Revistă de matematică editată de Catedra de matematică
a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Materialele spre publicare se vor trimite pe adresa:
Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", str. Gh. Şincai 25, Baia Mare
sau pe adresa de mail: musuroianicolae@yahoo.com;
dana_heuberger@yahoo.com
cu menţiunea *pentru revista Argument*
Revista va putea fi citită pe adresa *www.sincai.multinet.ro*

ISSN 1582– 3660

Argument

Sumar

O clasă de ecuaţii funcţionale elementare

Vasile Berinde

Abstract. This article presents a few classes of elementary functional equations.

1. Introducere

În revistele de matematici elementare dar şi la concursurile de matematică din ultimii 30 de ani au fost propuse probleme care cer rezolvarea unor ecuaţii funcţionale elementare care nu implică noţiuni şi rezultate de analiză matematică. Aşa cum sugerează şi numele său, o *ecuaţie funcţională* este o ecuaţie în care necunoscuta este o *funcţie* (reală de variabilă reală). Unul dintre cele mai simple exemple de acest fel este dat în problema următoare.

1. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisfac relaţia*

$$f(x) + 2f(1-x) = 1 + x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

problemă care se rezolvă astfel. Luăm $y := 1 - x$ în (1.1) şi obţinem $f(1-y) + 2f(y) = 2 - y$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Schimbând acum pe y în x, obţinem împreună cu (1.1) un sistem liniar de 2 ecuaţii cu necunoscutele $f(x)$ şi $f(1-x)$, din care se obţine că unica funcţie care îndeplineşte proprietatea din enunţ este $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Scopul acestei note este de a prezenta câteva dezvoltări care pot fi făcute în legătură cu acest tip de probleme, preluând o parte din materialul prezentat în [4]. Punctul de plecare al demersului nostru este însăşi ideea de rezolvare a problemei anterioare.

Dacă notăm $g(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, observăm că $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie bijectivă şi, în plus, $g^{-1} = g$, ceea ce înseamnă că $g(g(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Aceeaşi tehnică de rezolvare se aplică şi la rezolvarea următoarelor ecuaţii funcţionale, pe care le-am compus folosind aceeaşi "reţetă":

2. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisfac relaţia*

$$3f\left(\frac{1-x}{2}\right) + 2f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 3x - 2,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

3. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisfac relaţia*

$$f\left(\frac{3x-2}{4}\right) - 2f\left(\frac{6-3x}{4}\right) = 2 - |x-1|,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

4. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *care satisfac relaţia*

$$f(x) + 2f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) = x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}. \tag{1.4}$$

Rezolvarea problemelor 2-4 se face la fel ca şi pentru 1. Spre exemplu, în cazul Problemei 2, notând $y := \dfrac{1-x}{2}$ rezultă $x = 1 - 2y$ şi deci $\dfrac{1+x}{2} = 1 - y$, astfel că ecuaţia (1.2) revine la una de forma (1.1):

$$3f(y) + 2f(1-y) = -3y - \frac{1}{2}.$$

La fel se procedează şi cu ecuaţia din Problema 3, pentru care facem substituţia $y := \dfrac{3x-2}{4}$ şi se ajunge tot la o ecuaţie de tipul (1.1).

În cazul Problemei 4, se face substituţia $y := g(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ şi se foloseşte faptul că $g = g^{-1}$, deci g are proprietatea (1.6).

Aşadar toate ecuaţiile funcţionale din problemele 1-4 sunt (sau pot fi transformate, printr-o substituţie adecvată, la o ecuaţie) de forma

$$\alpha f(x) + \beta f(g(x)) = h(x),\ (\alpha^2 - \beta^2 \neq 0), \tag{1.5}$$

cu $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie având proprietatea

$$g^{[2]}(x) = x,\ \forall x \in A, \tag{1.6}$$

unde $g^{[k]}$ este iterata de ordinul k a funcţiei g, definită prin $g^{[k]}(x) = g^{[k-1]}(g(x))$, pentru $k \geq 2$, şi $g^{[1]} \equiv g$.

2. O nouă categorie de ecuaţii funcţionale

Începem prin a ne pune următoarea întrebare: este oare funcţia $g(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, implicată în problemele 1-3, singura funcţie liniară care are proprietatea (1.6)?

Este uşor de stabilit că răspunsul este negativ, căci, dacă vom căuta funcţii de forma $g(x) = ax + b$ care coincid cu inversa lor şi care, ca urmare a acestui fapt, satisfac condiţia (1.6), obţinem o infinitate de soluţii nebanale, şi anume, toate funcţiile $g(x) = -x + b$, $x \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

În acest fel putem obţine şi alte probleme de acelaşi tip cu cele de mai sus, a căror rezolvare o lăsăm în seama cititorului.

5. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$2f(x) - f(3-x) = 2x - 3,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

6. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisfac*

$$f\left(\frac{1-x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 1 - |x|\,,\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2.2)$$

7. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *care satisfac relaţia*

$$f\left(\frac{3x-2}{4}\right) - 2f\left(\frac{22-3x}{4}\right) = 1 + x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2.3)$$

Combinând acum ideea de la problemele 5-7 cu cea din Problema 4, mai obţinem şi următoarele ecuaţii funcţionale.

8. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisfac relaţia*

$$2f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) + f\left(\frac{7}{2-x}\right) = 1 - x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}. \qquad (2.4)$$

9. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$f\left(\frac{x+5}{2-x}\right) - 2f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) = |x-2|\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}. \qquad (2.5)$$

Problemele 8 şi 9 au, faţă de celelalte prezentate până acum, câteva particularităţi demne de menţionat. În primul rând, ecuaţiile (2.4) şi (2.5) sunt de forma mai generală

$$\alpha f(g(x)) + \beta f(h(x)) = e(x),\ (\alpha^2 - \beta^2 \neq 0), \qquad (2.6)$$

în care funcţiile g şi h nu mai sunt funcţii liniare ci funcţii raţionale (în fapt, funcţii omografice). În al doilea rând, în timp ce problemele 1-7 au soluţie unică, problemele 8-9 nu mai au această proprietate, aşa cum vom arăta în continuare pentru problema 8.

Într-adevăr, cu substituţia $y := g(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$, ecuaţia (2.4) devine (luând formal x în loc de y)

$$2f(x) + f(2-x) = 1 - \frac{2x+3}{x-2},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

care, prin substituţia $x := 2 - y$, ne conduce la

$$2f(2-x) + f(x) = 1 + \frac{7-2x}{x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Rezolvăm acum sistemul liniar format din ultimele 2 ecuaţii şi obţinem

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4x+7}{3x-6} - \frac{7-2x}{x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

Mai trebuie să determinăm valorile lui f în punctele 0 şi 2. Pentru aceasta, luăm $x = 2$ în ultima ecuaţie şi rezultă $4f(0)+2f(2) = 5$. Punem $f(0) = a \in \mathbb{R}$, şi deducem că ecuaţia (2.4) are într-adevăr o infinitate de soluţii $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{4x+7}{3x-6} - \dfrac{7-2x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \\ \dfrac{5-4a}{2}, & x = 2 \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Observaţia 1. În cazul ecuaţiei funcţionale (2.4) am folosit faptul că funcţia $h \circ g$ era inversabilă şi

$$(h \circ g)^{-1} = h \circ g. \tag{2.7}$$

Am mai putea obţine şi alte dezvoltări legate de tematica din această secţiune căutând şi alte funcţii omografice

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ c \neq 0,$$

care să aibă proprietatea (1.6). Efectuând calculele, se ajunge la concluzia că, o condiţie suficientă pentru ca (1.6) să fie satisfăcută este $a + d = 0$, adică $d = -a$. Aşadar, orice funcţie omografică de forma

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx-a},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ c \neq 0, \tag{2.8}$$

satisface (1.6).

Este acum uşor de observat că funcţia g de la problemele 4, 8 şi 9 se obţine din (2.8) pentru $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$. Următoarele două ecuaţii funcţionale se obţin tot din (2.8) pentru alte valori particulare ale numerelor a, b, c:

$$2f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) + 3f\left(\frac{x-2}{2x-1}\right) = 3x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}. \tag{2.9}$$

$$f\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right) - 2f\left(\frac{4x-7}{3x-2}\right) = 2 - 3x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}. \tag{2.10}$$

La o analiză mai atentă, se observă că pentru ecuaţia funcţională (2.6), condiţia (2.7) poate fi slăbită, adică putem rezolva ecuaţia funcţională (2.6) şi în prezenţa unei condiţii mai slabe, şi anume

$$h \circ g = g \circ h, \tag{2.11}$$

ceea ce, în cazul $g(x) = b - x$ şi $h(x) = \dfrac{ax+c}{dx-a}$, ne conduce la rezolvarea sistemului neliniar

$$\begin{cases} d(2a - bd) = 0 \\ (bd - a)^2 - a^2 = 0 \\ bd(ab + c) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Se observă că, pentru ca cele 3 ecuaţii ale sistemului (2.12) să fie satisfăcute, este suficient ca $2a - bd = 0$ şi $ab + c = 0$.

Sistemul (2.12) are de fapt o infinitate de soluţii:

$$a = kb,\ b \in \mathbb{R}(b \neq 0),\ c = -kb^2,\ d = 2k,$$

unde $k \in \mathbb{R}$ este un număr real oarecare.

O soluţie particulară a sistemului (2.12) este spre exemplu $a = 1$, $b = 2$, $d = 1$, $c = -2$, şi prin urmare

$$g(x) = 2 - x,\ h(x) = \frac{x-2}{x-1},$$

constituie o pereche (g, h) care satisface (2.11). Putem obţine în acest fel următoarele ecuaţii funcţionale, pe care le propunem spre rezolvare cititorului.

$$f(2-x) + 2f\left(\frac{x-2}{x-1}\right) = 3 - x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \tag{2.13}$$

$$3f\left(\frac{x}{x-1}\right) - 2f(2-x) = 1 + 2x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \tag{2.14}$$

3. O a doua categorie de ecuaţii funcţionale

Toate ecuaţiile funcţionale din secţiunile precedente s-au bazat, în esenţă, pe pe faptul că g avea proprietatea (1.6):

$$g^{[2]}(x) = x,\ \forall x \in A.$$

Este posibil să facem şi alte dezvoltări, considerând ecuaţii funcţionale în care apar iterate de ordin mai mare ale funcţiei g adică (1.6) este înlocuită cu

$$g^{[k]}(x) = x,\ \forall x \in A, \tag{3.1}$$

pentru un anumit $k \geq 3$.

Un exemplu de acest fel este problema 1 de la clasa a IX-a, dată la faza naţională a Olimpiadei de matematică în anul 1983, autor Th. Dăneţ, care cere să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{3.2}$$

şi care este o prelucrare după o problemă propusă la Olimpiada din U.R.S.S., problemă care apare, cu numărul 1.9, pag. 38, în excelenta culegere de probleme [1].

În acest caz este uşor de verificat că $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$ satisface (3.1) cu $k = 3$, astfel că pentru rezolvarea ecuaţiei (3.2), suntem conduşi de această dată la un sistem liniar de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, din care se determină $f(x)$ pentru $x \neq 0$.

O variantă mai simplă a ecuaţiei (3.2) este următoarea:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) - f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x+1,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \tag{3.3}$$

care se rezolvă astfel. Observăm că $g^{[2]}(x) = \dfrac{1}{1-x}$ şi atunci ecuaţia (3.3) se scrie mai simplu sub forma:

$$-f(x) + f(g(x)) + f\left(g^{[2]}(x)\right) = x+1,$$

din care obţinem

$$-f(g(x)) + f\left(g^{[2]}(x)\right) + f(x) = g(x)+1,$$

şi, respectiv,

$$-f\left(g^{[2]}(x)\right) + f(x) + f(g(x)) = g^{[2]}(x)+1.$$

Adunând ultimele două relaţii obţinem

$$f(x) = \frac{g(x)+g^{[2]}(x)}{2} + 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

Propunem cititorului, în încheierea acestei secţiuni, să rezolve problema 26 273 din *Gazeta Matematică* nr. 3/2010, pag. 155, propusă de S. Boga, al cărei enunţ este următorul.

10. *Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$ pentru care*

$$f\left(\frac{x-5}{x-3}\right) + f\left(\frac{2x-5}{x-2}\right) + f\left(\frac{3x-5}{x-1}\right) = 2010 + 2f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}. \tag{3.4}$$

Indicaţie. Notăm $g(x) = \dfrac{x-5}{x-3}$ şi observăm că $g^{[2]}(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$, $g^{[3]}(x) = \dfrac{3x-5}{x-1}$ şi $g^{[4]}(x) = x$.

4. Alte probleme înrudite

Pot fi întâlnite probleme înrudite cu cele de mai sus, care să ceară, spre exemplu, demonstrarea faptului că o anumită ecuaţie funcţională nu admite soluţii. Un exemplu tipic este problema 24 679 din *Gazeta Matematică* nr. 4/2002, pag. 175, propusă de M. Berca, al cărei enunţ este următorul.

11. *Demonstraţi că nu există funcţii* $f : \mathbb{R} \setminus \{-1/5\} \to \mathbb{R}$ *care satisfac relaţia*

$$f(x) + f\left(\frac{3x-1}{5x+1}\right) = x, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/5\}. \tag{4.1}$$

Rezolvare. Presupunem că există o asemenea funcţie şi luăm pe rând în (4.1), $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 1/3$. Obţinem relaţiile:

$$f(0) + f(-1) = 0; f(-1) + f(1) = -1; f(1) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 1; f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0) = \frac{1}{3},$$

care adunate termen cu termen ne dau

$$f(0) + f(-1) + f(1) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Dar cum $f(0)+f(-1) = 0$, relaţia anterioară ne conduce la concluzia că $f(1)+f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$, în contradicţie cu faptul că $f(1) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$.

Observaţia 2. Şi aici a fost de fapt esenţială proprietatea funcţiei g, dată pentru $g(x) = \frac{3x-1}{5x+1}$: $g^{[2]}(x) = \frac{2x-5}{x-2}$, $g^{[3]}(x) = \frac{3x-5}{x-1}$ şi $g^{[4]}(x) = x$. De notat că în *Gazeta Matematică* nu a părut o rezolvare a acestei probleme. O problemă de acelaşi tip, corespunzătoare ecuaţiei (3.4), este următoarea

12. *Demonstraţi că nu există funcţii* $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ *care satisfac relaţia*

$$f(x) + f\left(\frac{x-5}{x-3}\right) = x, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}. \tag{4.2}$$

Pentru a ne completa lista de probleme de acest tip, căutăm funcţiile omografice de forma

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \ c \neq 0,$$

care satisfac condiţia (3.1) pentru $k = 4$. Ajungem, după efectuarea unor calcule care cer mai multă răbdare, la concluzia că a, b, c, d trebuie să verifice ecuaţia

$$a^2 + 2bc + d^2 = 0,$$

care admite o infinitate de soluţii de forma

$$a = 1,\ b = -2u^2 - 2u - 1,\ c = 1,\ d = 2u + 1,\ u \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

o infinitate de soluţii de forma

$$a = 2,\ b = -2u^2 - 2,\ c = 1,\ d = u,\ u \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

şi o infinitate de soluţii de forma

$$a = 3,\ b = -10u^2 - 2u - 1,\ c = 5,\ d = 10u + 1,\ u \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Este uşor de văzut că funcţia g din Problemele 10 şi 12 se obţine din (4.3) pentru $u = -2$, în timp ce funcţia g din Problema 11 se obţine din (4.5) pentru $u = 0$. Folosind acum (4.3)-(4.5), putem obţine oricâte probleme de tipul problemelor 10 şi 12. Ne mulţumim să enunţăm una singură.

13. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$-2f(x) + f\left(\frac{x-5}{x+3}\right) + f\left(\frac{-x-5}{x+1}\right) + f\left(\frac{-3x-5}{x-1}\right) = 2011, \tag{4.6}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$.

O problemă din aceeaşi familie, dar care cere mai puţin decât Problema 1, este problema O.28 din *Revista de Matematică din Timişoara*, nr. 1/1996, pag. 23, având următorul anunţ.

14. *Funcţia* $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ *verifică relaţia*

$$2f(x) - f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \tag{4.7}$$

Verificţi că $f(0) + f(1) = 1$ *şi determinaţi* $f(1/2)$.

Încheiem această lucrare propunându-i cititorului una dintre cele mai complexe probleme din clasa de probleme tratate până acum, cu scopul de a-i sugera reabordarea celorlate probleme parcurse până acum din această nouă perspectivă, şi anume Problema 1, clasa a IX-a, propusă de D. Barac la Concursul interjudeţean "Gh. Lazăr" din 2009, vezi *Gazeta Matematică* nr. 6/2009, pag. 284.

15. *Fie* $\mathcal{F}$ *mulţimea soluţiilor ecuaţiei funcţionale*

$$2f(3-2x) + f\left(\frac{3-x}{2}\right) = x. \tag{4.8}$$

a) Arătaţi că $\mathcal{F}$ *conţine cel puţin o funcţie bijectivă;*

b) Fie $M = \{4^{-n} + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. *Definim funcţia* $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dată prin* $g_a(x) = 0$, *pentru* $x \in \mathbb{R} \setminus M$ *şi* $g_a(x) = (-2)^n a$, *pentru* $x = 4^{-n} + 1 \in M$, *pentru orice* $a \in \mathbb{R}$. *Arătaţi că*

$$2g_a(3-2x) + g_a\left(\frac{3-x}{2}\right) = 0, \forall x, a \in \mathbb{R}.$$

c) Arătaţi că $\mathcal{F}$ *conţine o infinitate de elemente.*

Pentru continuarea studiului ecuaţiilor funcţionale, în cazul în care anumite proprietăţi ale soluţiilor - cum ar fi monotonia, existenţa limitei, continuitatea, derivabilitatea etc. - sunt esenţiale pentru rezolvarea acestor ecuaţii, trimitem cititorul la monografia [7], precum şi la capitolul 14 al cărţii [2] ([3] este varianta în limba engleză a acesteia).

Bibliografie

[1] Gh. Andrei, C. Caragea, I. Cucuruzeanu, şi Gh. Bordea, *Exerciţii şi probleme de Algebră pentru concursuri şi olimpiade şcolare*, Ediţie îngrijită de Revista "Tomis", Constanţa, 1990

[2] V. Berinde, *Explorare, investigare şi descoperire în matematică*, Efemeride, Baia Mare, 2001

[3] V. Berinde, *Exploring, Investigating and Discovering in Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 2004

[4] V. Berinde, *Două clase de ecuaţii funcţionale elementare*, A 26-a Conferinţă Naţională "Didactica Matematicii", Cavnic, 22 mai 2010

[5] V. Berinde, *Explorări în jurul unei ecuaţii funcţionale elementare*, Sesiunea judeţeană de comunicări ştiinţifice şi metodice a profesorilor de matematică. Ediţia a XIV-a, Şomcuta Mare, 21 mai 2011

[6] Colecţia *Gazeta Matematică* (1979-2010)

[7] V. Pop, *Ecuaţii funcţionale. Ecuaţii clasice şi probleme*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2002

Prof. univ. dr. Universitatea de Nord Baia Mare
E-mail: vasile_berinde@yahoo.com; vberinde@ubm.ro

Inegalităţi interesante şi consecinţele lor

D. M. Bătineţu-Giurgiu şi Nicolae Muşuroia

Abstract. This article puts forward new relations concerning the elements of a triangle, starting from several known inequalities.

