad (*)$$

deoarece $\dfrac{1}{c_k}\in\left(\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}\right)\subset(0,1]\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Cum pentru $x\geq 0$ avem că $\sin x\leq x$ şi $\dfrac{1}{k}\in(0,1]\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, din inegalitatea $(*)$ deducem că

$$F(n+1)\geq\sum_{k=1}^{n}\left(1-\sin^2\frac{1}{k}\right)\geq n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\,,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

**11.** *Aflaţi* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *derivabilă, astfel încât*

$$\int_1^x f(t)dt=xfx(x)-\ln\sqrt{1+x^2},\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}.$$

*Cristian Heuberger*

**Soluţie.** Din relaţia dată, pentru orice $x\neq 0$ are loc

$$f(x)=\frac{\displaystyle\int_1^x f(t)dt+\ln\sqrt{1+x^2}}{x},$$

rezultând imediat că funcţia $f$ este derivabilă pe pe $\mathbb{R}^*$. Derivând relaţia din problemă obţinem:

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - \frac{x}{1+x^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$

Deducem $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$ şi de aici $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c_1, & \text{dacă } x < 0 \\ c_2, & \text{dacă } x = 0. \\ \operatorname{arctg} x + c_3, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

Funcţia $f$ fiind continuă, rezultă $c_1 = c_2 = c_3$ şi în continuare $f(x) = \operatorname{arctg} x + c_1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. În relaţia din problemă, luând $x = 1$, rezultă $f(1) = \ln\sqrt{2}$ şi deci $c_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$ verifică egalitatea dată.

**12.** *Să se determine funcţia continuă* $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ *care admite primitiva* $F : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, *astfel încât*

$$f(x) = \{F(x)\},\ \forall\, x \in (-\infty, 0).$$

*Nicolae Muşuroia*

**Soluţie.** $f(x) = F(x) - [F(x)] \Rightarrow [F(x)] = F(x) - f(x)$ care este o funcţie continuă. Deci $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât: $[F(x)] = n$, $\forall\, x \in (-\infty, 0)$.
Deci

$$\begin{aligned} & f(x) - f(x) = n, \quad \forall\, x \in (-\infty, 0) \\ & F(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = ne^{-x}, \quad \forall\, x \in (-\infty, 0) \\ & F'(x)e^{-x} + F(x)(e^{-x})' = -ne^{-x} \\ & (F(x)e^{-x})' = (ne^{-x})' \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x)e^{-x} = ne^{-x} + c \Rightarrow F(x) = n + ce^x$, $x \in (-\infty, 0)$.
Dar

$$\begin{aligned} & n \le F(x) < n + 1, \quad \forall\, x \in (-\infty, 0) \\ & n \le n + ce^x < n + 1, \quad \forall\, x \in (-\infty, 0) \\ & 0 \le ce^x < 1, \quad \forall\, x \in (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Rezultă $c \in [0, 1]$. Obţinem $f(x) = ce^x$, cu $c \in [0, 1]$.

**13.** *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}\, dx.$$

*Crina Petruţiu*

**Soluţie.** Deoarece $\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}=\dfrac{(x+1)^2-x^2}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, avem că

$$\int_k^{k+1}\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx=\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_k^{k+1}=\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}.$$

Aşadar

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

**14.** *Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $n$ elemente. Pentru fiecare $k\in\mathbb{Z}$ definim $G_k\overset{not}{=}\{x^k\,|\,x\in G\}$. Dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ şi $d=(a,b)$, arătaţi că $G_aG_b=G$ dacă şi numai dacă $(d,n)=1$, unde $G_aG_b=\{u\cdot v\,|\,u\in G_a$ şi $v\in G_b\}$.*

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** Să observăm mai întâi că $G_k=G$ dacă şi numai dacă $(n,k)=1$.
Într-adevăr, dacă $G_k=G$, presupunem că $(n,k)=s\neq 1$. Atunci, din teorema lui Cauchy, există un element $x$ de ordinul $p$ al lui $G$, unde $p$ este un divizor prim al lui $s$. Aşadar $x\neq e$ şi $x^k=e$, deci $|G_k|<|G|$, fals.
Reciproc, dacă $(n,k)=1$, atunci există $u,t\in\mathbb{Z}$ astfel încât $ku+nt=1$. Aşadar, pentru orice $x\in G$, $x=x^{ku+nt}=(x^u)^k\in G_k$.