În acest articol vom obţine relaţii între elementele unui triunghi, pornind de la unele inegalităţi cunoscute. Metoda este inspirată din [3]. Sperăm că rezultatele obţinute au caracter de noutate. Evident, se pot folosi şi alte inegalităţi care pot fi prelucrate asemănător.

Propoziţia 1. *Dacă* $x, y, z \in (0, \infty)$ *şi* $x + y + z = 1$*, atunci*:

$$\frac{xy}{1+z} + \frac{yz}{1+x} + \frac{zx}{1+y} \leq \frac{1}{4}\,.$$

(*Viorel Vâjâitu şi Alexandru Zaharescu*)

Demonstraţie. Inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{xy}{x+y+2z} + \frac{yz}{y+z+2x} + \frac{zx}{z+x+2y} \leq \frac{x+y+z}{4}\,. \tag{1}$$

Având în vedere inegalitatea $\dfrac{4}{u+v} \leq \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}$, dacă $u, v \in (0, \infty)$, rezultă:

$$\frac{xy}{x+y+2z} = \frac{xy}{(x+z)+(y+z)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{xy}{x+z} + \frac{xy}{y+z}\right)$$

şi analoagele. Adunându-le obţinem inegalitatea (1).

Egalitate avem atunci când $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

Consecinţa 1.1. *În triunghiul* ABC *avem*:

$$\frac{1}{a(a+2p)} + \frac{1}{b(b+2p)} + \frac{1}{c(c+2p)} \leq \frac{1}{8Rr}\,.$$

Demonstraţie. În inegalitatea din Propoziţia 1, luăm $x = \dfrac{a}{2p}$, $y = \dfrac{b}{2p}$, $z = \dfrac{c}{2p}$, unde a, b, c sunt laturile triunghiului ABC. Deci $x+y+z = 1$. Atunci

$$\frac{xy}{1+z} = \frac{abc}{2pc(c+2p)} = \frac{2Rr}{c(c+2p)}\,,$$

deoarece $abc = 4RS$ şi $S = p \cdot r$, notaţiile fiind cele cunoscute.

Consecinţa 1.2. *În triunghiul ABC are loc*:

$$\frac{1}{(b+c)(p-a)} + \frac{1}{(c+a)(p-b)} + \frac{1}{(a+b)(p-c)} \le \frac{1}{4r^2}\,.$$

Demonstraţie. În inegalitatea din Propoziţia 1, punem $x = \dfrac{p-a}{p}$, $y = \dfrac{p-b}{p}$, $z = \dfrac{p-c}{p}$.
Atunci

$$\frac{xy}{1+z} = \frac{(p-a)(p-b)}{p(2p-c)} = \frac{S^2}{p^2(p-c)(a+b)} = \frac{r^2}{(p-c)(a+b)}$$

şi analoagele. Înlocuind, obţinem inegalitatea cerută, cu egalitate în triunghiul echilateral.

Propoziţia 2. *Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ şi $x + y + z = 1$, atunci*

$$\left(1 + \frac{x}{yz}\right)\left(1 + \frac{y}{zx}\right)\left(1 + \frac{z}{xy}\right) \ge 64. \qquad ([3])$$

Demonstraţie. Avem:

$$1 + \frac{x}{yz} = 1 + \frac{x(x+y+z)}{yz} = \frac{(x+y)(x+z)}{yz}\,.$$

Inegalitatea devine:

$$(x+y)^2 + (y+z)^2(z+x)^2 \ge 64x^2y^2z^2.$$

În condiţiile $x, y, z \in (0, \infty)$, obţinem: $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz$, adică o inegalitate cunoscută, care se obţine imediat, aplicând inegalitatea mediilor pentru fiecare paranteză.

Consecinţa 2.1. *În triunghiul ABC*

$$\left(1 + \frac{a^2}{2Rr}\right)\left(1 + \frac{b^2}{2Rr}\right)\left(1 + \frac{c^2}{2Rr}\right) \ge 64,$$

egalitatea având loc în cazul triunghiului echilateral.

Demonstraţie. În inegalitatea din Propoziţia 2, luăm $x = \dfrac{a}{2p}$, $y = \dfrac{b}{2p}$, $z = \dfrac{c}{2p}$, unde a, b, c sunt laturile triunghiului ABC. Atunci

$$1 + \frac{x}{yz} = 1 + \frac{2pa^2}{abc} = 1 + \frac{a^2}{2Rr}$$

şi analoagele.

Consecinţa 2.2. *În triunghiul ABC:*

$$\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}\right)\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{B}{2}\right)\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{C}{2}\right) \geq 64.$$

Demonstraţie. În inegalitatea din Propoziţia 2 luăm $x = \dfrac{p-a}{p}$, $y = \dfrac{p-b}{p}$, $z = \dfrac{p-c}{p}$, deci $x + y + z = 1$. Atunci

$$1 + \frac{x}{yz} = 1 + \frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}$$

şi analoagele.

Observaţie. Din inegalitatea de la Consecinţa 2.2 obţinem imediat o cunoscută inegalitate. În triunghiul ABC:

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Propoziţia 3. *Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ şi $xyz = 1$, atunci:*

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq x + y + z. \qquad ([3])$$

Demonstraţie. Inegalitatea este echivalentă cu $3\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}\right) \geq 3(x + y + z)$. Atunci

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) &= \left(2\,\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(2\,\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(2\,\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{z^2} \cdot \frac{z}{x}} + 3\sqrt[3]{\frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{x}{y}} \\ &= 3\left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{xyz}} + \sqrt[3]{\frac{y^3}{xyz}} + \sqrt[3]{\frac{z^3}{xyz}}\right) = 3(x + y + z). \end{aligned}$$

Consecinţa 3.1. *În triunghiul ABC*:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\sqrt[3]{\frac{2p^2}{Rr}}.$$

Demonstraţie. În inegalitatea din Propoziţia 3 punem $x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{abc}}$, $y=\dfrac{b}{\sqrt[3]{abc}}$, $z=\dfrac{c}{\sqrt[3]{abc}}$, unde a,b,c sunt laturile triunghiului.

Bibliografie

[1] M. Becheanu şi B. Enescu, *Inegalităţi elementare ... şi mai puţin elementare*, Ed. GIL, 2002

[2] M. Chiriţă, T. Bulzan, L. Gaga şi V. Tudoran, *Inegalităţi matematice*, Ed. Felix, 1998

[3] M. O. Drîmbe, *Inegalităţi, idei şi metode*, Ed. GIL, 2003

Profesor, Bucureşti

Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Şincai" Baia Mare

Semnificaţii ale numărului 30

Costel Chiteş

Abstract. This paper is a homage to Marcel Ţena, a brilliant romanian mathematician.

Este binecunoscut faptul că numărul 30 are proprietatea remarcabilă de a fi cel mai mare număr natural pentru care toate numerele naturale k astfel încât $2 \leq k < 30$ şi $(k, 30) = 1$ sunt numere prime.

Se observă cu uşurinţă că şi numerele $3, 4, 6, 8, 12, 18, 24$ au proprietatea menţionată. Cel mai mare număr de acest tip este însă 30. Pentru a vedea o demonstraţie a acestui fapt în care nu se foloseşte teorema lui Cebâşev, invităm cititorul să consulte excelenta lucrare [1], în care se utilizează inegalitatea lui H. Bonse:

$$p_{n+1}^2 < p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

unde p_n înseamnă cel de-al n-lea număr din şirul numerelor prime.

Anul 2011 a adăugat o semnificaţie specială prezenţei numărului 30 în viaţa matematică românească, căci distinsul nostru coleg, domnul profesor Marcel Ţena, a împlinit 30 de ani de activitate ca redactor la Gazeta Matematică, seria B, şi $30 \cdot 2$ de ani de viaţă. Despre matematicianul Marcel Ţena, profesor la Colegiul Naţional "Sfântul Sava" din Bucureşti şi doctor în matematică, se pot spune multe lucruri frumoase. O parte dintre acestea, cititorul le poate vedea pe site-ul *www.viitoriolimpici.ro*.

Am avut privilegiul să îl cunosc pe domnul profesor încă din anii studenţiei mele, perioadă în care redactorul Marcel Ţena avea bunăvoinţa să discute deschis cu autorii, de orice vârstă, pe marginea materialelor primite spre publicare. După rezolvări minuţioase, făcute cu răbdarea unui adevărat dascăl pe tabla din sala oferită de Facultatea de Matematică redacţiei Gazetei Matematice, după comentarii atente şi metodice asupra ideilor vehiculate, oricine îşi poate imagina bucuria pe care o simţeam, student fiind, atunci când domnul profesor îmi spunea că problemele mele sunt publicabile, precizând chiar şi numărul revistei în care acestea urmau să apară. Şi nu beneficiam de un tratament special, căci şi alţi colegi de-ai mei de atunci pasionaţi de matematică - mi-i amintesc printre alţii pe Marius Tucsnak, Cristian Voica şi Bogdan Enescu - au fost, în mod la fel de generos şi sistematic, sprijiniţi şi încurajaţi.

Profesor fiind, l-am reîntâlnit pe domnul Marcel Ţena la acţiuni organizate de Societatea de Matematică, pe vremea când aceasta era condusă de regretatul academician N. V. Teodorescu. Am remarcat atunci eleganţa rezultatelor expuse şi talentul pedagogic de care domnul profesor dădea dovadă prezentându-le. Ca inspector, am asistat şi la câteva ore de predare ale domnului Ţena, prilej cu care mi-am întărit convingerea că elevii dânsului sunt cu adevărat privilegiaţi.

Iubitorii matematicii de toate vârstele cunosc frumoasele sale articole şi probleme, publicate în paginile Gazetei Matematice sau făcând parte dintre subiectele multor concursuri şi olimpiade şcolare, precum şi valoroasele cărţi la care a fost autor şi coautor. Doresc să atrag atenţia în mod special asupra excelentei lucrări "Rădăcinile unităţii" [2], apărută în anul 2005. Consider că aceasta este o carte care nu trebuie să lipsească din biblioteca niciunui viitor intelectual de formaţie ştiinţifică.

Ca parte a teoriei numerelor, rădăcinile unităţii au fost studiate de mari matematicieni, începând cu J. L. Lagrange, L. Euler şi C. F. Gauss. Marele Hilbert afirma: "Teoria numerelor şi teoria ecuaţiilor lui Galois au rădăcinile lor comune în teoria corpurilor algebrice şi această teorie a corpurilor de numere a devenit partea cea mai importantă a teoriei moderne a numerelor".

Prezentarea exhaustivă şi atractivă din primul capitol al lucrării a proprietăţilor grupului ciclic $(U_n, \cdot)$ al rădăcinilor de ordinul n ale unităţii este o excelentă abordare a unui grup finit important care merită să fie studiat de elevii de clasa a X-a, împreună cu grupurile numerice infinite standard $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}, +)$. Mai mult, este de dorit ca aceste grupuri să fie abordate de la început, chiar şi implicit, aşa cum o şi face domnul Marcel Ţena, din punct de vedere al structurii lor algebrice. Să nu ne ferim de termenii algebrici de grup, inel, corp. Proprietăţile acestor structuri se reţin uşor şi unitar studiind exemplele remarcabile amintite mai înainte, iar cunoaşterea lor face mai accesibilă o primă apropiere de algebra superioară. În plus, în manualele germane de exemplu, corpul K este definit ca fiind o mulţime nevidă închisă la cele patru operaţii algebrice $+, -, \cdot, :$, evident, prin evitarea împărţirii la zero. De asemenea, determinarea rădăcinilor primitive ale unităţii este un bun prilej pentru a introduce ordinul unui element al grupului multiplicativ al numerelor complexe nenule, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, precum şi teorema de caracterizare a acestuia, folositoare chiar şi în clasa a X-a, la concursurile şcolare. Cel mai important aspect îl reprezintă necesitatea utilizării primelor cunoştinţe despre polinoame pentru un studiu cât mai amănunţit şi riguros al noţiunilor şi proprietăţilor deja amintite. Aşezarea din ultimii ani a capitolului de polinoame la sfârşitul programei de clasa a XII-a şi nu în clasa a X-a, la locul său firesc, ne face pe noi profesorii să ne lovim deseori de dificultatea unei corecte abordări a materiei în lipsa acestui instrument atât de puternic şi de necesar. Multe dintre problemele date în clasa a X-a la concursurile şcolare agreate de Ministerul Învăţământului fac apel la rădacinile de ordinul n ale unităţii şi la polinoamele asociate acestora. Algoritmul lui Euclid, învăţat pentru numere întregi şi implementat apoi la informatică, este un exemplu de tipar care poate fi aplicat cu uşurinţă pentru aflarea celui mai mare divizor comun a două polinoame, fără ca acest lucru să îi suprasolicite pe elevii de clasa a X-a. Efortul de a îl învăţa este pe deplin justificat de foloasele aduse prin utilizarea acestuia şi a teoremei împărţirii cu rest a polinoamelor în atâtea şi atâtea probleme de analiză matematică şi de algebră, cu care elevii se întâlnesc cu mult înainte de introducerea lor oficială de la sfârşitul clasei a XII-a. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ sunt primele exemple de inele euclidiene cu care elevii vin în contact, iar ei sunt în câştig dacă li se subliniază de la început analogiile dintre proprietăţile operaţiilor definite pe mulţimile de numere şi cele definite pe mulţimile de polinoame. Chiar dacă programele şcolare au suferit modificări, noi profesorii care ţinem la rigoare simţim nevoia de a introduce şi de a utiliza la timp aceste cunoştinţe care intervin continuu. Şi în acest sens, cartea domnului Marcel Ţena este un instrument foarte elegant şi eficient.

Capitolul al doilea al lucrării este orientat spre noţiuni folositoare în concursurile şcolare şi este consacrat determinării polinoamelor ciclotomice $\Phi_n(X) = \prod_{z \in P_n} (X - z)$, unde $n \geq 1$ şi $P_n = \{z \in U_n \mid ord(z) = n\}$. Aici se demonstrează relaţia lui Dedekind:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$

şi frumoasa teoremă în care se arată ireductibilitatea în inelul $\mathbb{Z}[X]$ a polinoamelor ciclotomice (Gauss, Dedekind). Sunt prezentate apoi metode de determinare a coeficienţilor acestor polinoame.

Capitolul al treilea conţine aplicaţii în aritmetică, unde se folosesc, printre altele, numerele prime şi legea reciprocităţii pătratice. Pentru înţelegerea acestora, la sfârşitul lucrării s-a adăugat un Appendix, în care sunt prezentate şi noţiuni speciale de algebră: subinelele lui $\mathbb{C}$ care au grupul unităţilor finit, corpurile pătratice privite ca subcorpuri ale unor corpuri ciclotomice, teorema lui Wedderburn de comutativitate a corpurilor finite. Remarcăm că până şi rezolvarea unor probleme date la olimpiadele de informatică necesită cunoaşterea unora dintre aceste chestiuni teoretice.

Capitolul al patrulea al lucrării este un argument în plus al utilităţii noţiunilor introduse anterior, căci cuprinde aplicaţii ale lor în teoria construcţiei cu rigla şi compasul a poligoanelor regulate. Această teorie, mai complicată decât pare, a apărut în antichitate şi a fost dezvoltată peste ani de mari matematicieni, printre care îi voi aminti pe C. F. Gauss şi F. von Lindemann.

Nu în ultimul rând, fiecare capitol conţine probleme frumoase, atent selectate şi apoi complet rezolvate, care completează inspirat teoria.

De la primele până la ultimele pagini, tratând în mod incitant acest grup minor cu implicaţii majore, cartea se recomandă tuturor prin rigoarea şi dragostea pentru matematică cu care a fost scrisă. Vă mai aşteptăm, domnule profesor, cu cât mai multe alte publicaţii la fel de vii!

În numele tuturor iubitorilor matematicii, un călduros ”La mulţi ani !”

Bibliografie

[1] H. Rademacher, O. Toeplitz, *Despre numere şi figuri*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1968

[2] Marcel Ţena, *Rădăcinile unităţii*, Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, 2005

Profesor dr., Colegiul Naţional ”Tudor Vianu”, Bucureşti

Despre o teoremă a lui Frobenius

Dana Heuberger şi Sorin Ulmeanu

Abstract. This paper presents some contest problems that can be solved using Frobenius's theorem concerning the rank of some matrices.

În acest articol vom evidenţia utilitatea folosirii unei teoreme a lui Frobenius mai puţin vehiculată, dar extrem de puternică, în probleme de concurs în care apare rangul produsului mai multor matrice.

Teorema 1. (Frobenius) *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,p}(\mathbb{C})$ *şi* $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C}$, *atunci are loc inegalitatea*:

$$rang\,(AB) + rang\,(BC) \leq rang\,(B) + rang\,(ABC)\,.$$

O demonstraţie a acestui rezultat apare în lucrarea [5].

Observaţie. Dacă în enunţul teoremei anterioare alegem $k = p$ şi $B = I_k$, atunci obţinem enunţul teoremei lui *Sylvester*.

La faza finală a Olimpiadei de matematică din anul 2010, elevii de clasa a XI-a au avut de rezolvat următoarea problemă:

Problema 1. (M. Andronache) *Fie matricele* $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *astfel încât* $ABC = 0_n$ *şi* $rang(B) = 1$. *Arătaţi că* $AB = 0_n$ *sau* $BC = 0_n$.

Nu vom reproduce soluţia din baremul oficial al concursului care, deşi plină de idei folositoare, este mai lungă, ci vom da o rezolvare folosind teorema de mai sus.

Soluţie. Aplicând inegalitatea lui Frobenius şi folosind ipoteza, obţinem:

$$rang\,(AB)+rang\,(BC) \leq rang\,(B)+rang\,(ABC) = rang\,(B)+rang\,(0_n) = 1$$

Aşadar $rang\,(AB) + rang\,(BC) \leq 1$, de unde, cum rangul unei matrice este un număr natural, deducem că cel puţin unul dintre numerele $rang\,(AB)$ şi $rang\,(BC)$ este egal cu zero, deci cel puţin una din matricele AB şi BC este matricea nulă. □

Observaţie. Nu este obligatoriu ca matricele A, B, C să fie pătratice, ele trebuind să fie doar astfel încât să aibă sens înmulţirile de matrice AB, BC şi ABC. Coeficienţii matricelor pot fi, evident, şi numere complexe.

La faza finală a Olimpiadei de matematică din anul 2004, elevii de clasa a XI-a au primit următoarea problemă:

Problema 2. (I. Savu) *Arătaţi că pentru orice* $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *avem*

$$rang\,(XY) - rang\,(YX) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Vom prezenta o generalizare a acestui rezultat.

Problema 3. (D. Heuberger, I. Savu)

(a) Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$, atunci

$$rang\,(ABC) - rang\,(BAC) \leq \left[\frac{2n}{3}\right];$$

(b) Dacă $t \in \mathbb{N}^*$, $A_1, A_2, \ldots A_t \in \mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$, şi $\sigma \in S_t$, atunci

$$rang\,(A_1A_2\ldots A_t) - rang\left(A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}\ldots A_{\sigma(t)}\right) \leq \left[\frac{(t-1)\,n}{t}\right].$$

Soluţie. (a) Folosind inegalitatea lui Sylvester, obţinem

$rang\,(BAC) \geq rang\,(B) + rang\,(AC) - n \geq rang\,(A) + rang\,(B) + rang\,(C) - 2n.$

Deoarece $rang\,(ABC) \leq rang\,(C)$, deducem:

$$k = rang\,(ABC) - rang\,(BAC) \leq 2n - (rang\,(A) + rang\,(B)). \tag{1}$$

Analog obţinem

$$k \leq 2n - (rang\,(B) + rang\,(C)) \tag{2}$$

şi

$$k \leq 2n - (rang\,(C) + rang\,(A)). \tag{3}$$

Adunând inegalităţile (1), (2) şi (3) obţinem

$$k \leq 2n - \frac{2}{3}\,(rang\,(A) + rang\,(B) + rang\,(C)). \tag{4}$$

Deoarece $k \leq rang(ABC) \leq rang(A)$ şi analog $k \leq rang(B)$ şi $k \leq rang(C)$, deducem

$$k \leq \frac{rang\,(A) + rang\,(B) + rang\,(C)}{3}.$$

Dacă $\dfrac{rang\,(A) + rang\,(B) + rang\,(C)}{3} \leq \dfrac{2n}{3}$, atunci nu avem ce demonstra.

Dacă $\dfrac{rang\,(A) + rang\,(B) + rang\,(C)}{3} > \dfrac{2n}{3}$, folosind inegalitatea (4) deducem

$$k \leq 2n - \frac{2}{3}\,(rang\,(A) + rang\,(B) + rang\,(C)) < 2n - \frac{4n}{3} = \frac{2n}{3}.$$

Cum $k \in \mathbb{N}$, rezultă $k \leq \left[\dfrac{2n}{3}\right]$.
Să observăm că există matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât

$$rang\,(ABC) - rang\,(BAC) = \left[\frac{2n}{3}\right].$$

Într-adevăr, dacă alegem matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 2 şi $BAC = 0_3$, aşadar $rang\,(ABC) - rang\,(BAC) = 2$.
Alegem matricele:

$$A_{3m} = \begin{pmatrix} A & 0_3 & \ldots & 0_3 \\ 0_3 & A & \ldots & 0_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_3 & 0_3 & \ldots & A \end{pmatrix}, \quad B_{3m} = \begin{pmatrix} B & 0_3 & \ldots & 0_3 \\ 0_3 & B & \ldots & 0_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_3 & 0_3 & \ldots & B \end{pmatrix}$$

$$C_{3m} = \begin{pmatrix} C & 0_3 & \ldots & 0_3 \\ 0_3 & C & \ldots & 0_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_3 & 0_3 & \ldots & C \end{pmatrix}, \quad A_{3m+1} = \begin{pmatrix} A_{3m} & 0_{3m,1} \\ 0_{1,3m} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{3m+1} = \begin{pmatrix} B_{3m} & 0_{3m,1} \\ 0_{1,3m} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{3m+1} = \begin{pmatrix} C_{3m} & 0_{3m,1} \\ 0_{1,3m} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{3m+2} = \begin{pmatrix} A_{3m} & 0_{3m,2} \\ 0_{2,3m} & A_2 \end{pmatrix}, \quad B_{3m+2} = \begin{pmatrix} B_{3m} & 0_{3m,2} \\ 0_{2,3m} & B_2 \end{pmatrix}$$

şi $C_{3m+2} = \begin{pmatrix} C_{3m} & 0_{3m,2} \\ 0_{2,3m} & C_2 \end{pmatrix}$, cu $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Avem

$$rang\,(A_{3m}B_{3m}C_{3m}) - rang\,(B_{3m}A_{3m}C_{3m}) = 2m,$$

$$rang\,(A_{3m+1}B_{3m+1}C_{3m+1}) - rang\,(B_{3m+1}A_{3m+1}C_{3m+1}) = 2m,$$

şi

$$rang\,(A_{3m+2}B_{3m+2}C_{3m+2}) - rang\,(B_{3m+2}A_{3m+2}C_{3m+2}) = 2m + 1.$$

(b) Generalizarea se demonstrează pe aceeaşi idee. $\square$

Observaţie. Din enunţul Problemei 2 deducem că $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$rang\,(ABC) - rang\,(BCA) \le \left[\frac{n}{2}\right].$$

Aplicaţia 1. (D. Heuberger, S. Ulmeanu) *Fie matricele* $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $ABC = 0_n$.

(a) *Să se arate că cel puţin una dintre matricele* A, B, C *are rangul mai mic sau egal cu* $\left[\frac{2n}{3}\right]$;

(b) *Să se arate că cel puţin una dintre matricele* AB, BC *şi* CA *are rangul mai mic sau egal cu* $\left[\frac{7n}{12}\right]$.

Soluţie. (a) Ca la Problema 3, folosind teorema lui *Sylvester* deducem

$$0 = rang\,(ABC) \ge rang\,(A) + rang\,(B) + rang\,(C) - 2n,$$

adică

$$rang\,(A) + rang\,(B) + rang\,(C) \le 2n,$$

de unde rezultă concluzia.

(b) Din punctul precedent, avem că cel puţin una dintre matricele A, B, C are rangul mai mic sau egal cu $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

Dacă $rang\,(A) \le \left[\frac{2n}{3}\right]$, din observaţia de la Problema 3 obţinem:

$$rang\,(CAB) = rang\,(CAB) - rang\,(ABC) \le \frac{n}{2}$$

Folosind teorema lui *Frobenius*, deducem:

$$rang\,(CA) + rang\,(AB) \le rang\,(A) + rang\,(CAB) \le \frac{2n}{3} + \frac{n}{2} = \frac{7n}{6}.$$

Rezultă că cel puţin una dintre matricele AB şi CA are rangul mai mic sau egal cu $\left[\frac{7n}{12}\right]$.

Dacă $rang\,(B) \le \left[\frac{2n}{3}\right]$, din teorema lui *Frobenius* deducem

$$rang\,(AB) + rang\,(BC) \le rang\,(B) + rang\,(ABC) = rang\,(B) \le \left[\frac{2n}{3}\right].$$

În acest caz, rezultă că cel puţin una dintre matricele AB şi BC are rangul mai mic sau egal cu $\left[\frac{n}{3}\right]$.

Dacă $rang\,(C) \leq \left[\frac{2n}{3}\right]$, din aceeaşi teoremă deducem

$$rang\,(BCA) = rang\,(BCA) - rang\,(ABC) \leq \frac{n}{2}\,,$$

$$rang\,(BC) + rang\,(CA) \leq rang\,(C) + rang\,(BCA) \leq \frac{2n}{3} + \frac{n}{2} = \frac{7n}{6}\,,$$

şi în acest caz, rezultă că cel puţin una dintre matricele BC şi CA are rangul mai mic sau egal cu $\left[\frac{7n}{12}\right]$. $\square$

Bibliografie

[1] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Analiză matriceală*, Editura Theta, Bucureşti 2001

[2] V. A. Ilyin, E. G. Poznyak, *Linear Algebra*, Mir Publishers Moscow, 1986

[3] L. Mirski, *An introduction to linear algebra*, Oxford University Press, 1955

[4] V. Pop, *Teoreme şi probleme ce caracterizează rangul unei matrice*, revista "Argument" nr. 12/2010, 32–37

[5] V. Pop, *Rangul sumei şi produsului a două matrice*, Gazeta Matematică nr. 7-8-9/2010, 351–359

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Profesor, Colegiul Naţional "I. C. Brătianu", Piteşti

O inegalitate propusă pentru pregătirea lotului olimpic al Spaniei

Cristian Heuberger

Abstract. This article presents a problem which was proposed for the training of the Spanish Olympic team.

Inegalitatea pe care o supun atenţiei în acest articol este interesantă, atât datorită dificultăţii (cel puţin aparente) dar şi prin modul de soluţionare care conduce, după o oarecare simplificare a ei, şi la obţinerea unei alte inegalităţi interesante şi eventual la dezvoltarea de generalizări.

Aşa după cum spune şi titlul articolului, inegalitatea a făcut parte dintr-un set de probleme propuse spre rezolvare lotului Spaniei pentru Olimpiada Internaţională.

Problemă. *Considerăm numerele reale strict pozitive* a, b, c, d *cu* $c > d$ *şi* $ad - bc > 0$. *Atunci pentru orice număr natural nenul* n, *are loc inegalitatea*:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^k \geq \left(\frac{a^{\frac{2^n}{n+1}}-b^{\frac{2^n}{n+1}}}{c^{\frac{2^n}{n+1}}-d^{\frac{2^n}{n+1}}}\right)^{C_{n+1}^2}$$

Demonstraţie. Notând $P = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^k$ avem relaţiile:

$$(i)\ P = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^k = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^k;$$

$$(ii)\ P = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^{n-k}}-b^{C_n^{n-k}}}{c^{C_n^{n-k}}-d^{C_n^{n-k}}}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^{n-k};$$

$$(iii)\ P^2 = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^k \cdot \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^{n-k} = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^n;$$

$$(iv)\ P = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Inegalitatea de demonstrat devine

$$\left(\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right)\right)^{\frac{n}{2}} \geq \left(\frac{a^{\frac{2^n}{n+1}}-b^{\frac{2^n}{n+1}}}{c^{\frac{2^n}{n+1}}-d^{\frac{2^n}{n+1}}}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

şi de aici, evident

$$\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right) \geq \left(\frac{a^{\frac{2^n}{n+1}}-b^{\frac{2^n}{n+1}}}{c^{\frac{2^n}{n+1}}-d^{\frac{2^n}{n+1}}}\right)^{n+1}. \tag{1}$$

Inegalitatea (1) poate fi considerată ea însăşi o problemă demnă de analizat.

Din $ad-bc>0$ şi $c>d$, rezultă $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>1$ şi vom nota cele două rapoarte supraunitare cu α, respectiv β.

Relaţia (1) este echivalentă succesiv cu:

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}\right) \geq \left(\frac{a^{\frac{2^n}{n+1}}-b^{\frac{2^n}{n+1}}}{c^{\frac{2^n}{n+1}}-d^{\frac{2^n}{n+1}}}\right)\\
\Leftrightarrow &\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a^{C_n^k}-b^{C_n^k}}{a^{\frac{2^n}{n+1}}-b^{\frac{2^n}{n+1}}}\right) \geq \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{c^{C_n^k}-d^{C_n^k}}{c^{\frac{2^n}{n+1}}-d^{\frac{2^n}{n+1}}}\right)\\
\Leftrightarrow &\prod_{k=0}^{n}\frac{b^{C_n^k}}{b^{\frac{2^n}{n+1}}}\left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{C_n^k}-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2^n}{n+1}}-1}\right) \geq \prod_{k=0}^{n}\frac{d^{C_n^k}}{d^{\frac{2^n}{n+1}}}\left(\frac{\left(\frac{c}{d}\right)^{C_n^k}-1}{\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2^n}{n+1}}-1}\right)\\
\Leftrightarrow &\frac{b^{\sum_{k=0}^{n}C_n^k}}{b^{\sum_{k=0}^{n}\frac{2^n}{n+1}}}\cdot\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha^{C_n^k}-1}{\alpha^{\frac{2^n}{n+1}}-1}\right) \geq \frac{d^{\sum_{k=0}^{n}C_n^k}}{d^{\sum_{k=0}^{n}\frac{2^n}{n+1}}}\cdot\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\beta^{C_n^k}-1}{\beta^{\frac{2^n}{n+1}}-1}\right)\\
\Leftrightarrow &\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha^{C_n^k}-1}{\alpha^{\frac{2^n}{n+1}}-1}\right) \geq \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\beta^{C_n^k}-1}{\beta^{\frac{2^n}{n+1}}-1}\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Vom considera funcţia $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$,

$$f(x)=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{x^{C_n^k}-1}{x^{\frac{2^n}{n+1}}-1}\right) \overset{not}{=} \prod_{k=0}^{n} g_k(x)$$

şi vom demonstra că este crescătoare, ceea ce va demonstra relaţia (2) şi implicit problema.

Funcţia f este derivabilă şi

$$f'(x) = \left(\prod_{k=0}^{n} g_k(x)\right)' = \prod_{k=0}^{n} g_k(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{g_k'(x)}{g_k(x)} = f(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{g_x'(x)}{g_k(x)} =$$

$$= f(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k \cdot x^{C_n^k - 1}\left(x^{\frac{2^n}{n+1}} - 1\right) - \frac{2^n}{n+1} \cdot x^{\frac{2^n}{n+1}-1}\left(x^{C_n^k} - 1\right)}{\left(x^{C_n^k} - 1\right)\left(x^{\frac{2^n}{n+1}} - 1\right)} =$$

$$= f(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{C_n^k \cdot x^{C_n^k - 1}}{x^{C_n^k} - 1} - \frac{\frac{2^n}{n+1} \cdot x^{\frac{2^n}{n+1}-1}}{x^{\frac{2^n}{n+1}-1}}\right) =$$

$$= f(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k + \frac{C_n^k}{x^{C_n^k} - 1} - \frac{2^n}{n+1} - \frac{\frac{2^n}{n+1}}{x^{\frac{2^n}{n+1}} - 1}\right) =$$

$$= f(x) \left[\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k - \frac{2^n}{n+1}\right) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{C_n^k}{x^{C_n^k} - 1} - \frac{\frac{2^n}{n+1}}{x^{\frac{2^n}{n+1}} - 1}\right)\right] =$$

$$= f(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{C_n^k}{x^{C_n^k} - 1} - \frac{\frac{2^n}{n+1}}{x^{\frac{2^n}{n+1}} - 1}\right) =$$

$$= f(x) \cdot 2^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\frac{C_n^k}{2^n}}{x^{C_n^k} - 1} - \frac{\frac{1}{n+1}}{x^{\frac{2^n}{n+1}} - 1}\right) =$$

$$= f(x) \cdot 2^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\frac{C_n^k}{2^n}}{\left(x^{2^n}\right)^{\frac{C_n^k}{2^n}} - 1} - \frac{\frac{1}{n+1}}{\left(x^{2^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1}\right) = f(x) \cdot 2^n \cdot \varphi(x).$$

Dacă notăm $x^{2^n} = u$ (cum $x > 1$ rezultă $u > 1$) şi $\dfrac{C_n^k}{2^n} = \lambda_k$, avem

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{u^{\lambda_k} - 1} - \frac{\frac{1}{n+1}}{u^{\frac{1}{n+1}} - 1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{u^{\lambda_k} - 1} - \frac{1}{u^{\frac{1}{n+1}} - 1}$$

şi evident $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$.

Considerând funcţia $\theta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\theta(t) = \dfrac{t}{u^t - 1}$, se demonstrează clasic faptul că θ este convexă. Atunci au loc relaţiile:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{u^{\lambda_k}-1} = \sum_{k=0}^{n} \theta(\lambda_k) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{\theta(\lambda_k)}{n+1} \geq (n+1)\cdot\theta\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k}{n+1}\right) =$$

$$= (n+1)\cdot\theta\left(\frac{1}{n+1}\right) = (n+1)\frac{\frac{1}{n+1}}{u^{\frac{1}{n+1}}-1} = \frac{1}{u^{\frac{1}{n+1}}-1}.$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{u^{\lambda_k}-1} - \frac{1}{u^{\frac{1}{n+1}}-1} \geq 0,$$

rezultând că $f'(x) \geq 0$, adică f este crescătoare.

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

O generalizare a inegalităţii lui Young

Dorin Mărghidanu

Abstract. The purpose of this note is to present a generalization for the discreet form of Young's inequality.

Scopul acestei note este prezentarea unei generalizări pentru forma discretă a inegalităţii lui Young, cu o demonstraţie foarte scurtă, via inegalitatea ponderată a lui Jensen.

Ca o consecinţă a inegalităţii generalizate a lui Young, deducem şi inegalitatea clasică a mediilor. Sunt de asemenea demonstrate două proprietăţi de echivalenţă pentru inegalităţi.

Este binecunoscută *inegalitatea lui Young*, [1] – [4], [12], [13]:

pentru numerele reale $a, b \geq 0$ *şi* $p, q > 1$*, astfel încât* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, are loc relaţia*

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q. \tag{Y}$$

Cu ajutorul ei se compară produsul a două numere cu o sumă specială a celor două numere (mai precis, cu o combinaţie convexă de puteri a celor două numere).

Prin aplicaţiile sale, *inegalitatea lui Young* se dovedeşte a fi poate cea mai importantă dintre inegalităţile clasice. Din ea derivă inegalitatea mediilor şi inegalitatea lui Hölder (iar din inegalitatea lui Hölder rezultă inegalitatea lui Minkowski).

Definiţia 1. Numerele reale $p, q > 1$, pentru care $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se mai numesc şi numere (*Hölder*) – *conjugate*.

Observaţia 1. Pentru numere (*Hölder*) – *conjugate* are loc următoarea echivalenţă: $(p > 0)$ şi $(q > 0) \Leftrightarrow (p > 1)$ şi $(q > 1)$, deoarece relaţia din definiţie se mai scrie echivalent, $q = \dfrac{p}{p-1}$, etc.

O extindere naturală a acestei definiţii se impune prin următoarea,

Definiţia 2. Numerele reale $p_1, p_2, \ldots, p_n > 1$ se numesc (*Hölder*)-*conjugate*, dacă şi numai dacă, prin definiţie, avem $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$.

O formulare firească şi generală a inegalităţii lui Young este surprinsă în următoarea

Propoziţia 1 (inegalitatea lui Young generalizată). *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *şi* $p_1, p_2, \ldots, p_n > 1$ *sunt numere reale Hölder - conjugate, atunci,*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \frac{1}{p_1}\, a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2}\, a_2^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\, a_a^{p_n}, \tag{Y_n}$$

cu egalitate când $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demonstraţie. Utilizăm *inegalitatea ponderată a lui Jensen* pentru funcţii concave.

Dacă $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie concavă, I - interval, atunci,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),\ w_k > 0,\ x_k, \sum_{k=1}^{n} w_k x_k \in I,\ \sum_{k=1}^{n} w_k = 1. \tag{J}$$

Folosind concavitatea funcţiei logaritmice cu baza supraunitară $b > 1$ şi inegalitatea (J), în aranjarea

$$\begin{aligned} \log{}_b a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n &= \frac{1}{p_1} \log{}_b a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2} \log{}_b a_2^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \log{}_b a_n^{p_n} \\ &\leq \log{}_b \left(\frac{1}{p_1}\, a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2}\, a_2^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\, a_n^{p_n} \right), \end{aligned}$$

cu monotonia funcţie $\log_b$, se obţine inegalitatea din enunţ. □

Corolarul 1. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$*, atunci*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \frac{1}{n}\,(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n). \tag{1}$$

Demonstraţie. Dacă în (Y_n) luăm $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = n$ (evident, *Hölder-conjugate*) se obţine inegalitatea din enunţ. □

Dacă în plus, în (1) luăm $a_i = \sqrt[n]{x_i}$, $i = \overline{1, n}$, deducem:

Corolarul 2 (inegalitatea clasică a mediilor).

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n), \tag{M}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

Numeroase alte demonstraţii ale inegalităţii mediilor se găsesc în lucrările: [1], [4]–[11] şi mai cu seamă în [2] şi [3].