Mai mult, $G_d\subseteq G_aG_b$.
Într-adevăr, deoarece $(a,b)=d$, există $v,w\in\mathbb{Z}$ astfel încât $d=av+bw$. Pentru $x^d\in G_d$, avem $x^d=(x^v)^a(x^w)^b\in G_aG_b$.

Deoarece $(d,n)=1$, obţinem $G=G_d\subseteq G_aG_b$, deci $G=G_aG_b$.

**Observaţie**. Dacă grupul este comutativ, atunci $G_aG_b=G$ dacă şi numai dacă $(d,n)=1$.

**15.** *Se consideră grupul $(G,\cdot)$ cu $n$ elemente, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$. Spunem că subgrupul $H$ al lui $G$ are proprietatea $P$ dacă $H\neq G$ şi pentru orice $x,y\in G|$ avem $x\cdot y\in H$.*

*a) Să se dea un exemplu de grup $G$, care are trei subgrupuri distincte $H,K,L$ cu proprietatea $P$, astfel încât $G=H\cup K\cup L$.*

*b) Dacă $H,K,L$ sunt subgrupuri distincte, cu proprietatea $P$, ale lui $G$ şi $G=H\cup K\cup L$, să se determine $|H\cup K\cup L|$.*

*Dana Heuberger*

**Soluţie.** a) Grupul lui Klein şi grupul cuaternionilor verifică ipotezele problemei.

b) Dacă $H$ are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $G\backslash H=\{x_1,x_2,\ldots,x_t\}$, atunci avem elementele distincte $x_1^2,x_1x_2,\ldots,x_1x_t\in H$, deci $|G\backslash H|\leq|H|$. Aşadar $|H|\geq\dfrac{n}{2}$ şi cum $H\neq G$, din teorema lui Lagrange rezultă că $n$ este par şi $|H| = \frac{n}{2}$.

Dacă $H$ şi $K$ au proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $|H| = |K| = \frac{n}{2}$. Deoarece $H \neq K$ şi au acelaşi număr de elemente, obţinem că $|H \setminus K| = |K \setminus H|$. Cu acelaşi raţionament ca şi mai înainte, cum $\forall\, x, y \in H \setminus K \Rightarrow xy \in H \cap K$, deducem că $|H \setminus K| \leq |H \cap K|$, deci $|H \cap K| \geq \frac{|H|}{2} = \frac{n}{4}$. Dar $H \cap K$ e un subgrup al lui $H$, $H \cap K \neq H$ şi din teorema lui Lagrange rezultă $|H \cap K| \leq \frac{n}{4}$, aşadar $|H \cap K| = \frac{n}{4}$, deci $n = 4m$, cu $m \in \mathbb{N}^*$.

Dacă subgrupurile $H, K, L$ au proprietatea $\mathcal{P}$, atunci $|H| = |K| = |L| = 2m$, $|H \cap K| = |H \cap L| = |K \cap L| = m$, deci

$$|H \cap K \cap L| = |G| - |H| - |K| - |L| + |H \cap K| + |H \cap L| + |K \cap L| = m.$$

# Probleme propuse

## Clasa a IX-a

**1.** Să se demonstreze că:
$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sin^2 x\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\sin^2 x\right)}\geq 2\sqrt{2},\quad \forall\, x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

*D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti*

**2.** Suma a douăzeci de numere naturale nenule este egală cu 3689. Să se afle valoarea maximă a celui mai mare divizor comun al acestor numere.

*Gheorghe Borioca*

**3.** Să se arate că ecuaţia $x^2+y^3+z^4+t^5=u^6$ are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*$.

*Gheorghe Borioca*

**4.** Să se determine funcţiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, care verifică simultan condiţiile:
a) $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$, $\forall\, m,n\in\mathbb{N}$;
b) $f(a)=0$, pentru orice număr natural $a$ care are ultima cifră 4.

*Meda şi Florin Bojor*

**5.** Să se arate că ecuaţia $[x\cdot y]=[x]\cdot[y]$ are o infinitate de soluţii $(x,y)$, cu $x,y\in(1,\infty)\setminus\mathbb{Z}$.
Există soluţii $(x,y)$ ale acesteia cu $x,y\in(-\infty,0)\setminus\mathbb{Z}$?

*Dana Heuberger*

**6.** Se consideră ecuaţia $\{x\}+\{2x\}=\{3x\}$.
a) Să se rezolve ecuaţia.
b) Să se demonstreze că există o infinitate de soluţii $x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ ale ecuaţiei, astfel încât pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n+\dfrac{1}{3}$ nu e soluţie a ecuaţiei.
c) Să se demonstreze că există şirul de soluţii $(x_n)_{n\geq 1}$ ale ecuaţiei, astfel încât $\left(x_n+\dfrac{1}{3}\right)_{n\geq 1}$ e tot un şir de soluţii ale ecuaţiei.

*Dana Heuberger*

**7.** Se consideră triunghiul $ABC$ şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$, astfel încât $BM = CN = AP$. Fie $X, X', Y, Y', Z, Z'$ respectiv mijloacele segmentelor $[AN], [CP], [BP], [AM], [CM], [BN]$.

a) Să se arate că $XX'$ este paralelă cu bisectoarea unghiului $A$.

b) Să se arate că se poate construi un triunghi cu laturile de lungimi $XX'$, $YY'$, $ZZ'$.

c) Să se arate că $XX' = YY' = ZZ'$ dacă şi numai dacă triunghiul $ABC$ este echilateral.

*Dana Heuberger*

**8.** Să se arate că dacă $a, b, c \in [0, \infty)$ şi $ab + bc + ca = 1$, atunci:

$$\frac{(b+c)^2}{1+a^2} + \frac{(c+a)^2}{1+b^2} + \frac{(a+b)^2}{1+c^2} \geq 3.$$

*Nicolae Muşuroia*

**9.** Se consideră hexagonul $ABCDEF$. Notăm cu $G_1, G_2, G_3, G_4$ centrele de greutate ale patrulaterelor $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$, respectiv $ACDF$.
Să se arate că $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram (eventual degenerat).

*Nicolae Muşuroia*

**10.** Să se demonstreze că:

$$\frac{x+2y}{2x+2y+z} + \frac{x+y+z}{x+2y+3z} + \frac{3x+y}{2x+3y+3z} < 2, \quad \forall\, x, y, z > 0.$$

*Florin Bojor*

**11.** Demonstraţi că:

$$\frac{100}{\sqrt{101^{101}}} + \frac{101}{\sqrt{102^{102}}} + \frac{102}{\sqrt{103^{103}}} + \cdots + \frac{200}{\sqrt{201^{201}}} > \frac{1}{100!} - \frac{1}{200!}.$$

*Cristinel Mortici, Târgovişte*

**12.** Să se arate că în orice triunghi $ABC$ ascuţitunghic avem:

$$\frac{\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C}{\cos^2 A} + \frac{\sin B \cdot \cos A \cdot \cos C}{\cos^2 B} + \frac{\sin C \cdot \cos A \cdot \cos B}{\cos^2 C}$$
$$\geq \frac{1}{2}\, \mathrm{tg}\, A \cdot \mathrm{tg}\, B \cdot \mathrm{tg}\, C.$$

*Gheorghe Boroica*

**13.** Fie progresia geometică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Se consideră numerele $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$, $\forall\, k \in \overline{1, n}$. Să se determine maximul şi minimul sumei $\sum\limits_{k=1}^{n} |2 \cdot x_k - 3 \cdot 2^k|$, precum şi numărul de $n$-upluri $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pentru care se obţine acest maxim, respectiv minim.

*Ludovic Longaver*

**14.** Să se arate că dacă $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1, 4}$ cu

$$a_1^2 + a_3^2 > a_2^2 + a_4^2 \quad \text{şi} \quad (a_1 - b_1)^2 + (a_3 - b_3)^2 < (a_2 - b_2)^2 + (a_4 - b_4)^2,$$

atunci

$$(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)(b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2) \leq (a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4)^2.$$

Generalizare.