Putem obţine ceva mai general,

Propoziţia 2 (*inegalitatea ponderată a mediilor*). *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ *şi* $0 < q_1, q_2, \ldots, q_n < 1$, *astfel încât* $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, *atunci*

$$x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{q_n} \leq q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n. \qquad (M_p)$$

Demonstraţie. înlocuind în *inegalitatea lui Young generalizată*:

$$a_1 := x_1^{q_1},\ a_2 := x_2^{q_2}, \ldots, a_n := x_n^{q_n} \text{ şi } \frac{1}{p_1} := q_1, \frac{1}{p_2} := q_2, \ldots, \frac{1}{p_n} := q_n$$
$$(\Leftrightarrow p_1 q_1 = 1, p_2 q_2 = 1, \ldots, p_n q_n = 1), \qquad (2)$$

obţinem:

$$\begin{aligned} x_1^{q_1} \cdot x_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{q_n} &\leq \frac{1}{p_1}(x_1^{q_1})^{p_1} + \frac{1}{p_2}(x_2^{q_2})^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}(x_n^{q_n})^{p_n} \\ &= q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n. \end{aligned}$$

În fapt, obţinem ceva mai mult:

Corolarul 3. *Inegalitatea generalizată a lui Young şi inegalitatea ponderată a mediilor sunt echivalente (în sensul că fiecare o implică pe cealaltă).*

Demonstraţie. Prin demonstraţia Propoziţiei 2 am demonstrat de fapt implicaţia

Inegalitatea generalizată a lui Young implică inegalitatea ponderată a mediilor.

Cu aceleaşi substituţii (2) se demonstrează foarte uşor şi implicaţia contrară.

Oricât ar părea de curios, pentru că în mod evident (Y) este un caz particular al relaţiei (Y_n), avem din punct de vedere logic

Propoziţia 3 (de echivalenţă a inegalităţilor lui Young: clasică şi generalizată). *Inegalităţile* (Y) *şi* (Y_n) *sunt echivalente.*

Demonstraţie. Rămâne de demonstrat că (Y_2) implică (Y_n). Vom proceda prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Presupunem că inegalitatea (Y_k) are loc pentru $k \leq n-1$ şi vom demonstra că are loc şi (Y_n).

Preliminar, să observăm că în ipoteza că $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt numere *Hölder – conjugate*, există $q \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{1}{q}$, (mai precis $\frac{1}{q} \in (0,1)$). Atunci, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p_n} = 1$, adică q şi p_n sunt şi ele numere *Hölder – conjugate*. De asemenea, dacă mai considerăm următoarele $n-1$ numere

$r_1 := \frac{p_1}{q}$, $r_2 := \frac{p_2}{q}, \dots, r_{n-1} := \frac{p_{n-1}}{q}$, atunci şi $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ sunt numere *Hölder – conjugate*, deoarece

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{n-1}} = q\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}}\right) = 1.$$

Cu aceste preparative, avem:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n &= (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1})a_n \overset{(Y_2)}{\leq} \frac{1}{q}(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1})^q + \frac{1}{p_n} a_n^{p_n} \\ &= \frac{1}{q}\left(a_1^q \cdot a_2^q \cdot \ldots \cdot a_{n-1}^q\right) + \frac{1}{p_n} a_n^{p_n} \\ &\overset{(Y_{n-1})}{\leq} \frac{1}{q}\left[\frac{1}{r_1}(a_1^q)^{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_{n-1}}(a_{n-1}^q)^{r_{n-1}}\right] + \frac{1}{p_n} a_n^{p_n} \\ &= \frac{1}{p_1} a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2} a_2^{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} a_{n-1}^{p_{n-1}} + \frac{1}{p_n} a_n^{p_n}, \end{aligned}$$

ceea ce încheie complet demonstraţia prin inducţie.

Observaţia 2. În acelaşi spirit de echivalenţă între cazul $n = 2$ şi cazul general, există, sau se pot da demonstraţii şi în cazul inegalităţii mediilor (M), mediilor ponderate (M_p), sau a inegalităţii lui Jensen (J).

În [10] se dau şi alte utilizări şi aplicaţii ale inegalităţii lui Young generalizate.

Bibliografie

[1] E. F. Beckenbach şi R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1961

[2] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović şi P. M. Vasić, *Means and their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston, 1988

[3] P. S. Bullen, *Handbook of Menas and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2003

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood şi G. Polya, *Inequalities*, 2end ed., Cambridge University Press, England, Cambridge (reprinted), 1988

[5] D. Mărghidanu şi M. Bencze, *New Proofs for AM-GM and Pondered AM-GM Inequalities*, Octogon Mathematical Magazine, **12**, No. 1, aprilie 2004, 233–235

[6] D. Mărghidanu, *Inegalitatea lui Lagrange este echivalentă cu inegalitatea mediilor*, Arhimede, No. 3–4, 2005, 17–19

[7] D. Mărghidanu şi M. Bencze, *New Means and Refinements for AM-GM-HM Inequalities*, Octogon Mathematical Magazine, **13**, No. 2, Octombrie 2005, 999–1001

[8] D. Mărghidanu şi M. Bencze, *A new Proof for AM-GM Inequality*, Octogon mathematical Magazine, **13**, No. 2, Octombrie 2005, 1021–1026

[9] D. Mărghidanu, *O demonstraţie a inegalităţii mediilor* (*pornind de la o problemă din Crux Mathematicorum*), Revista de Matematică din Timişoara, anul XI, Seria a IV-a, No. 1/2006, 6–7

[10] D. Mărghidanu, *Generalizări ale inegalităţilor lui Young, Hölder, Rogers şi Minkowski*, Gazeta Matematică, seria A, anul XXVI (CV), No. 3/2008

[11] D. Mărghidanu, D. S. Marinescu şi V. Cornea, *O inegalitate echivalentă cu inegalitatea mediilor*, Revista de Matematică din Timişoara, anul XIII, seria a IV-a, No. 3/2008, 3–6

[12] D. S. Mitrinović (în coop. cu P. M. Vasić), *Analytic Inequalities*, Band 165, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1970

[13] W. H. Young, *On classes of summable functions and their Fourier series*, Proc. Royal Soc. London, A 87, 1912, 225–229

Prof. dr., Colegiul Naţional "A. I. Cuza", Corabia

Argument 13

Teorema Cantor-Bernstein şi aplicaţii

Liviu Ornea

Abstract. This is a vulgarisation paper presenting an elementary proof of the celebrated Cantor-Bernstein's theorem, and several applications in set theory and geometry.

Rezultatul despre care va fi vorba mai jos este unul extrem de elementar (în sensul de nesofisticat, direct) şi exprimă proprietăţi fundamentale ale celor mai simple obiecte matematice. A fost formulat de Georg Cantor în primul său articol de teoria mulţimilor. Demonstraţia pe care o prezint nu este nici ea complicată, poate fi uşor înţeleasă la nivel de liceu – dar e foarte ingenioasă: devine simplă abia după ce i-ai văzut ideea. Rezultatul în sine poate părea arid. Sper, totuşi, ca măcar una dintre aplicaţii să stârnească interesul, dacă nu şi zâmbetul.

Acest articol nu are pretenţii de originalitate. Trebuie luat ca unul de popularizare. Vreau doar să semnalez un rezultat important şi frumos (după criteriile mele, desigur) şi o aplicaţie cel puţin neaşteptată, în speranţa deschiderii apetitului pentru viitoare lecturi.

1. Rezultatul principal

Aşa cum toată lumea ştie, dacă două numere reale verifică simultan inegalităţile $a \leq b$ şi $b \leq a$, atunci ele sînt egale: $a = b$. Încercând să extindă relaţia de ordine la mulţimi (ca să poată spună când e o mulţime *infinită* mai mare decât altă mulţime *infinită*), Cantor defineşte $A \leq B$ prin existenţa unei funcţii injective $f : A \to B$. Cu alte cuvinte, $A \leq B$ dacă A e în bijecţie cu o submulţime a lui B, anume $f(A)$. Definiţie absolut naturală! Dar a definit o relaţie de ordine, sau nu? Pentru a avea o relaţie de ordine, era nevoie ca din $A \leq B$ şi $B \leq A$ să rezulte - nu!, nu că $A = B$, ar fi fost să ceară prea mult, ci existenţa unei *bijecţii* între A şi B[1]. Lucrul nu e defel evident şi face obiectul teoremei care dă titlul articolului. Anume:

[1]De fapt, am trişat un pic. Relaţia de ordine nu e între mulţimi, ci între *cardinalele* lor. Cardinalul lui A e, prin definiţie, clasa de echivalenţă a tuturor mulţimilor în bijecţie cu A. Cu alte cuvinte, toate mulţimile în bijecţie cu A, deci la fel de bogate, de mari, sunt privite ca echivalente şi se alege una, arbitrar, care le reprezintă pe toate; acesta e cardinalul, notat $|A|$.

Teorema 1.1. *Fie A şi B două mulţimi arbitrare. Dacă există injecţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to A$, atunci există o bijecţie între A şi B.*

Se pare că rezultatul ar fi fost demonstrat iniţial, dar nepublicat, de Dedekind; enunţat în 1895 de Cantor; demonstrat greşit de Schröder în 1896; demonstrat în 1897 de Bernstein, student al lui Cantor; redemonstrat de Dedekind în 1897; pentru ca, în fine, demonstraţia lui Bernstein să fie publicată de Borel în cartea sa din 1898 (vezi [6], [3]). Alte demonstraţii au fost produse de Peano, König, Zermelo.

Voi demonstra, de fapt, o formă ceva mai tare a teoremei, datorată, conform [3], lui Banach şi care va fi utilă în aplicaţii.

Teorema 1.2. *Fie A şi B două mulţimi arbitrare şi $f : A \to B$, $g : B \to A$ funcţii injective. Atunci există partiţiile $A = A_1 \cup A_2$ şi $B = B_1 \cup B_2$ astfel încît $f(A_1) = B_1$ şi $g(B_2) = A_2$.*

Cum f şi g sunt bijecţii pe imagini, e clar că, dacă punem

$$h = \begin{cases} f & \text{pe} \quad A_1 \\ g^{-1} & \text{pe} \quad A_2 \end{cases}$$

obţinem funcţia bijectivă de la A la B prescrisă de enunţul iniţial.

Demonstraţia pe care o prezint se găseşte în [1] (vezi şi [4]). Putem presupune de la început că A şi B sunt disjuncte (dacă nu sunt, le vopsim, adică le înlocuim, de exemplu, cu $A \times \{0\}$ şi $B \times \{1\}$). Acum privim reuniunea $A \cup B$ şi spunem că $x \in A \cup B$ e *părintele* lui $y \in A \cup B$ dacă $x \in A$ şi $f(x) = y$, sau dacă $x \in B$ şi $g(x) = y$. Verificaţi că fiecare punct din $A \cup B$ are cel mult un părinte (veţi folosi faptul că A şi B sunt disjuncte etc.) Să observăm că, dacă $y \in B \setminus f(A)$ sau $y \in A \setminus g(B)$, el nu are părinte – e orfan.

Plecînd cu un y fixat, putem să-i formăm lanţul strămoşilor. Anume, dacă x e părintele lui, considerăm eventualul părinte al lui x şi continuăm pînă când nimerim peste un orfan. Astfel, lanţul strămoşilor poate fi vid (dacă y însuşi era orfan), finit, sau infinit.

Fie acum A_{2k}, respectiv A_{2k+1}, respectiv A_∞ mulţimea punctelor din A care au un număr par de strămoşi, respectiv un număr impar, respectiv o infinitate de strămoşi. Evident, cele trei mulţimi sunt disjuncte şi epuizează A, deci formează o partiţie a lui A. Similar se partiţionează B.

E uşor de verificat acum (dar verificaţi, n-o luaţi de bună, încercaţi să faceţi şi o diagramă!) că:

- $f(A_\infty) = B_\infty$ şi $f(A_{2k}) = B_{2k+1}$;
- $g(B_\infty) = A_\infty$ şi $g(B_{2k}) = A_{2k+1}$.

Acum suntem gata. Punem $A_1 = A_{2k} \cup A_\infty$, $A_2 = A_{2k+1}$ şi $B_1 = B_{2k+1} \cup B_\infty$, $B_2 = B_{2k}$ şi avem partiţiile dorite. $\square$

Observaţia 1.3. (i) Demonstraţia aceasta nu foloseşte *axioma alegerii* (Cantor însuşi o văzuse ca o consecinţă a acestei axiome). Este un fapt a cărui importanţă va deveni limpede pe măsură ce veţi avansa în studiul matematicii. Totuşi, e un exemplu tipic de demonstraţie de existenţă: arătăm că ceva există, dar nu avem un algoritm pentru a face construcţia efectivă.

(ii) Există şi alte demonstraţii (chiar faptul că un enunţ atât de simplu, în aparenţă, a captat atenţia într-atât încât să primească mai multe demonstraţii constituie un indiciu indirect asupra importanţei sale). De exemplu, o demonstraţie destul de intuitivă foloseşte grafuri infinite bipartite (o găsiţi în orice carte serioasă de grafuri), o alta foloseşte latice şi o teoremă de punct fix a lui Tarski etc.

Exerciţiul 1.4. Arătaţi că dacă între două mulţimi nevide există o funcţie injectivă şi una surjectivă, atunci există şi una bijectivă.

Indicaţie: Fie A, B mulţimile, f injectivă, f' surjectivă. Pentru orice $b \in B$ există $a_b \in A$ cu $f'(a_b) = b$. Alegem câte un asemenea a_b (aici se foloseşte axioma alegerii) şi definim $g(b) = a_b$. Acum arătaţi că g e injectivă.

2. Aplicaţii

Exemplul 2.1. Să arătăm că există o bijecţie între $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$. Construim $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n$. E, evident, injectivă. Construim $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ prin

$$g(z) = \begin{cases} 2z & \text{dacă} \quad z \geq 0 \\ -2z+1 & \text{dacă} \quad z < 0. \end{cases}$$

Cum şi g e injectivă, suntem gata.

Exerciţiul 2.2. Folosiţi rezultatul anterior ca să arătaţi că $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sunt în bijecţie.

Exerciţiul 2.3. Arătaţi că

$$f(x) = \begin{cases} 2^a \cdot 3^b & \text{dacă} \quad x = \frac{a}{b} > 0 \quad \text{şi} \quad a, b \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{dacă} \quad x = 1 \\ 2^a \cdot 3^b \cdot 7 & \text{dacă} \quad x = -\frac{a}{b} \quad \text{şi} \quad a, b \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

e o injecţie de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{N}$ şi deduceţi că există o bijecţie între $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Q}$ (adică mulţimea $\mathbb{Q}$ e numărabilă). Acest lucru poate fi arătat şi prin procedeul diagonal al lui Cantor, dar e instructiv să vedem şi cum decurge din Cantor-Bernstein.

Exemplul 2.4. Mai elaborat. Fie $A = [0,1]$ şi $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (mulţimea submulţimilor mulţimii numerelor naturale). Vi se pare evident că A şi B sînt la fel de bogate? Iată că sunt.

Definim $f : A \to B$ prin $f(0) = \emptyset$, $f(1) = B$ şi, dacă $x \in (0,1)$ are descompunerea binară $0, a_1 a_2 \ldots a_n$ (aici, dacă $x = 0,0111\ldots$, considerăm $x = 0,1$), punem $f(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}$.

Reciproc, definim $g : B \to A$ prin $g(\emptyset) = 0$ şi, pentru un $C \subseteq \mathbb{N}$ nevid, punem $g(C) = 0, a_1 \ldots a_n$ (scriere zecimală de data asta) unde $a_i = 1$ sau 0 după cum $i \in C$ sau $i \notin C$.

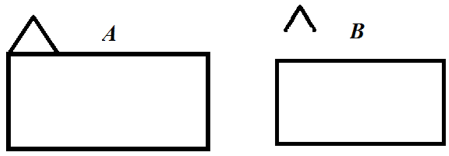
Vă rămâne să arătaţi că f şi g sunt injective...

Cum $[0,1]$ e în bijecţie cu $\mathbb{R}$ (prin tangentă, de exemplu), rezultă că $\mathbb{R}$ e în bijecţie cu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ şi deci (demonstraţi!) $\mathbb{R}$ e nenumărabilă.

Exemplul 2.5. (După [4].) Reamintesc că o *omotetie* a planului e o transformare definită de un punct fix O (centrul) şi de un scalar pozitiv[2] $k > 0$ (raportul), astfel că fiecare punct M e dus într-un M' cu proprietatea $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. E uşor de văzut că omotetiile sunt funcţii bijective. Omotetiile cu raport supraunitar dilată lungimile, cele cu raport subunitar le contractă. De exemplu, orice două cercuri concentrice sunt omotetice, orice două cercuri exterioare de raze neegale sunt omotetice (centrul în punctul de intersecţie al tangentelor exterioare), la fel orice două pătrate exterioare cu laturi paralele şi neegale, o paralelă la o latură a unui triunghi produce două triunghiuri omotetice (cu centrul în vî rful opus) etc. Dar, evident, orice figură plană, oricât de neregulată poate fi transformată printr-o omotetie. Pentru o introducere elementară, vedeţi, de exemplu, [5].

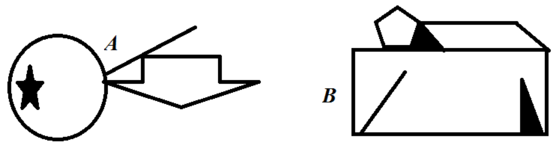
Voi numi două mulţimi A, B *2-omotetice* dacă ele se pot partiţiona $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$ în aşa fel încât A_i e omotetic cu B_i, $i = 1, 2$ (prin omotetii, în general, diferite).

Un exemplu banal (trebuie avut grijă ca, pentru mulţimea A, baza triunghiului să nu fie considerată, în caz contrar nemaifiind vorba despre o partiţie):

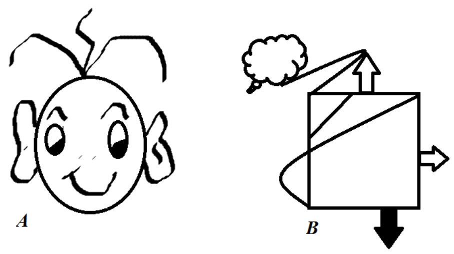


[2]De fapt, se poate lucra şi cu rapoarte negative, caz în care omotetia schimbă orientarea. Dar prefer să lucrez în cazul acesta, mai restrictiv.

Şi unul mai puţin banal în care nu am mai pus în evidenţă partiţiile (pentru că nu le cunosc!):



În fine, un exemplu deloc evident:



Ce au în comun ultimele două exemple? De unde am ştiut că mulţimile acelea ciudate sînt 2-omotetice? Răspunsul vine în propoziţia care urmează, a cărei demonstraţie se bazează pe teorema Cantor-Bernstein:

Propoziţia 2.6. *Două submulţimi ale planului sînt 2-omotetice dacă ambele sînt*:
(i) *mărginite* (*adică fiecare poate fi inclusă în interiorul unui cerc*) *şi*
(ii) *fiecare conţine cel puţin un disc plin* (*oricît de mic*).

Demonstraţie. Fie A, B submulţimile considerate şi fie C un disc plin conţinut în A. Cum B e mărginită, mărind suficient raza lui C ajungem la un cerc D care conţine B în interior. Evident, D e omotetic cu C, printr-o omotetie de raport supraunitar şi inversa acestei omotetii e o omotetie de raport subunitar (o contracţie) care va aplica injectiv (pentru că omotetiile sunt bijective) B în A (de fapt, chiar în cercul C). Am construit deci o injecţie de la B în A. La fel, plecând cu un disc plin din B, construim o injecţie de la A în B. Acum mai avem doar de aplicat teorema Cantor-Bernstein în forma mai tare demonstrată mai sus. $\square$

Observaţia 2.7. Enunţul nu precizează că fiecare submulţime conţine un singur disc plin. Pot fi mai multe. Aplicaţiile injective pe care le construim depind de alegerea discului plin şi de alegerea raportului supraunitar al omotetiei iniţiale. E clar că soluţia nu e constructivă: ştim că cele două submulţimi sunt 2-omotetice, dar nu putem identifica partiţiile.

E de notat şi că cele două submulţimi pot fi neconexe, pot avea orice formă: enunţul e extrem de general. În plus, primul exemplu arată că a doua condiţie din enunţ nu este necesară).

Încă ceva. O omotetie duce drepte în drepte, cercuri în cercuri şi, în general, nu schimbă forma figurilor. Cum în exemplul al treilea A nu conţine nici un segment, înţelegem că partiţia lui B nu poate să conţină segmente. Trebuie că arată foarte ciudat aceste partiţii, înglobând puncte din părţi foarte distanţate ale submulţimilor, puncte necontigue (de fapt, A_i şi B_i pot fi chiar nemăsurabile).

Pe de altă parte, noţiunea şi problema se înscriu într-o clasă foarte largă de probleme de decompozabilitate, dintre care cea mai faimoasă rămîne *paradoxul Banach–Tarski*, [2].

Bibliografie

[1] G. Birkhoff, S. MacLane, *A survey of Modern Algebra*, Macmillan, NY, 1977

[2] K. Stromberg, *The Banch–Tarski paradox*, Amer. Math. Monthly, **86** (1979), 151–161

[3] A. Fraenkel, Abstract Set Theory, Amer. Elsevier Pub., 1976

[4] V. Klee, J. R. Reay, *A surprising but easily proved Geometric Decomposition Theorem*, Mathematics Magazine, **71** (1998), 3–11

[5] N. N. Mihăileanu, *Complemente de geometrie sintetică. Geometria plană*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor-Bernstein-Schroeder theorem

Prof. univ. dr., Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică,
str. Academiei 14, Bucureşti
E-mail: lornea@ gta.math.unibuc.ro

Argument 13

Aritmetică la casierie

Vasile Pop

Abstract. This article is meant to pled for the beauty and the elegance of arithmetic reasoning.

Suntem tentaţi să credem că Aritmetica, prima ştiinţă matematică pe care o studiem în şcoală, este o materie de grădiniţă care ne învaţă doar operaţiile elementare (tabla înmulţirii). Dacă la orice vârstă şi de pe orice poziţie profesională reluăm câteva probleme de matematică (eventual pentru copiii noştri) ne dăm seama cât de mult ne-am înşelat şi că de fapt, alături de geometrie, aritmetica contribuie determinant la dezvoltarea capacităţilor intelectuale de la cea mai fragedă vârstă.

În argumentarea pledoariei mele pentru aritmetică am ales două probleme "din folclor" (care s-ar putea să tenteze şi pentru că este vorba de bani).

16. *O casieră are 1000 de lei şi 10 plicuri. Cum distribuie ea banii în plicuri astfel ca, dacă un angajat vine şi cere o sumă (întreagă) de la 1 la 1000 lei, casiera să îi poată plăti suma fără să mai scoată banii din plicuri.*

17. *O casieră are doar bancnote de 3 şi 10 dinari. Să se arate că ea poate da sume oricât de mari. Care este cea mai mare sumă pe care ea nu o poate da?*

Analiza şi soluţia problemei 1

Dacă în plicurile $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ punem sumele $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ şi deci pentru completarea sumei cerute S sunt necesare plicurile $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ ($S = S_{i_1} + S_{i_2} + \cdots + S_{i_k}$), atunci fiecare plic folosit este luat (o dată) şi fiecare plic nefolosit este luat de zero ori, deci ele se diferenţiază prin "valoarea de folosire" 1 sau 0. Acest raţionament ne conduce la a gândi sumele în baza 2 în care avem doar simbolurile 0 şi 1. Observăm că $2^{10} = 1024 > 1000$, deci orice număr de la 1 la 1023 poate fi scris în baza 10 cu cel mult 10 cifre. Repartiţia normală a 1023 lei în 10 plicuri ar fi: $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 4$, $S_4 = 8$, $S_5 = 16$, $S_6 = 32$, $S_7 = 64$, $S_8 = 128$, $S_9 = 256$, $S_{10} = 512$, dar noi nu avem decât 1000 lei şi atunci o să păstrăm repartiţia în primele 9 plicuri iar în ultimul plic punem suma rămasă $512 - 23 = 489$ lei$= \overline{S}_{10}$.

Dacă angajatul are de luat o sumă $S \leq 511$ ne folosim de primele 9 plicuri: scriem suma în baza 2 şi îi dăm plicurile corespunzătoare poziţiilor pe care apare 1.

Exemplul 1. $S = 365 = \overline{101101101_2} = S_1 + S_3 + S_4 + S_6 + S_7 + S_9$, deci dăm plicurile P_1, P_3, P_4, P_6, P_7 şi P_9.

Dacă angajatul are de primit o sumă $S \geq 512$, atunci casiera îi dă plicul P_{10} cu 489 lei şi din celelalte 9 plicuri are de dat o sumă $S' = S - 489 \leq 511$, pe care o putem completa ca în primul caz.

Exemplul 2. $S = 854$, $S = 489 + S'$, cu $S' = 365$ şi atunci ţinând cont de exemplul 1, avem $S = S_1 + S_3 + S_4 + S_5 + S_7 + S_9 + \overline{S}_{10}$.

Observaţie. Pentru a da orice sumă ≤ 2000 lei, avem nevoie de 11 plicuri, iar pentru o sumă de ≤ 4000 lei avem nevoie de 12 plicuri. $\square$

Analiza şi soluţia problemei 2

Sumele pe care le poate plăti casiera doar din bancnote de 3 şi 10 dinari sunt de forma $S = 3x + 10y$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, pentru care se dau x bancnote de 3 şi y bancnote de 10.

Observăm că cel mai mic număr pozitiv de această formă este $S_1 = 3$, $3 = 3 \cdot 1 + 10 \cdot 0$. Şi acum o observaţie esenţială este că, dacă putem să acordăm o sumă S, atunci putem acorda şi suma $S + 3$ (adăugând încă o bancnotă de 3). Din acest raţionament rezultă că, dacă găsim trei sume consecutive care pot fi date, atunci toate sumele mai mari pot fi date (adăgând la fiecare din cele trei consecutive un număr de bancnote de 3). Astfel dacă interpretăm acum enunţul, problema cere să găsim un număr (maxim) N care nu poate fi scris sub forma $3x + 10y$, $x, y \in \mathbb{N}$, iar numerele $N + 1$, $N + 2$ şi $N + 3$ se pot scrie sub această formă.

Prin câteva încercări găsim $18 = 3 \cdot 6 + 10 \cdot 0$, $19 = 3 \cdot 3 + 10 \cdot 0$, $20 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 10$. Arătăm că nu există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel ca $17 = 3x + 10y$. evident că $y \in \{0, 1\}$.

Dacă $y = 0$, $3x = 17$ nu are soluţie în $\mathbb{N}$.

Dacă $y = 1$, $3x = 7$ nu are soluţie în $\mathbb{N}$.

Astfel că $N = 17$ este numărul căutat.

Observaţie. O consecinţă a algoritmului lui Euclid de determinare a celui mai mare divizor comun a două numere naturale a, b este că, dacă $(a, b) = d$, atunci există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel ca $d = a \cdot x + b \cdot y$. În plus, mulţimea $\mathbb{Z}_{a,b} = \{ax + by \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\} = \{d \cdot k \,|\, k \in \mathbb{Z}\} = d \cdot \mathbb{Z}$, iar cel mai mic număr pozitiv care poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară întreagă de a şi b este d. În cazul în care a şi b sunt relativ prime, atunci orice număr natural n poate fi scris ca o combinaţie întreagă de a şi b: $a \cdot x + b \cdot y$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

O problemă derivată din aceste rezultate este: *care sunt numerele naturale n care pot fi reprezentate ca o combinaţie liniară cu coeficienţi naturali ai numerelor a şi b (relativ prime)*.

Mai precis, dacă $(a, b) = 1$, atunci $\mathbb{Z}_{a,b} = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ şi se cere $\mathbb{N}_{a,b} = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}\}$. În cazul nostru am arătat că $n \in \mathbb{N}_{3,10}$ pentru orice $n \geq 18$. Se poate vedea că din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 17\}$ doar 9 numere nu pot fi scrise sub forma $3x + 10y$, $x, y \in \mathbb{N}$. $\square$

În final propun elevilor foarte buni de la Colegiul "Gh. Şincai" din Baia Mare două probleme legate de cele prezentate, probleme ale căror soluţii le veţi putea găsi în numărul următor al revistei "Argument".

18. *La curtea regelui Merlin urma să se desfăşoare un mare ospăţ, pentru care se cumpără din regatul vecin 1000 sticle de vin. Regele află că una din sticle a fost înlocuită cu o sticlă ce conţinea o otravă extrem de puternică (o singură picătură este mortală). Pentru că nu mai este timp pentru procurarea altui vin, trebuie găsită sticla cu otravă. Sfetnicul regelui îl sfătuieşte să testeze vinul din sticle pe cei 10 hoţi care erau condamnaţi la moarte, dându-le fiecăruia câte un pahar de vin (amestecat din unele sticle). Cum se poate găsi sticla cu otravă dacă până la ospăţ mai sunt trei ore şi otrava îşi face efectul în trei ore?*

19. *Fie a, b numere naturale relativ prime. Să se arate că cel mai mare număr natural care nu poate fi scris sub forma $a \cdot x + b \cdot y$ cu $x, y \in \mathbb{N}$ este $N = ab - a - b$.*

Bibliografie

[1] Vasile Pop, *Metoda etichetării binare în probleme de combinatorică*, G. M. Nr. 3, 2009

[2] Adler Coury, *The theory of numbers*, Jones and Barllet Publishers, London, 1995

Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
Str. C. Daicoviciu 15
400020, Cluj-Napoca, Romania
E-mail: vasile.pop@math.utcluj.ro

Tabăra de matematică, Baia Mare, 29.01.2011 - 02.02.2011

Gheorghe Maiorescu şi Nicolae Muşuroia

La a XIII-a ediţie a taberei judeţene de matematică - secţiunea liceu, organizată în acest an la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", au participat 125 de elevi.

Cursurile au fost susţinute de următorii profesori:
Bojor Florin, Boroica Gheorghe, Fărcaş Natalia, Heuberger Cristian, Heuberger Dana, Muşuroia Nicolae, Petruţiu Crina – Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", *Boroica Gabriela, Covaciu Traian, Darolţi Erika, Sfara Gheorghe, Zlampareţ Horia* – Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", *Friedrich Gabriela, Horge Daniel, Temian Gavril* – Colegiul Economic "Nicolae Titulescu", *Longaver Ludovic* – Liceul Teoretic "Nemeth Laszlo", *Maiorescu Gheorghe, Podină Camelia* – Liceul Teoretic "Emil Racoviţă", *Râmbu Gheorghe, Vlad Vasile* – matematicieni, *Pop Adrian* – Colegiul Tehnic "Transilvania".

Prezentăm în continuare subiectele testului final şi lista premianţilor taberei de la liceu.

Clasa a IX-a

1. Pentru $a \in \mathbb{R}$, se consideră ecuaţia
$$[x^2] + a[x] + a^2 - 1 = 0,$$
unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$.
$a)$ Să se rezolve ecuaţia dacă $a = 0$.
$b)$ Să se rezolve ecuaţia pentru $a \in \mathbb{R}$ oarecare.

(*Dana Heuberger*)

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot f(1 - \{x\})$$
şi
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$
$a)$ Să se calculeze $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$;

b) Să se arate că $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = x$;
c) Să se determine funcţia f.

(*Gheorghe Gherasin*, Argument 12/2010)

3. Se consideră triunghiul ABC şi D, E, F punctele de intersecţie ale cercului înscris în triunghi cu laturile BC, AC, AB. Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Să se arate că:
a) $AF = p - a$;
b) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$ triunghiul ABC este echilateral.

(*Dana Heuberger*)

Test selectat de: prof. Dana Heuberger

Clasa a X-a

1. Se consideră numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 care verifică relaţiile

$$|z_1| = |z_2| = z_3| = 1 \quad \text{şi} \quad z_1 + z_2 + z_3 = 1.$$

a) Să se demonstreze că $\overline{z_i} = \dfrac{1}{z_i}$, $i = \overline{1,3}$;
b) Dacă $a = z_1 z_2 z_3$, calculaţi modulul numărului a;
c) Demonstraţi că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.

2. Se consideră mulţimea de funcţii

$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a) Demonstraţi că funcţia $g \in F$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 10x^2$;
b) Dacă funcţia $h \in F$, demonstraţi că $h(0) = 0$;
c)Demonstraţi că orice funcţie din F nu este injectivă.

3. Fie $a, b, c \in (0, 1)$. Demonstraţi că

$$\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3.$$

Test selectat de: prof. Florin Bojor
prof. Nicolae Muşuroia

Clasa a XI-a

1. În mulţimea $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că, dacă $Y \in M_3(\mathbb{C})$ şi $Y \cdot A = A \cdot Y$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$;

b) Să se determine numărul de soluţii $X \in M_3(\mathbb{C})$ ale ecuaţiei $X^n = A$, unde n este un număr natural nenul.

2. *a*) Să se arate că, dacă n este un număr natural, atunci $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ este un număr natural par;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n \pi\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}$.

(*N. Muşuroia*, Argument 2006)

c) Să se arate că există cel puţin 2011 şiruri de forma $(x_n + y_n \cdot \sqrt{3})_{n\geq 1}$, cu x_n, y_n numere naturale nenule, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\left(x_n + y_n \cdot \sqrt{3}\right)\pi\right)}{x_n - y_n \cdot \sqrt{3}} = -\pi.$$

3. Fie $A \subset [0, \infty)$ sau $A \subset (-\infty, 0]$ o mulţime şi $a > 0$ un număr real. Să se determine funcţiile $f : A \to A$ cu proprietatea:

$$f(f(x)) + af(x) = (a+1)x, \quad \forall\, x \in A.$$

Test selectat de: prof. Gheorghe Boroica

Clasa a XII-a

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} (m+1)\cdot x + y + z = 1 \\ 2x + (m+2)\cdot y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + (m+3)\cdot z = 3 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile lui m, astfel încât sistemul să fie de tip Cramer şi pentru aceste valori să se rezolve sistemul;

b) Să se determine m pentru care sistemul este incompatibil;

c) Pentru $m = 0$, să se afle soluţiile sistemului pentru care expresia $x^2 + y^2 + z$ este minimă.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} - x$.

a) Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu prima bisectoare;

b) Să se arate că valoarea minimă a funcţiei f este $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$;

c) Demonstraţi că $f(x) \geq a \cdot x + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 1$.

3. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{I_2, A\}$.

a) Să se afle cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = x^n \cdot I_2$;

b) Să se determine $x \in \mathbb{C}$ astfel încât $(G, \cdot)$ să fie grup;

c) Pentru n determinat la *a*), să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + \det(A)}\, dx$.

Test selectat de: prof. Cristian Heuberger

Premianţii

Clasa a IX-a

Excelenţă. *Bretan Alice* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul I. *Ofrim Adriana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vişovan Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lupănescu Andreea* (C. N. "Gheorghe Şincai").

Premiul al II-lea. *Sava Bianca* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Trif Dan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Cosma Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al III-lea. *Rînja Daiana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Andreicuţ Mara* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Iuga Ancuţa* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Hadobas Kinga* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Blaga Elisa* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lup Iulia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Petruţ Alexandra* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Botoi Anca* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Costin Roxana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Nedelea Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Rus Călin* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Conea Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Flavia* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Cozma Carlo* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Iustin Kevin* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Clasa a X-a

Excelenţă. *Petca Alexandra* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Premiul I. *Suciu Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Premiul al II-lea. *Pop Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Paşca Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tărţan Diana* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Achim Adrian* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Boczor Carla* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Dragomir Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Dragoş Hanna* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Conţi Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al III-lea. *Panici Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Sergiu* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vago Timeea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Feier Florin* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Petruş Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pinte Dan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Mihale Tudor* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Topan Teodora* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Belu Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *David Carla* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Clasa a XI-a

Excelenţă. *Petrovan Marius* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul I. *Todoran Denisa* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Rusznak Erik* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al II-lea. *Iepan Cristian* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Kando Enikö* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Lupan Andreea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al III-lea. *Mihalca Daniel* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Chiş Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Pop Paul* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Balko Andreea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Fînăţan Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Vancea Paula* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Iriciuc Iosif* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ghişa Diana* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Clasa a XII-a

Excelenţă. *Horvat Mihaela* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul I. *Chihaia Cosmin* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Găină Alexandru* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al II-lea. *Radu Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Puşcaş Karla* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Albu Victor* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Nacu Ioana* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Paşca Ovidia* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Premiul al III-lea. *Marian Mircea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Bodi Andreea* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ştefan Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Soporan Andra* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Tămaş Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Ionuţaş Bogdan* (C. N. "Gheorghe Şincai"), *Orţan Călin* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Clasa a XII-a M2

Premiul I. *Vagrin Beatrix* (C. E. "Nicolae Titulescu")

Premiul al II-lea. *Bojte Tamas* (L. T. "Emil Racoviţă"), *Vaida Adriana* (C. E. "Nicolae Titulescu")

Premiul al III-lea. *Denuţ Răzvan* (C. E. "Nicolae Titulescu"), *Zan Andrada* (C. E. "Nicolae Titulescu")

Profesor, Liceul Teoretic "Emil Racoviţă", Baia Mare
Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", Baia Mare

Şcoala de vară - Tabăra Judeţeană de Excelenţă

Gheorghe Boroica

În perioada 3 – 10 septembrie 2010, s-a desfăşurat la Ocna Şugatag Şcoala de vară – Tabăra Judeţeană de Excelenţă. Organizatorii acestei acţiuni au fost Inspectoratul Şcolar al Judeţului Maramureş şi Centrul Judeţean pentru Tineri Capabili de Performanţă, Maramureş, în parteneriat cu Consiliul Local al municipiului Baia Mare, Federaţia Sindicatelor Libere din Învăţământ şi Filiala Maramureş a S.S.M.R.

La activităţile din tabără au participat elevii olimpici din Maramureş la disciplinele matematică, fizică, chimie, astronomie şi astrofizică.

Cursurile la disciplina matematică au fost susţinute de către următorii profesori:

Bojor Florin, Boroica Gheorghe, Fărcaş Natalia, Heuberger Cristian, Heuberger Dana, Muşuroia Nicolae – Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai", *Boroica Gabriela, Sfara Gheorghe* – Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", *Bedeoan Loredana, Giurgi Vasile, Tivadar Cornel, Tomoiagă Ioan* – Colegiul Naţional "Dragoş Vodă", *Bretan Andrei* – Şcoala "Nicolae Iorga", *Mihali Marinela* – Grupul Şcolar Borşa, *Trif Margareta* – Colegiul Economic "Nicolae Titulescu", *Ienuţaş Vasile* – Şcoala "George Coşbuc", *Neaga Nadina* – Şcoala "Dr. Victor Babeş", *Zetea Bogdan* – Şcoala "George Coşbuc".

Directorul taberei a fost profesorul *Gheorghe Boroica* de la Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai".

Prezentăm în continuare subiectele testului final la matematică şi lista premianţilor la această disciplină.

Clasa a VI-a

1. Suma a două numere naturale nenule a şi b este de p ori mai mare decât diferenţa lor, $p \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. Ştiind că $\dfrac{a}{b}$ este număr natural, determinaţi numărul p.