*Nicolae Muşuroia*

**15.** Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, atunci:

$$\frac{2}{n-1}\left(1 - \cos\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{n-2}\left(1 - \cos\frac{1}{3}\right) + \cdots + \frac{n-1}{2}\left(1 - \cos\frac{1}{n-1}\right) < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right).$$

*Horia Zlampareţ*

**Clasa a X-a**

**1.** Să se arate că dacă $a_k \in \mathbb{R}_+^*$, $z_k \in \mathbb{C}$, $k \in \overline{1, n}$, $n \geq 2$ şi $m \in \mathbb{R}_+$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^{m+1}}{a_k^m} \geq \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right|^{m+1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^m}.$$

*D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti*

**2.** Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z| = r$. Să se afle minimul expresiei

$$E(z) = \sqrt{r - Re(z)} + \sqrt{r + Re(z)}.$$

*Gheorghe Boroica*

**3.** Fie $n$ un număr natural, $n \geq 2$ şi numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$. Să se arate că

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

*Gheorghe Boroica*

**4.** Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ care verifică relaţia

$$f^2(x) \cdot \cos^2 x + \sin^4 x \cdot f(x) = \cos^2 x(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Gheorghe Boroica*

**5.** Se consideră ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $|a|, |b|, |c|, |d| \leq 1$. Dacă $x_k$, $k \in \overline{1,4}$ sunt rădăcinile ecuaţiei, atunci demonstraţi că $|x_k| < 2$.

*Gheorghe Boroica*

**6.** Rezolvaţi ecuaţia $2^{[x]} - 2^{[-x]} = \dfrac{3}{4}\log_2(3[x] + 1)$ pentru $x \geq 0$.

*Gheorghe Gherasin, Sighetu Marmaţiei*

**7.** Să se determine numerele $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care

$$|z^2 + \alpha \cdot z + \beta| \leq 1, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1.$$

*Vasile Giurgi, Sighetu Marmaţiei*

**8.** Să se rezolve în $\mathbb{C}$ sistemul: $\begin{cases} z_1 \cdot |z_2z_3| = z_4^2 \\ z_2 \cdot |z_3z_4| = z_1^2 \\ z_3 \cdot |z_4z_1| = z_2^2 \\ z_4 \cdot |z_1z_2| = z_3^2 \end{cases}$.

*Erika Darolţi*

**9.** Fie triunghiul $ABC$ şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{BP}{AB} = k$. Fie punctele $X, Y, Z$ în exteriorul triunghiului, astfel încât $\triangle ABC \sim \triangle NYA \sim \triangle BPZ \sim \triangle XCM$.

a) Să se demonstreze că triunghiurile $ABC$ şi $XYZ$ au acelaşi centru de greutate.

b) Să se demonstreze că $\triangle ABC \sim \triangle XYZ \Leftrightarrow \triangle ABC$ este echilateral.

*Dana Heuberger*

**10.** Să se arate că în orice $\triangle ABC$ avem:

$$\frac{1}{m_a^2 \cdot m_b^2} + \frac{1}{m_b^2 \cdot m_c^2} + \frac{1}{m_c^2 \cdot m_a^2} \leq \frac{1}{S^2},$$

unde $m_a$ reprezintă lungimea medianei din $A$, iar $S$ este aria triunghiului $ABC$.

*Nicolae Muşuroia*

**11.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x^{\log_n a_i} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \log_n x = n - x.$$

(În legătură cu problema 25683, G. M. 12/2006)
*Nicolae Muşuroia*

**12.** Să se determine funcţia injectivă $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ cu proprietatea:

$$(f \circ f)(x) \cdot (f \circ f \circ f)(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

*Nicolae Muşuroia*

**13.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}_+$ ecuaţia:

$$\frac{2 \cdot 11^x - 2^{x+1} + 7}{11^x - 2^x + 1} = 2x + \frac{1}{2}.$$

*Ocean Cristina*

**14.** Determinaţi cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia

$$|z^2 - 1| + \frac{|z^3 + 1|}{\sqrt{8} + \sqrt{9}} + |z^5 - 1|,$$

atunci când $z$ parcurge mulţimea numerelor complexe de modul mai mic sau egal decât $\sqrt{2} - 1$.

*Cristinel Mortici, Târgovişte*

**15.** Se consideră numerele complexe $z_k = x_k + i \cdot y_k$, $k \in \overline{1, 3}$. Să se arate că:

$$\sum \sqrt{|z_1|^4 + y_2^4 + x_3^4} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right).$$

*Dorin Mărghidanu şi Nicolae Muşuroia*

**Clasa a XI-a**

**1.** Să se arate că oricare ar fi $t \in \mathbb{R}^*$, şirul $(I_n(t))_{n\geq 2}$, de termen general
$$I_n(t) = n^{1-t}\left((n+1)^t \cdot \sqrt[n+1]{n+1}^{\,t} - n^t \cdot \sqrt[n]{n}^{\,t}\right),$$
este convergent.

*D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti*

**2.** Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât
$$I_n - A + A^2 - A^3 + A^4 - \cdots - A^{15} + A^{16} = O_n.$$
Să se arate că:
a) $\det(A - A^2) \neq 0$;
b) $\det(I_n - A + A^2) = 1$.

*Gheorghe Boroica*

**3.** Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ şi funcţia
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \det(A + xB).$$
Să se arate că dacă $f(3) = 0$ şi $f(5) = 0$, atunci $f(15) \,\vdots\, 5!$.

*Gheorghe Boroica*

**4.** Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 2$.
i) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
ii) Să se calculeze:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot a_1^2 + (n-1)a_2^2 + \cdots + 2 \cdot a_{n-1}^2 + a_n^2}{n^4}.$$

*Gheorghe Gherasin, Sighetu Marmaţiei*

**5.** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A + 2 \cdot {}^tA) = 0$.
i) Arătaţi că matricea $A$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ matricea $A + {}^tA$ este inversabilă;
ii) Arătaţi că $\det(A + x \cdot {}^tA) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{5}((Tr(A))^2 - Tr(A \cdot {}^tA), \forall x \in \mathbb{R}$.

*Vasile Giurgi, Sighetu Marmaţiei*

**6.** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = 1$ şi $Tr(A) = 1$. Să se calculeze

$$\sum_{k=1}^{n} \det(A^2 + k \cdot I_2), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

*Nicolae Muşuroia*

**7.** Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \ln(1 + k \cdot \operatorname{arctg} x_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Să se arate că $\lim_{n\to\infty} n \cdot x_n = \frac{4}{p+1}$.

(Generalizarea problemei 21253, G. M. 10/1987, autor M. Lascu)
*Nicolae Muşuroia*

**8.** Fie $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0 = \alpha$, $x_1 = \beta$, astfel încât $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Considerăm propoziţia

$(P)$: *Există termeni ai şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$ *care se divid cu* 5.

a) Să se demonstreze că şirul lui Fibonacci are proprietatea $(P)$;

b) Să se demonstreze că şirul lui Lucas nu are proprietatea $(P)$;

c) Să se determine $\alpha, \beta$ pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are proprietatea $(P)$ şi apoi să se găsească toţi termenii şirului care se divid cu 5.

*Costel Chiteş, Bucureşti*

**9.** Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} = \frac{3x_n}{4x_n^2 + 2x_n + 1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

*Crina Petruţiu*

**10.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\varepsilon^3 = 1$ şi matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $\det(A \cdot B)$.

*Ludovic Longaver*

**11.** Se admite cunoscut faptul că limita şirului $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ este egală cu $\frac{\pi^2}{6}$. Demonstraţi că pentru orice număr natural nenul $n$, avem:

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}.$$

*Cristinel Mortici, Târgovişte*

**12.** Să se arate că există un unic şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea:

$$x_n + e^{x_n} = \frac{n}{n+1}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

*Dan Bărbosu*

**13.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$.

a) Să se arate că suma elementelor matricei $A$ este mai mare ca $n^2$;

b) Se iau la întâmplare $n$ elemente ale matricei $A$, situate pe linii şi coloane diferite. Să se arate că produsul acestor numere nu depinde de alegerea făcută.

*Ludovic Longaver*

**14.** Fie $a, b, c$ lungimile laturilor, iar $A, B, C$ măsurile unghiurilor unui triunghi $ABC$. Să se arate că:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b\cdot\cos C & c\cdot\cos B & \sin A \\ c\cdot\cos A & a\cdot\cos C & \sin B \\ a\cdot\cos B & b\cdot\cos A & \sin C \end{vmatrix} = 0.$$

*Ludovic Longaver*

**15.** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, să se determine $a > 0$, astfel încât:

$$(n^2+n+a)^x - (n^2+n)^x \geq (n+3)^x + (n+2)^x - (n+1)^x - n^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

*Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu*

**Clasa a XII-a**

**1.** Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $a + b = \dfrac{\pi}{2}$ şi $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci avem că

$$\int_a^b \cos^2 x \cdot g(\sin x) \cdot \cos x + g(\cos x) \cdot \sin x)dx = \int_{\sin a}^{\sin b} g(x)dx.$$

*D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti*

**2.** Se consideră funcţiile continue $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq -1$ astfel încât $f(x) + b \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = c$, $x^2 g(x) h\left(\dfrac{1}{x}\right) = g\left(\dfrac{1}{x}\right) h(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$. Să se arate că:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} dx = \frac{c}{1+b} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{g(x)}{h(x)} dx.$$

(În legătură cu problema 8, pag. 109 din Argument 11/2009)

*D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti*

**3.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Să se arate că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(c) \cdot f(c) = c^3$, unde $F$ este o primitivă pentru $f$.

*Gheorghe Boroica*

**4.** Să se arate că pentru orice $a$ număr real nenul, ecuaţia

$$4x^5 \cdot \cos^2 x - 10a^2 \cdot x^4 + 4a \cdot x^3 + 5x^2 \cdot \sin x + a^2 x + 2a^2 = 0$$

are cel puţin o soluţie în $(-1, 1)$.

*Gheorghe Boroica*

**5.** Fie $p$ un număr prim. Să se demonstreze că $C_{3p}^p - 3 \cdot C_{2p}^p + 3$ se divide cu $p^3$.

*Meda şi Florin Bojor*

**6.** Se consideră $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi mulţimile $M_n = \{x \in \mathbb{Z}_n | x^2 = \widehat{3} \cdot x + \widehat{1}\}$.

a) Să se determine $M_3$ şi $M_4$

b) Dacă mulţimea $M_n$ are un număr impar de elemente, să se determine $n$.

*Dana Heuberger*

**7.** Să se determine inelul $(A,+,\cdot)$ cu $1 \neq 0$, astfel încât $\forall\, x, y \in A$, $x \neq y$, avem $x^2 = y + 1$ sau $y^2 = x + 1$.

*Dana Heuberger*

**8.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi polinomul $f = a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, $a_n \neq 0$. Să se arate că dacă $|f(\varepsilon)| \leq |a_n|$, unde $\varepsilon$ este o rădăcină de ordinul $n$ a unităţii, atunci $f$ are cel puţin o rădăcină de modul cel mult doi.

*Nicolae Muşuroia*

**9.** Să se arate că dacă $a > 0$ şi $m \in (-a, a)$, atunci:

$$-a < \frac{a^2(x+y) + m(a^2+xy)}{a^2 + xy + m(x+y)} < a, \quad \forall\, x, y \in (-a, a).$$

*Nicolae Muşuroia*

**10.** Să se arate că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\sin x) + \cos(\cos x))dx > \frac{16}{9}$.

*Horia Zlampareţ*

**11.** Să se calculeze:

$$I = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{x^4 + x^2 + 1}\, dx.$$

*Crina Petruţiu*

**12.** Aflaţi primitivele funcţiei:

$$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x(\ln 2 \cdot \operatorname{ctg}^{1006} x - 1006 \cdot \operatorname{ctg}^{1005} x - 1006 \cdot \operatorname{ctg}^{1007} x).$$

*Cristina Ocean*

**13.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă, cu proprietatea că graficul său este simetric faţă de dreapta de ecuaţie $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se arate că

$$\int f'(x)(e^{f(2a-x)} + 2f(2a-x))dx = f^2(x) + e^{f(x)} + \mathcal{C}.$$

*Ludovic Longaver*

**14.** Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{x+1} + e^{x+e^x}$.

a) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$;

b) Dacă $F$ este o primitivă a lui $f$ care se anulează în $x = 0$, atunci determinaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot F\left(\frac{1}{n}\right)$.

*Ionel Tudor, Giurgiu*

**15.** Notăm cu $M$ mulţimea funcţiilor $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ derivabile, cu proprietatea ca $f'(x) \cdot f(x) = \dfrac{x}{1 + e^x}$, oricare ar fi $x \in [2, \infty)$.

Demonstraţi că:

a) Mulţimea $M$ este nevidă.

b) Mulţimea $M$ conţine cel puţin o funcţie concavă.

*Cristinel Mortici, Târgovişte*

## *Sumar*