2. Demonstraţi că dacă $17/(a+b+c)$ şi $17/(5a+8b+3c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$, atunci:

i) $17/(2a+5b)$ şi $17/(3a+5c)$;

ii) fracţia $\dfrac{21a+15b+25c}{19a+25b+15c}$ este reductibilă.

3. Să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6} + \dots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2007\cdot 2008\cdot 2010}$$

Test selectat de: prof. Mihali Marinela

Clasele a VII-a şi a VIII-a

1. Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine numărul perechilor (A, B) care satisfac simultan condiţiile:

$$\begin{cases} A \cup B = M; \\ card\,(A \cap B) \leq 1. \end{cases}$$

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\left[\frac{3x-7}{4}\right] + \left[\frac{3x-5}{4}\right] = \frac{5x+3}{7}.$$

3. În triunghiul ABC se consideră înălţimea CM, $M \in [AB]$, iar N este simetricul punctului M faţă de BC. Paralela prin N la CM intersectează BC în P şi AC în Q. Să se demonstreze că $MQ \perp AP$ dacă şi numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

Test selectat de: prof. Boroica Gabriela

Clasele a IX-a şi a X-a

1. Să se determine termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a \in \mathbb{R}$ şi $x_{n+1} = x_n^2 + 4x_n + 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine numărul perechilor (A, B) care satisfac simultan condiţiile:

$$\begin{cases} A \cup B = M; \\ card\,(A \cap B) \leq 2. \end{cases}$$

3. Se consideră B un punct interior segmentului (AC). De aceeaşi parte a dreptei AC se construiesc pătratele $ABMN$ şi $BCEF$. Să se arate că:
a) $AF = MC$; *b)* $AM \perp FC$.

Test selectat de: prof. Boroica Gabriela

Clasa a XI-a

1. Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $Tr(X) \neq -6$, ştiind că $X^2 + 6X + 5I_2 = O_2$.

2. Să se afle termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ şi $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = -1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{k+1} = O_k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\det\left(I_k + \frac{1}{1!}\,A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \frac{1}{3!}\,A^3 + \frac{1}{4!}\,A^4\right) = 1.$$

Test selectat de: prof. Boroica Gheorghe

Clasa a XII-a

1. *a*) Se consideră grupul $(G, *)$. Să se arate că mulţimea

$$Z(G) = \{x \in G | x * y = y * x,\ \forall\, y \in G\}$$

este subgrup al grupului G.

b) Fie a, b, c trei numere întregi distincte şi polinomul

$$f = (X + a)(X + b)(X + c) + 1.$$

Să se arate că f este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

2. Să se calculeze integralele:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{3\sin x + 10\cos x}\,dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^n + 2010)}\,dx$, unde $x \in (0, \infty)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Să se arate că nu există nici o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să admită o primitivă F astfel încât $f(F(x)) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Test selectat de: prof. Boroica Gheorghe

Premianţii

Clasa a VI-a

Premiul I. *Zelina Mihai* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Premiul al II-lea. *Demeter Daniela* (Sighetu Marmaţiei), *Ilieş Andreea* (Sighetu Marmaţiei)

Premiul al III-lea. *Rednic Paul* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Clasa a VIII-a

Premiul I. *Miclea Andrei* (Şcoala "Nicolae Iorga"), *Mihali Claudiu* (Grupul Şcolar Borşa)

Premiul al II-lea. *Bud Cristian* (Şcoala "Nicolae Iorga"), *Cotan Paul* (Şcoala "Nicolae Iorga")

Premiul al III-lea. *Stretea Roland* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Petruş Andrei* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Clasa a IX-a

Premiul I. *Bretan Paula Alice* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al II-lea. *Ţiplea Tudor* (C. N. "Dragoş Vodă")

Premiul al III-lea. *Cantoni Nicholas* (C. N. "Dragoş Vodă"), *Puicar Bogdan* (C. N. "Dragoş Vodă"), *Hotea Ciprian* (C. N. "Dragoş Vodă"), *Ofrim Adriana* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Clasa a X-a

Premiul I. *Petca Alexandra* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Premiul al II-lea. *Feier Florin* (C. N. "Vasile Lucaciu")

Clasa a XI-a

Premiul I. *Todoran Denisa* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al II-lea. *Petrovan Marius* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Clasa a XII-a

Premiul I. *Crişan Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu"), *Horvat Mihaela* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Premiul al II-lea. *Radu Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai")

Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Şincai"

Concursul "Argument" al Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" Ediţia a II-a

În 6 noiembrie 2010 s-a desfăşurat la Baia Mare cea de-a doua ediţie a Concursului interjudeţean de matematică "Argument". Organizatorii acestuia au fost membrii catedrei de matematică a Colegiului Naţional "Gheorghe Şincai" din localitate (director, profesor Ioan Mureşan), în parteneriat cu Inspectoratul Şcolar Judeţean Maramureş (inspector de matematică Gheorghe Maiorescu). Cu această ocazie a fost lansat cel de-al doisprezecelea număr al revistei "Argument", editat de Catedra de matematică a liceului gazdă. Preşedintele concursului a fost şi de acestă dată domnul profesor universitar doctor Vasile Pop, de la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. La concurs au participat cei mai buni elevi de clasa a V-a de la şcolile din oraş şi cei din loturile pentru olimpiadă ale elevilor de liceu de la colegiile naţionale "Andrei Mureşanu" Dej, "Mihai Eminescu" Satu Mare, "Dragoş-Vodă" Sighetu Marmaţiei, "Vasile Lucaciu" Baia Mare şi "Gheorghe Şincai" Baia Mare.
Prezentăm în continuare enunţurile problemelor şi lista premianţilor.

Clasa a V-a

1. Numărul $25 - 3 \cdot 12 : 2 + 5 \cdot 2^4 : 2^2$ este egal cu:

a) 47 b) 27 c) 152 d) 32

2. Numărul $[160 \cdot 5^0 - 0^5 + 2 \cdot 5^2 \cdot (180 - 5 \cdot 2^4) : 10] : 110$ este egal cu:

a) 1 b) 60 c) 66 d) 6

3. Dacă $2^n = (3 \cdot 2^{2010}) : (3 \cdot 2^{2000})$, atunci numărul n este egal cu:

a) 10 b) 1024 c) $3 \cdot 2^{10}$ d) 64

4. Cel mai mic pătrat perfect mai mare ca 250 este:

a) 256 b) 225 c) 249 d) 244

5. Suma cifrelor celui mai mic cub perfect de trei cifre este:

a) 8 b) 100 c) 125 d) 64

6. Produsul dintre câtul şi restul împărţirii numărului 16053 la numărul 79 este:

a) 3428 b) 386 c) 3248 d) 368

7. Dacă $a = 20$ iar $b + c = 990$, atunci numărul $a \cdot b + a \cdot c + 2010 \cdot a$ este egal cu:

a) 30000 b) 60000 c) 6000 d) 3000

8. Numărul $2^{11} + 2^{10}$ este egal cu:

a) 3062 b) 2^{21} c) $6 \cdot 2^9$ d) 2^{110}

9. Fie a şi b numere naturale, astfel încât $a^2 + b^2 = 100$ şi $n = a + 2 \cdot b$. Produsul dintre cea mai mică şi cea mai mare valoare pe care o poate avea n este egală cu:

a) 400 b) 440 c) 200 d) 220

10. Restul împărţirii numărului $84^{84} + 48^{48}$ la 10 este:

a) 6 b) 2 c) 0 d) 12

11. Dacă n este un număr natural, vom nota $s(n)$ suma cifrelor sale.
a) Dacă $n = 567$, calculaţi $s(n + 1) - s(n)$;
b) Dacă $n = 3799$, calculaţi $s(n) - s(n + 1)$;
c) Care este cel mai mic număr natural n pentru care $s(n) - s(n+1) = 35$?

12. Cifrele a şi b satisfac egalitatea $\overline{ab} + 6 \cdot b = \overline{ba} + 5 \cdot a$.
a) Calculaţi suma S a tuturor numerelor de forma $\overline{aba}$;
b) Care este cel mai mic număr natural n astfel încât $S - n$ să fie pătrat perfect?

Testul a fost elaborat de:
(*Prof. Ella Ilie* - Şc. "Nicolae Iorga" Baia Mare)
(*Prof. Cristian Heuberger* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve ecuaţia $x^2 - [x] - 2 = 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

(*Maria Pop*)

2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f([x]) + f(\{x\}) = 2f(x) - x^2, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

(*Vasile Pop*)

3. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, Q astfel ca $AM \geq MB$, $BN \geq NC$, $CP \geq PD$ şi $DQ \geq QA$.

a) Să se arate că $\mathcal{A}(MNPQ) \geq \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD)$.

b) Să se arate că dacă $x, y, z, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, atunci

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) \leq 1.$$

(*Vasile Pop*)

Clasa a X-a

1. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel ca $\sin x \in \mathbb{Q}$ şi $\cos x \in \mathbb{Q}$. Să se arate că:

a) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} > 2\sqrt{2}$.

b) Numărul $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$ nu este număr natural.

(*Maria Pop*)

2. Fie p un număr prim şi $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine numerele raţionale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care verifică relaţia:

$$x_1^n + px_2^n + p^2x_3^n + \cdots + p^{n-1}x_n^n = p^{n-1}x_1x_2\ldots x_n.$$

(*Vasile Pop*)

3. Să se rezolve sistemul de inecuaţii:

$$\begin{gathered}
x_1x_2 + y_1y_2 \leq 0, \quad x_1x_3 + y_1y_3 \leq 0, \quad x_1x_4 + y_1y_4 \leq 0, \\
x_2x_3 + y_2y_3 \leq 0, \quad x_2x_4 + y_2y_4 \leq 0, \quad x_3x_4 + y_3y_4 \leq 0, \\
x_1^2 + y_1^2 > 0, \quad x_2^2 + y_2^2 > 0, \quad x_3^2 + y_3^2 > 0, \quad x_4^2 + y_4^2 > 0.
\end{gathered}$$

(*Vasile Pop*)

Clasa a XI-a

1. Să se determine toate tripletele de numere complexe (a, b, c) cu proprietatea:

$$|a| = |b| = |c| = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1.$$

(*Maria Pop*)

2. Să se determine toate matricele $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ pentru care, dacă notăm

$$B = A \cdot A^t = [b_{ij}]_{i,j=\overline{1,4}},$$

avem:

$$b_{ii} > 0,\ i = \overline{1,4} \text{ şi } b_{ij} < 0 \text{ pentru orice } i \neq j.$$

(*Vasile Pop*)

3. Fie M o mulţime cu $n \geq 3$ elemente.
Să se determine numărul perechilor (X, Y) de submulţimi proprii, nevide care verifică condiţiile:
a) $X \cap Y = \emptyset$
b) $X \cup Y = M$
c) $X \subset Y$ şi $X \neq Y$.

(*Vasile Pop*)

Clasa a XII-a

1. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $c \in \mathbb{C}$ astfel ca

$$A^2 + B^2 - AB = cI_n.$$

Să se arate că $\det(AB - BA) = 0$ sau n este divizibil cu 3.

(*Vasile Pop*)

2. Se consideră şirul $a_n = \dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \ln n} - \ln\ln n$, $n \geq 2$ şi notăm cu x_n cel mai mic număr natural pentru care

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{x_n \ln x_n} \geq n.$$

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este convergent.

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x_{n+1}}{\ln x_n} = e$.

(*Vasile Pop*)

3. Să se determine toate funcţiile surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi toate legile de compoziţie $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţiile:

$$x * x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ şi } x * (y * z) = x * y + f(z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(*Vasile Pop*)

Premianţii concursului "Argument", ediţia a II-a

Clasa a V-a

Premiul I. *Pop Vlad* (C. N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Matei-Bledea Alexandru* (Şc. "Simion Bărnuţiu" Baia Mare, clasa a IV-a)

Premiul al II-lea. *Danil Lidia* (Şc. "George Coşbuc" Baia Mare), *Mărieş Maria* (C. N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare), *Neţa Răzvan* (Şc. "Nicolae Iorga" Baia Mare)

Premiul al III-lea. *Petca Diana* (Şc. "Nicolae Iorga" Baia Mare), *Bojor Barbu*, *Gălăţeanu Tiberiu*, *Lucaciu Sergiu*, *Nechita Ioana* (C. N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare)

Clasa a IX-a

Premiul I. *Bretan Alice* (C. N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare)

Premiul al II-lea. *Cortel Sven* (C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare)

Premiul al III-lea. *Berce Vasile* (C. N. "Mihai Eminescu" Satu Mare)

Clasa a X-a

Premiul I. *Feier Florin* (C. N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare)

Premiul al II-lea. *Morar Andrei* (C. N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare)

Premiul al III-lea. *Suciu Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare)

Clasa a XI-a

Premiul I. *Balint Florin* (C. N. "Andrei Mureşanu" Dej)

Premiul al II-lea. *Petrovan Marius* (C. N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare)

Premiul al III-lea. *Petrican Teodor* (C. N. "Andrei Mureşanu" Dej)

Clasa a XII-a

Premiul I. *Horvat Mihaela* (C. N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare)

Premiul al II-lea. *Crişan Vlad* (C. N. "Vasile Lucaciu" Baia Mare)

Premiul al III-lea. *Radu Andrada* (C. N. "Gheorghe Şincai" Baia Mare)

Concursul "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni, 28 aprilie 2011

1. Considerăm numerele:

$a = 275 - (2 \times 250 - 3 \times 125)$

$b = 315 \times 4 - [(544 + 4 \times 64) : (25 \times 3 - 27 : 3 + 14) + 9 \times 11 \times 10]$

$c = 25 \times [40 - 36 \times (21 - 4 \times 5)] : (22 \times 11 - 2 \times n)$,

unde n este cel mai mic număr de 3 cifre impare mai mare decât 100.

1) Aflaţi numerele a, b, c şi ordonaţi-le crescător;

2) Arătaţi că $a - b : 2 = 4 \times c$;

3) Aflaţi numărul necunoscut din egalitatea $2 \times c - x = (a - b : 2) : 4$.

2. La Concursul de matematică "Gheorghe Şincai" pentru micii matematicieni au participat 80 de elevi, care au avut de rezolvat un subiect format din 3 probleme. Pentru o problemă corect rezolvată, un elev primeşte 10 puncte, iar pentru o problemă nerezolvată i se scade un punct. Prima problemă a fost rezolvată de jumătate dintre elevii participanţi, a doua problemă a fost rezolvată de un număr de elevi cu 20 mai mare decât în cazul primei probleme. În total au fost 161 probleme notate cu 10.

1) Câţi elevi au rezolvat corect problema a treia?

2) Care este suma punctelor obţinute de toţi elevii?

Există cel puţin un elev care a rezolvat toate problemele? (justificaţi)

3. Se dă şirul de numere: $0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots$

1) Care este suma primilor 8 termeni ai şirului?

2) Care este termenul aflat pe poziţia 2011?

3) Care sunt primii patru termeni din şir care au proprietatea că fiecare este egal cu răsturnatul său?

Testul a fost elaborat de:

(*Prof. Cristian Heuberger* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)
(*Prof. Nicolae Muşuroia* - C. N. "Gh. Şincai" Baia Mare)

Rezolvarea problemelor din numărul anterior

Clasa a IX-a

1. *Fie $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$, divizorii proprii ai numărului natural n.*
i) Să se calculeze produsul $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k$.
ii) Să se arate că n^k este un pătrat perfect.

(*Gheorghe Râmbu*)

Soluţie. i) Avem că numărul natural d_i $(i \in \overline{1,k})$ este divizor propriu al lui $n \Leftrightarrow \dfrac{n}{d_i}$, este divizor propriu al lui n. Atunci mulţimea $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\} = \left\{\dfrac{n}{d_1}, \dfrac{n}{d_2}, \ldots, \dfrac{n}{d_k}\right\}$ şi $d_1^2 d_2^2 \ldots d_k^2 = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k \cdot \dfrac{n}{d_1} \cdot \dfrac{n}{d_2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n}{d_k} = n^k$, deci $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = \sqrt{n^k}$.

ii) Din i) rezultă că $n^k = (d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k)^2$, de unde se obţine concluzia.

2. *Să se arate că în orice triunghi ABC ascuţitunghic avem*

$$\frac{\cos B \cos C}{\cos A} + \frac{\cos C \cdot \cos A}{\cos B} + \frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos C} \geq \frac{3}{2}.$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Deoarece $\dfrac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A} = \dfrac{\cos B \cdot \cos C}{\sin(B+C)} \cdot \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$ şi analoagele, atunci

$$\sum \frac{\cos B \cdot \cos C}{\cos A} = \sum \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \geq \frac{3}{2}$$

conform inegalităţii lui Nesbitt.

3. *Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Să se arate că*

$$3x^2 - 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)x + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Discriminantul ecuaţiei este:

$$\begin{aligned}\Delta &= 16\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2-12\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ca}\right)\\
&\le 4\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)^2-12\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\
&= 8\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}}+\frac{1}{b\sqrt{ac}}+\frac{1}{c\sqrt{ab}}\right)-8\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\
&= \frac{8}{abc}\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}-(a+b+c)\right)\\
&= \frac{8}{abc}\left[\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2\right]\le 0,\end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia.

4. *Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC înscris în cercul $C(O;R)$. Să se arate că, dacă R_1, R_2, R_3 sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, BOC, respectiv COA, atunci*

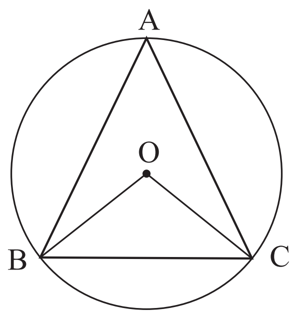
$$\frac{2}{R}<\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\le\frac{3}{R}.$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Avem că

$$R_2=\frac{OB\cdot OC\cdot BC}{4S_{BOC}}=\frac{R^2\cdot a}{2R^2\sin(\widehat{BOC})}=\frac{a}{2\sin(2A)}=\frac{2R\sin A}{4\sin A\cdot\cos A}=\frac{R}{2\cos A}$$

şi analoagele.



Atunci:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{2}{R}(\cos A+\cos B+\cos C)\le\frac{2}{R}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{R}$$

şi

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}>1,$$

deci $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}>\dfrac{2}{R}$.

5. *Se consideră numerele strict pozitive a_1,a_2,b_1,b_2. Să se arate că*

$$(a_1+a_2)x^2-2\Big(\sqrt{[a_1]\cdot[b_1]}+\sqrt{\{a_1\}\cdot\{b_1\}}+\sqrt{[a_2]\cdot[b_2]}+\sqrt{\{a_2\}\cdot\{b_2\}}\Big)x+b_1+b_2\geq 0,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

(*Nicolae Muşuroia, Ion Savu*)

Soluţie. Arătăm că discriminantul $\Delta\leq 0$. Avem:

$$\begin{aligned}\Delta=&\,4\left(\sqrt{[a_1]\cdot[b_1]}+\sqrt{\{a_1\}\cdot\{b_1\}}+\sqrt{[a_2]\cdot[b_2]}+\sqrt{\{a_2\}\cdot\{b_2\}}\right)^2\\&-4(a_1+a_2)(b_1+b_2)\\&\overset{C-B-S}{\leq}4\left([a_1]+\{a_1\}+[a_2]+\{a_2\}\right)\left([b_1]+\{b_1\}+[b_2]+\{b_2\}\right)\\&-4(a_1+a_2)(b_1+b_2)=0.\end{aligned}$$

6. *Să se arate că*

$$\frac{x+y^2}{4+y^3+z^3}+\frac{y+z^2}{4+z^3+x^3}+\frac{z+x^2}{4+x^3+y^3}\leq 1,\quad \forall\, x,y,z\in[0,1].$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Cum $x,y,z\in[0,1]$, avem că $\dfrac{x+y^2}{4+y^3+z^3}\leq\dfrac{x+y^2}{3+x^3+y^3+z^3}$ şi analoagele. Membrul stâng S se majorează astfel:

$$S\leq\frac{x+y+z+x^2+y^2+z^2}{3+x^3+y^3+z^3}\overset{not}{=}S_1.$$

Relaţia

$$\begin{aligned}S_1\leq 1&\Leftrightarrow x+y+z+x^2+y^2+z^2\leq 3+x^3+y^3+z^3\\&\Leftrightarrow\sum(x^3+1-x-x^2)\geq 0\Leftrightarrow\sum(x+1)(x-1)^2\geq 0,\end{aligned}$$

relaţie adevărată, deci $S\leq 1$ este adevărată.
Să mai observăm că avem egalitate pentru $x=y=z=1$.

7. *Să se arate că, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi $\alpha \in [1, \infty)$, atunci*

$$\frac{a}{\alpha(b+c)-a}+\frac{b}{\alpha(c+a)-b}+\frac{c}{\alpha(a+b)-c} \geq \frac{3}{2\alpha-1}\,.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Din ipoteză avem că numitorii sunt strict pozitivi şi

$$\begin{aligned} S &\overset{not}{=} \sum_{cycl} \frac{a}{\alpha(b+c)-a} \qquad (1)\\ &= \sum_{cycl} \frac{a^2}{\alpha(ab+ac)-a^2} \overset{Bergstrom}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2\alpha(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)} \end{aligned}$$

Cum relaţia

$$\begin{gathered} \frac{(a+b+c)^2}{2\alpha(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{3}{2\alpha-1} \\ \Leftrightarrow (2\alpha-1)\sum a^2 + 2(2\alpha-1)\sum ab \geq 6\alpha \sum ab - 3\sum a^2 \\ \Leftrightarrow (2\alpha+2)\sum a^2 \geq (2\alpha+2)\sum ab \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum ab, \end{gathered}$$

este adevărată, folosind (1) se obţine concluzia.

Observaţie. Pentru $\alpha = 2$ se obţine Problema C:3175 din G.M. 6/07, autor D. M. Bătineţu-Giurgiu.

8. *Notăm cu l_a, l_b, l_c lungimile bisectoarelor interioare unui triunghi ABC şi cu r raza cercului înscris triunghiului. Să se arate că*

$$l_a + l_b + l_c \geq 9r.$$

(*Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

Soluţie. Avem că

$$\begin{aligned} l_a + l_b + l_c &\geq h_a + h_b + h_c = \frac{S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ &= 2\cdot p\cdot r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = r(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9r. \end{aligned}$$

Să observăm că avem egalitate dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

9. *Să se arate că triunghiul ABC, în care avem relaţia*

$$h_a \cdot h_b + h_b \cdot h_c + h_c \cdot h_a = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

este echilateral.

(*Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

Soluţie. Deoarece $h_a \leq m_a$ şi analoagele, avem că

$$\begin{aligned} h_a \cdot h_b + h_b \cdot h_c + h_c \cdot h_a &\leq m_a \cdot m_b + m_b \cdot m_c + m_c \cdot m_a \\ &\leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \end{aligned}$$

Egalitatea se obţine în cazul în care înălţimile triunghiului sunt egale cu medianele corespunzătoare şi care la rândul lor sunt egale între ele, deci triunghiul ABC este echilateral.

10. *Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia funcţională $f(x) = x \cdot f(1 - \{x\})$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se determine funcţia f, ştiind că*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

(*Gheorghe Gherasim*, Liceul "Regele Ferdinand", Sighetu Marmaţiei)

Soluţie. Notând $a = f(1)$ obţinem $f(k) = kf(1) = k \cdot a$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
Din $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ rezultă că $\dfrac{n(n+1)}{2} a = \dfrac{n(n+1)}{2}$ deci $a = 1$.
Pentru $x \in (0,1)$ avem

$$f(x) = x \cdot f(1 - x) \tag{1}$$

Înlocuind în (1) pe x cu $1 - x$, găsim că

$$f(1 - x) = (1 - x) f(x) \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $f(x) = x(1 - x) f(x)$, $\forall\, x \in (0,1)$, deci $f(x) = 0$, $\forall\, x \in (0,1)$, de unde $f(1 - \{x\}) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, adică $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Dacă $x = k \in \mathbb{Z}$, avem că $f(k) = k \cdot f(1 - \{k\}) = k \cdot f(1) = k$. Aşadar, funcţia căutată este

$$f(x) = \begin{cases} k, & x = k \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}. \end{cases}$$

11. *Să se arate că:*
a) Ecuaţia $9x^2 + 5y = 7$ *nu are soluţii în numere întregi.*
b) Ecuaţia $9x^2 + 5y = 4$ *are o infinitate de soluţii în numere întregi.*

(*Gheorghe Gherasim*, Liceul "Regele Ferdinand", Sighetu Marmaţiei)

Soluţie. a) Din $9x^2 + 5y = 7 \Rightarrow 10x^2 + 5y = 7 + x^2$, deci $5/(7 + x^2)$. Aceasta este o contradicţie deoarece nici un pătrat perfect nu are cifra unităţilor 8 sau 3.

b) Avem: $9x^2 + 5y = 4 \Leftrightarrow 9x^2 + 5y = 9 - 5 \Leftrightarrow 5(y + 1) = 9(1 - x^2)$. De aici rezultă că $(\exists)\, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $y + 1 = 9k$, de unde $y = 9k - 1$ şi $x^2 = 1 - 5k$, $k \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$. Notând $k = -m$, $m \in \mathbb{N}$, găsim că $y = -9m - 1$ şi $x^2 = 5m + 1$. Cum ultima ecuaţie are o infinitate de soluţii în $\mathbb{Z}$, căci pentru $m = 5p^2 + 2p$, $p \in \mathbb{N}$, se poate lua $x = \pm(5p + 1)$, concluzia se impune.

12. *Să se determine numerele* $a, b, c > 0$ *ştiind că*

$$\frac{a^2 - a + 1}{b + c} + \frac{b^2 - b + 1}{c + a} + \frac{c^2 - c + 1}{a + b} = \frac{3}{2}.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Cum $x^2 - x + 1 \geq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $x = 1$, avem:

$$E = \sum \frac{a^2 - a + 1}{b + c} \geq \sum \frac{a}{b + c} \overset{Nesbitt}{\geq} \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc si rezultă că $a = b = c = 1$.

13. *Să se determine funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$f(x \cdot y) \geq x^{2010} \cdot f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

(*Marin Bancoş*, Universitatea de Nord Baia Mare)

Soluţie. Pentru $x \neq 0$ şi $x_1 = \dfrac{1}{x}$, $y_1 = xy$ avem:

$$f(x_1 y_1) \geq x_1^{2010} \cdot f(y_1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\, xy\right) \geq \frac{1}{x^{2010}} \cdot f(xy)$$

$$\Leftrightarrow f(y) \geq \frac{1}{x^{2010}} \cdot f(xy) \,\Big|\, x^{2010} (> 0) \Leftrightarrow x^{2010} \cdot f(y) \geq f(xy).$$

Prin urmare:

$$x^{2010} \cdot f(y) \geq f(xy), \quad (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0. \tag{1}$$

Din enunţ însă avem că:

$$f(xy) \geq x^{2010} \cdot f(y), \quad (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Aşadar, folosind relaţiile (1) şi (2), obţinem imediat că:

$$f(xy) = x^{2010} \cdot f(y), \quad (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0. \tag{3}$$

Pentru $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ şi $y = 0$, relaţia (3) devine:

$$f(0) = x^{2010} \cdot f(0) \overset{(x-oarecare)}{\Rightarrow} f(0) = 0. \tag{4}$$

Să observăm că relaţia (3) este satisfăcută şi pentru $x = 0$, deoarece pentru această valoare relaţia devine:

$$f(0 \cdot y) = 0^{2010} \cdot f(y) \Leftrightarrow f(0) = 0,$$

iar această egalitate este chiar (4), egalitate deja demonstrată.
Prin urmare avem:

$$f(xy) = x^{2010} \cdot f(y), \quad (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Pentru $y = 1$ această relaţie devine:

$$f(x) = x^{2010} \cdot \overset{(o\ constantă)}{f(1)}, \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

Aşadar, funcţiile căutate sunt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = k \cdot x^{2010},$$

unde $k \in \mathbb{R}$ este o constantă reală fixată.

14. *Să se rezolve sistemul* $\begin{cases} x \cdot z = y \cdot t \\ x^z = y^t \end{cases}$ *ştiind că* $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$, $x \neq y$, *iar* z *şi* t *sunt prime între ele.*

(*Cristian Heuberger*)

Soluţie. Putem considera pentru început $x < y$, rezultând imediat din prima ecuaţie că $z > t$. Numerele z şi t fiind prime între ele, tot din prima ecuaţie rezultă $z|y$. Există aşadar $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y = p \cdot z$. Deducem imediat $x = p \cdot t$.
A doua ecuaţie devine $(p \cdot t)^z = (p \cdot z)^t$ sau altfel scris $p^{z-t} \cdot t^z = z^t$. Cum z şi t sunt prime între ele şi $t < z$, rezultă $t = 1$.
Sistemul devine $\begin{cases} x \cdot z = y \\ x^z = y \end{cases}$ şi de aici $x^z = x \cdot z$ sau $x^{z-1} = z$.

Dacă $x = 1$, atunci $z = 1 (= t)$, ceea ce nu convine.

Dacă $x \geq 2$, atunci $x^{z-1} \geq 2^{z-1} > z$, $\forall\, z \geq 3$.

Dacă $z = 3$ am obţine $x^2 = 3$, ceea ce nu convine.

Aşadar $z = 2$ şi de aici $x = 2$, $y = 4$.
Dacă $y < x$, printr-un raţionament similar se obţine $z = 1$, $t = 2$, $y = 2$, $x = 4$.
Mulţimea soluţiilor este $S = \{(2, 4, 2, 1), (4, 2, 1, 2)\}$.

15. *Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$, astfel încât $AM \cap BN \cap CP = \{Q\}$. Notăm $\dfrac{PA}{PB} = x$, $\dfrac{NA}{NC} = y$.*

a) Să se demonstreze că Q este centrul de greutate al $\triangle MNP$ dacă şi numai dacă Q este centrul de greutate al $\triangle ABC$.

b) Să se demonstreze că

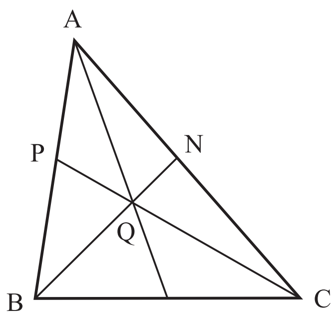
$$AQ + BQ + CQ < \frac{(1+x)AB + (1+y)AC + (x+y)BC}{1+x+y}.$$

c) Să se demonstreze că se poate construi un triunghi cu laturile de lungime

$$AQ,\ x \cdot BQ,\ y \cdot CQ.$$

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. a) " $\Leftarrow$ " Evident.



" $\Rightarrow$ " Din teorema lui Ceva avem:
$\dfrac{PA}{PB} \cdot \dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{y}{x}$.
Din teorema lui Van Aubel obţinem:
$\dfrac{QA}{QM} = \dfrac{PA}{PB} + \dfrac{NA}{NC} = x + y$.

Avem:

$$(\forall)\, L \in \mathcal{P},\ \overrightarrow{LM} = \frac{x\overrightarrow{LB} + y\overrightarrow{LC}}{x+y},\ \overrightarrow{LP} = \frac{\overrightarrow{LA} + x\overrightarrow{LB}}{1+x},\ \overrightarrow{LN} = \frac{\overrightarrow{LA} + y\overrightarrow{LC}}{1+y}$$

şi

$$(\forall)\, L \in \mathcal{P},\ \overrightarrow{LQ} = \frac{\overrightarrow{LA} + (x+y)\overrightarrow{LM}}{1+x+y} = \frac{\overrightarrow{LA} + x\overrightarrow{LB} + y\overrightarrow{LC}}{1+x+y}. \qquad (*)$$

Q este centrul de greutate al triunghiului MNP, deci

$(\forall)\, L \in \mathcal{P},\ 3\overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{LP} \Leftrightarrow$

$$(\forall)\, L \in \mathcal{P},\ \frac{3}{1+x+y}\overrightarrow{LA} + \frac{3x}{1+x+y}\overrightarrow{LB} + \frac{3y}{1+x+y}\overrightarrow{LC} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}\right)\overrightarrow{LA} + \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{1+x}\right)\overrightarrow{LB} + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{y}{1+y}\right)\overrightarrow{LC}.$$

Pentru $L = C$ în relaţia precedentă, deoarece vectorii $\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{CB}$ formează o bază, obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{1+x+y} = \dfrac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \\ \dfrac{3x}{1+x+y} = \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{x}{x+y}. \end{cases}$$

Înmulţind prima relaţie cu x şi egalând-o cu cea de-a doua, obţinem $x = 1$. Înlocuind în sistem, obţinem $y = 1$. Aşadar $[BN]$ şi $[CP]$ sunt mediane, deci Q este centrul de greutate al triunghiului ABC.

b) Punând succesiv $L = A$, $L = B$ şi $L = C$ în relaţia $(*)$, obţinem:

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}}{1+x+y},\ \overrightarrow{BQ} = \frac{\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}}{1+x+y} \text{ şi } \overrightarrow{CQ} = \frac{\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CB}}{1+x+y}.$$

Rezultă

$$AQ < \frac{xAB + yAC}{1+x+y},\ BQ < \frac{AB + yBC}{1+x+y},\ CQ < \frac{AC + xBC}{1+x+y}$$

şi, adunând inegalităţile, deducem concluzia.

c) $\overrightarrow{AQ} + x\overrightarrow{BQ} + y\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{0}$.

Clasa a X-a

1. *Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia*

$$2^{\sqrt{2x\cdot\log_2 x}} + x^{\sqrt{2x\cdot\log_x 2}} = 2^x + x^2.$$

(*Ludovic Longaver*, Liceul "Németh László")

Soluţie. Pentru $x \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ pozitivitatea expresiilor care intervin este asigurată. Arătăm la început că $2^{\sqrt{2x\log_2 x}} = x^{\sqrt{2x\log_x 2}}$. Într-adevăr, prin logaritmare în baza doi, se obţine:

$$\sqrt{2x\log_2 x} = \sqrt{2x\log_x 2}\cdot\log_2 x \Leftrightarrow \sqrt{2x\log_2 x} = \sqrt{2x\log_2 x},$$

ceea ce este adevărat. Ecuaţia devine:

$$2^{\sqrt{2x\log_2 x}} = \frac{2^x + x^2}{2}. \tag{1}$$

Deoarece

$$2^{\sqrt{2x\log_2 x}} \le 2^{\frac{x+\log_2(x^2)}{2}} = \sqrt{2^x\cdot 2^{\log_2(x^2)}} = \sqrt{2^x\cdot x^2} \le \frac{2^x + x^2}{2},$$

se obţine egalitate (1) dacă şi numai dacă $x = \log_2(x^2) \Leftrightarrow 2^x = x^2$, ceea ce în mulţimea numerelor naturale nenule este verificată numai pentru $x = 2$ şi $x = 4$.

2. *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ f \circ f = f$.*

a) Să se demonstreze că f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

b) Daţi un exemplu de funcţie f care nu este injectivă, are proprietatea din enunţ şi nu este constantă.

c) Să se arate că există o infinitate de funcţii f bijective cu proprietatea din enunţ şi care nu sunt monotone pe nici un interval din $\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că există o infinitate de funcţii f, astfel încât $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq x$.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. a) " $\Rightarrow$ " $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(f(f(x))) = f(x) \overset{f\ inj}{\Leftrightarrow} \forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x \Leftrightarrow f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$, deci f este şi surjectivă.

" $\Leftarrow$ " Deoarece f este surjectivă, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\exists\, x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$. Aşadar, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) = f(f(f(x))) = f(f(y))$, adică $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$, deci f este şi injectivă.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$ este un exemplu. Sau $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 1] \\ \dfrac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \backslash [-1, 1]. \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + a, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$, cu $a \in \mathbb{Q}$, verifică cerinţa.

d) Din ipoteză rezultă că $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(f(f(x))) \leq f(f(x)) \leq f(x)$, deci

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = f(x).$$

Obţinem că $f/_{Im(f)} = 1_{Im(f)}$.

De exemplu, pentru $a \in \mathbb{R}$, funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [a, \infty) \\ a, & x \in (-\infty, a) \end{cases}$ sunt soluţii.

3. *Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$ şi punctul M pe cercul său circumscris. Fie M' punctul diametral opus lui M şi H_1, H_2, H_3, H_4 respectiv ortocentrele triunghiurilor MAB, MBC, $M'CD$, $M'AD$.*

a) Să se demonstreze că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

b) Dacă G_1 şi G_2 sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor H_1CD şi H_3AB, să se determine locul geometric al punctelor segmentului $[G_1G_2]$, atunci când M parcurge cercul.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. a) Notând cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor din enunţ, într-un sistem de axe de coordonate cartezian cu centrul în centrul O al cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ şi cu r raza acestui cerc.
Obţinem $h_1 = m + a + b$, $h_2 = m + b + c$, $h_3 = -m + c + d$, $h_4 = -m + d + a$ şi apoi $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$.

b) Avem

$$g_1 = \frac{h_1 + c + d}{3} = \frac{m + a + b + c + d}{3},\ g_2 = \frac{h_3 + a + b}{3} = \frac{-m + a + b + c + d}{3}.$$

Apoi

$$\left|g_1 - \frac{a+b+c+d}{3}\right| = \frac{|m|}{3} = \frac{r}{3}, \quad \left|g_2 - \frac{a+b+c+d}{3}\right| = \frac{|-m|}{3} = \frac{r}{3},$$

deci G_1 şi G_2 se află pe cercul $\mathcal{C}\left(Q\left(\frac{a+b+c+d}{3}\right), \frac{r}{3}\right) \overset{not}{=} \mathcal{C}$.

Deoarece $g_1 - g_2 = \frac{2m}{3}$, rezultă că $G_1G_2 = |g_1 - g_2| = \frac{|2m|}{3} = \frac{2r}{3}$ şi că $\overrightarrow{G_2G_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$, deci $[G_1G_2]$ este diametrul cercului $\mathcal{C}$ paralel cu $[OM]$. Aşadar locul geometric este discul $[\mathcal{C}]$.

4. *Să se arate că dacă $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci*

$$\frac{1}{\log_a b \cdot \log_b c + \log_c a} + \frac{1}{\log_b c \cdot \log_c a + \log_a b} + \frac{1}{\log_c a \cdot \log_a b + \log_b c} \le \frac{3}{2}.$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Notăm: $x = \log_a b > 0$, $y = \log_b c > 0$, $z = \log_c a > 0$, deci $xyz = 1$. Atunci:

$$\frac{1}{xy+z} + \frac{1}{yz+x} + \frac{1}{zx+y} = \frac{z}{xyz+z^2} + \frac{x}{xyz+x^2} + \frac{y}{xyz+y^2}$$
$$= \frac{z}{1+z^2} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

5. *Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia*

$$a^{x_1}+3a^{x_2}+5a^{x_3}+\cdots+(2n-1)a^{x_n}=n^2,\quad \textit{unde}\ \ a>0, a\neq 1, n\in\mathbb{N}^*.$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Ecuaţia devine $(a^{x_1}-1)+3(a^{x_2}-1)+\cdots+(2n-1)(a^{x_n}-1)=0$. Cum fiecare termen al membrului stâng este pozitiv dacă $a>1$ şi negativ dacă $a\in(0,1)$, obţinem $a^{x_i}=1$, $i=\overline{1,n}$. Deci $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

6. *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} 2^{[x]}+2^{\{y\}}=2^{\frac{z}{2}+1}\\ 2^{[y]}+2^{\{z\}}=2^{\frac{x}{2}+1}\\ 2^{[z]}+2^{\{x\}}=2^{\frac{y}{2}+1}\end{cases}.$$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Adunând cele trei egalităţi obţinem:

$$2\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^y}+\sqrt{2^z}\right)=\left(2^{[x]}+2^{\{x\}}\right)+\left(2^{[y]}+2^{\{y\}}\right)+\left(2^{[z]}+2^{\{z\}}\right)$$
$$\geq 2\sqrt{2^{[x]}\cdot 2^{\{x\}}}+2\sqrt{2^{[y]}\cdot 2^{\{y\}}}+2\sqrt{2^{[z]}\cdot 2^{\{z\}}}=2\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^y}+\sqrt{2^z}\right),$$

deci avem egalitate în inegalitatea mediilor. Atunci

$$2^{[x]}=2^{\{x\}}\Rightarrow [x]=\{x\}\Rightarrow x=0$$
$$2^{[y]}=2^{\{y\}}\Rightarrow [y]=\{y\}\Rightarrow y=0$$
$$2^{[z]}=2^{\{z\}}\Rightarrow [z]=\{z\}\Rightarrow z=0.$$

7. *Pentru triunghiul ABC notăm cu z_A, z_B, z_C, respectiv z_G, afixele vârfurilor, respectiv ale centrului de greutate. Să se arate că, dacă*

$$\left|\frac{z_G-z_A}{z_G-z_B}\right|+\left|\frac{z_G-z_B}{z_G-z_C}\right|+\left|\frac{z_G-z_C}{z_G-z_A}\right|=3,$$

atunci triunghiul ABC este echilateral.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie.

$$3=\sum\frac{|z_G-z_A|}{|z_G-z_B|}\geq 3\sqrt[3]{\Pi\frac{|z_G-z_A|}{|z_G-z_B|}}=3.$$

Deci avem egalitate în inegalitatea mediilor. Atunci:

$$|z_G-z_A|=|z_G-z_B|=|z_G-z_C|\Rightarrow GA=GB=GC,$$

rezultă că triunghiul ABC este echilateral.

8. *Se consideră mulţimea* $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Să se determine numărul de soluţii ale ecuaţiei* $X \cup Y \cup Z = E$, *ştiind că orice element al mulţimii* E *apare cel puţin în două dintre mulţimile* X, Y *şi* Z. *Generalizare.*

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Pentru orice $a \in E = X \cup Y \cup Z$ avem exact 4 posibilităţi: ($a \in X \cap Y$), sau $a \in X \cap Z$, sau $a \in Y \cap Z$, sau $a \in X \cap Y \cap Z$). Cum E are n elemente, numărul de soluţii este 4^n conform principiului produsului.

Generalizare. Dacă $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul de soluţii $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ ale ecuaţiei $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = E$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ fixat), cu proprietatea că fiecare element din E apare în cel puţin două dintre mulţimile $X_1, X_2, \dots, X_k$, este egal cu $(2^k - k - 1)^n$.

Într-adevăr, fiecare element $a \in E$ apare în exact i mulţimi, $i \in \overline{2, k}$, în C_k^i moduri. Aşadar, pentru $\forall\, a \in A$ avem $C_k^2 + C_k^3 + \dots + C_k^k = 2^k - k - 1$ posibilităţi. Cu principiul produsului, deoarece $card\,(E) = n$, ecuaţia dată va avea $(2^k - k - 1)^n$ soluţii.

9. *Să se arate că în orice triunghi* ABC *ascuţitunghic avem*

$$\frac{1}{(\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B)^n} + \frac{1}{(\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C)^n} + \frac{1}{(\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A)^n} \geq \frac{1}{3^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Triunghiul ABC fiind ascuţitunghic, avem că:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C,$$

deci

$$\frac{1}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C} = 1,$$

adică $x + y + z = 1$, unde $x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$; $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C}$; $z = \dfrac{1}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}$.

Deoarece $x, y, z > 0$ şi funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ este convexă, avem că $f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \overset{Jensen}{\leq} \dfrac{f(x) + f(y) + f(z)}{3}$, adică

$$x^n + y^n + z^n \geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}},$$

adică are loc inegalitatea cerută.

Observaţie. Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic, atunci pentru n par inegalitatea de demonstrat este adevărată (se înlocuiesc două din variabilele x, y, z cu opusele acestora), iar pentru n impar inegalitatea de demonstrat este falsă. Într-adevăr, luând triunghiul ABC cu $A = \dfrac{2\pi}{3}$, $B = C = \dfrac{\pi}{6}$, avem că $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ şi $\operatorname{tg} A = -\sqrt{3}$, deci membrul stâng al inegalităţii de demonstrat devine

$$S = \frac{1}{(-1)^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{(-1)^n} \overset{n\ impar}{=} \frac{1}{3^n} - 2 = \frac{1 - 2 \cdot 3^n}{3^n} < \frac{1}{3^{n-1}}\,.$$

10. *Fie n un număr întreg dat. Rezolvaţi în numere reale ecuaţia*

$$[x] + [\log_2 x] = n + 2^{n-1}.$$

(*Cristinel Mortici,* Universitatea "Valahia", Târgovişte)

Soluţie. Dacă $n \le 0$, atunci ecuaţia nu are soluţii deoarece $2^{n-1} \notin \mathbb{Z}$.

Dacă $n = 1$, ecuaţia devine $[x] + [\log_2 x] = 2$. Cum $x \ge 2$ nu convine căci $[x] + [\log_2 x] \ge 3$, analizând cazurile $x \in (0, 1)$ şi $x \in [1, 2)$, deducem că $[x] + [\log_2 x] < 2$, deci ecuaţia nu are soluţie.

Dacă $n \ge 2$, atunci $x \le 2^{n-1}$ este prea mic, iar $x \ge 2^n$ este prea mare, deci $2^{n-1} < x < 2^n$ şi în consecinţă, $[\log_2 x] = n - 1$. Ecuaţia devine:

$$[x] = 2^{n-1} + 1 \Leftrightarrow 2^{n-1} + 1 \le x < 2^{n-1} + 2.$$

În concluzie, soluţia este $S = \Big[2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2\Big)$.

11. *Fie a, b, c, d numere reale strict pozitive cu proprietatea că $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + 10abcd = 14$. Să se demonstreze că*

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \ge 6abcd.$$

(*Horia Zlampareţ*)

Soluţie. Presupunem prin absurd că $\sum ab < 6abcd$, deci

$$1 < \frac{6abcd}{\sum ab} = \frac{6}{\sum \frac{1}{ab}} \le \sqrt[6]{a^3b^3c^3d^3}\,, \text{ de unde } abcd > 1. \qquad (1)$$

Pe de altă parte,

$$a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} \ge 4\sqrt[4]{a^{10} \cdot b^{10} \cdot c^{10} \cdot d^{10}} = 4\sqrt[4]{(abcd)^{10}} > 4. \qquad (2)$$

Utilizând inegalităţile (1) şi (2) obţinem că

$$a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + 10abcd > 4 + 10 = 14,$$

contradicţie cu ipoteza. Aşadar, presupunerea făcută este falsă.

12. *Să se demonstreze că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$\frac{a^2}{b^2+4m_bR}+\frac{b^2}{c^2+4m_cR}+\frac{c^2}{a^2+4m_aR}\le 1,$$

notaţiile fiind cele uzuale.

(*Marin Bancoş*, Universitatea de Nord Baia Mare)

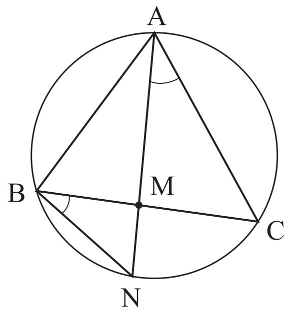
Soluţie. Vom demonstra pentru început că în orice triunghi

$$b^2+c^2\le 4m_aR,$$

şi analoagele.

Fie ABC un triunghi oarecare, M mijlocul segmentului (BC) şi N intersecţia lui AM cu cercul circumscris $\triangle ABC$. Se observă fără dificultate că:

$$\triangle AMC\sim\triangle BMN\Rightarrow\frac{AM}{BM}=\frac{MC}{MN}\Leftrightarrow MN=\frac{BM\cdot MC}{AM}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{m_a}=\frac{a^2}{4m_a}.$$



Dar

$$AN\le 2R\Leftrightarrow AM+MN\le 2R\Leftrightarrow m_a+\frac{a^2}{4m_a}\le 2R\overset{|\cdot 4m_a}{\Leftrightarrow}4m_a^2+a^2\le 8m_aR.$$

Înlocuind în această relaţie

$$m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4},$$

se obţine imediat inegalitatea de demonstrat:

$$b^2+c^2\le 4m_aR.$$

Folosind acum această inegalitate obţinem:

$$b^2+c^2\le 4m_aR \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le a^2+4m_aR \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+4m_aR}$$
$$\le \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \overset{|\cdot c^2}{\Leftrightarrow} \frac{c^2}{a^2+4m_aR}\le \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

În acelaşi mod obţinem încă două relaţii similare.
Avem aşadar:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b^2+4m_bR}&\le\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\\ \frac{b^2}{c^2+4m_cR}&\le\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\\ \frac{c^2}{a^2+4m_aR}&\le\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste inegalităţi, se obţine imediat inegalitatea de demonstrat:

$$\frac{a^2}{b^2+4m_bR}+\frac{b^2}{c^2+4m_cR}+\frac{c^2}{a^2+4m_aR}\le 1.$$

13. *Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$2^{x+1}+2^{5-x}=-x^2+4x+70.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Deoarece membrul stâng reprezintă o funcţie strict convexă, iar membrul drept una strict concavă, ecuaţia are cel mult două soluţii. Se verifică uşor faptul că $x=-1$ şi $x=5$ sunt soluţii, deci mulţimea soluţiilor este $S=\{-1;5\}$.

14. *În tetraedrul $[A_1A_2A_3A_4]$ notăm cu S aria totală şi cu S_k aria feţei opuse vârfului A_k, $k\in\{1,2,3,4\}$. Să se demonstreze că*

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{a\cdot S^2+b\cdot S_k^2}\ge\frac{8\cdot\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\cdot a\cdot\sqrt{a}\cdot S^2}\,,\quad \forall\, a,b\in(0,\infty).$$

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Fie

$$t=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{aS^2+bS_k^2}\Leftrightarrow a\cdot S^2\cdot t=\sum_{k=1}^{4}\frac{a\cdot S^2}{a\cdot S^2+b\cdot S_k^2}$$

$$\Leftrightarrow a\cdot S^2\cdot t-4=\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{a\cdot S^2}{a\cdot S^2+b\cdot S_k^2}-1\right)\Leftrightarrow 4-a\cdot S^2\cdot t=\sum_{k=1}^{4}\frac{bS_k^2}{aS^2+bS_k^2}\quad(1)$$

Deoarece

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{b\cdot S_k^2}{a\cdot S^2+b\cdot S_k^2}\le\sum_{k=1}^{4}\frac{b\cdot S_k^2}{2\sqrt{ab}\cdot S\cdot S_k}=\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\cdot\sum_{k=1}^{4}\frac{S_k}{S}=\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}},$$

folosind (1) deducem că

$$4-a\cdot S^2\cdot t\le\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\Leftrightarrow 4-\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\le a\cdot S^2\cdot t\Leftrightarrow\frac{8\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2a\cdot\sqrt{a}\cdot S^2}\le t,$$

ceea ce demonstrează enunţul.

15. *Să se demonstreze că*

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+z\cdot x+x^2}\ge\frac{x+y+z}{3},\quad\forall\, x,y,z\in(0,\infty).$$

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Vom arăta că:

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{2x-y}{3},\ \forall\, x,y>0\\
&\Leftrightarrow 3x^3\ge(2x-y)(x^2+xy+y^2),\ \forall\, x,y>0\\
&\Leftrightarrow 3x^3\ge 2x^3+2x^2y+2xy^2-x^2y-xy^2-y^3,\ \forall\, x,y>0\\
&\Leftrightarrow x^3+y^3\ge x^2y+xy^2,\ \forall\, x,y>0\\
&\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)\ge xy(x+y),\ \forall\, x,y\ge 0\\
&\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\ge 0,\ \forall\, x,y>0,\end{aligned}$$

ceea ce este evident.

Aşadar,

$$\sum\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\ge\sum\frac{2x-y}{3}=\frac{2x-y}{3}+\frac{2y-z}{3}+\frac{2z-x}{3}=\frac{x+y+z}{3},$$

ceea ce trebuia demonstrat.
Să mai observăm că avem egalitate pentru $x=y=z$.

Clasa a XI-a

1. *Să se determine toate funcţiile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue în $x = \dfrac{1}{2}$ şi care au proprietatea*

$$f(x) = f\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{1-x}}\right), \quad \forall\, x \in [0,1],$$

unde $k \geq 2$ este un număr natural fixat.

(*Sever Pop*)

Soluţie. Fie $x_0 \in [0,1]$ arbitrar. Atunci avem:

$$f\left(\frac{\sqrt[k]{x_0}}{\sqrt[k]{x_0} + \sqrt[k]{1-x_0}}\right) \overset{not}{=} f(x_1)$$
$$= f\left(\frac{\sqrt[k]{x_1}}{\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{1-x_1}}\right) \overset{not}{=} f(x_2) = f(x_3) = \cdots = f(x_n) = \ldots,$$

unde şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică relaţia $x_{n+1} = \dfrac{\sqrt[k]{x_n}}{\sqrt[k]{x_n} + \sqrt[k]{1-x_n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Dacă $x_0 = 0$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ converge constant la 0.

Dacă $x_0 = 1$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ converge constant la 1.

Dacă $x_0 \in (0,1)$, atunci $x_n \in (0,1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (inducţie) şi din recurenţă obţinem:

$$\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \sqrt[k]{\frac{1}{x_n} - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} - 1 = \sqrt[k]{\frac{1}{x_n} - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} - 1 = \left(\frac{1}{x_n} - 1\right)^{\frac{1}{k}}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Aşadar,

$$\frac{1}{x_n} - 1 = \left(\frac{1}{x_{n-1}} - 1\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{x_{n-2}} - 1\right)^{\frac{1}{k^2}} = \cdots = \left(\frac{1}{x_0} - 1\right)^{\frac{1}{k^n}}. \qquad (1)$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{x_0} - 1\right)^{\frac{1}{k^n}} = 1$, din (1) deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{x_n} - 1\right) = 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$. Cum f e continuă în $x = \dfrac{1}{2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$ $f(x_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Cum $x_0 \in (0,1)$ este arbitrar, deducem că $f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $\forall\, x \in (0,1)$.

În concluzie, funcţiile care verifică relaţia din enunţ sunt date de legea

$$f(x)\begin{cases} c_1, & x=0 \\ c_2, & x\in(0,1) \\ c_3, & x=1, \end{cases}$$

unde c_1, c_2, c_3 sunt constante reale arbitrare.

2. *Fie $p\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel:*

$$x_0>0 \quad \text{şi} \quad x_n+\frac{1}{\sqrt[p]{x_n}}=\frac{1}{\sqrt[p]{x_{n+1}}},\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^p\cdot x_n^{p+1}$.

(*Gheorghe Râmbu*)

Soluţie. Prin inducţie matematică, rezultă că $x_n>0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Deoarece

$$\frac{1}{\sqrt[p]{x_{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt[p]{x_n}}=x_n>0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[p]{x_{n+1}}}>\frac{1}{\sqrt[p]{x_n}}\Rightarrow x_{n+1}<x_n,\ \forall\, n\in\mathbb{N},$$

deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător. Aşadar, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi fie $l=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in[0,\infty)$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, se obţine:

$$l\cdot\sqrt[p]{l^2}+\sqrt[p]{l}=\sqrt[p]{l}\Leftrightarrow l=0.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\sqrt[p]{x_n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{\sqrt[p]{x_n^{p+1}}}} \overset{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{\sqrt[p]{x_{n+1}^{p+1}}}-\frac{1}{\sqrt[p]{x_n^{p+1}}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(x_n+\frac{1}{\sqrt[p]{x_n}}\right)^{p+1}-\left(\frac{1}{\sqrt[p]{x_n}}\right)^{p+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_{p+1}^k\cdot x_n^{p+1-k}\cdot x_n^{-\frac{k}{p}}+C_{p+1}^p}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_{p+1}^k x_n^{(p+1)\left(1-\frac{k}{p}\right)}+p+1}=\frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

În final rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} n^p\cdot x_n^{p+1}=\frac{1}{(p+1)^p}.$$

3. *Să se determine funcţia continuă $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ pentru care*

$$f(x) \cdot f(x^2) \cdot f(x^4) = x^7 \cdot e^{x^8 - x}, \quad \forall\, x > 0.$$

(În legătură cu problema 25690, G. M. 12/2006)
(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Logaritmând, obţinem relaţia:

$$\ln f(x) + \ln f(x^2) + \ln f(x^4) = 7 \ln x + x^8 - x, \quad \forall\, x > 0. \tag{1}$$

Dacă notăm $g(x) = \ln f(x) - x^2 + x - \ln x$, relaţia (1) devine

$$g(x) + g(x^2) + g(x^4) = 0, \quad \forall\, x > 0, \tag{2}$$

de unde pentru $x := x^2$ obţinem $g(x^2)+g(x^4)+g(x^8) = 0$. Atunci $g(x) = g(x^8)$, $\forall\, x > 0$. Prin inducţie se deduce: $g(x) = g(x^{8^n})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deci $g(x) = g(x^{8^n})$. Atunci $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x^{8^n}) = g(1) = 0$ (din (2)). Obţinem $f(x) = xe^{x^2 - x}$.

4. *Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(AB - BA) \neq 0$ şi $\sin^2\alpha \cdot A^2 + B^2 = \cos\alpha(AB - BA)$, $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, atunci $n \cdot \alpha \in \pi \cdot \mathbb{Z}$.*

(*Nicolae Muşuroia, Ion Savu*)

Soluţie. $(\sin\alpha A + iB)(\sin\alpha A - iB) + i \sin\alpha(AB - BA) = \cos\alpha(AB - BA)$
$(\sin\alpha A + iB)(\sin\alpha A - iB) = (\cos\alpha - i\sin\alpha)(AB - BA)$
Trecând la determinanţi obţinem:

$$\cos n\alpha - i \sin n\alpha = \frac{d \cdot \overline{d}}{\det(AB - BA)} \in \mathbb{R}, \quad d = \det(\sin\alpha A + iB).$$

Obţinem $\sin n\alpha = 0 \Rightarrow n\alpha = k\pi \in \pi\mathbb{Z}$.

5. *Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi care satisfac simultan condiţiile:*
a) $f(x + y) - x \cdot y \geq f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
b) $f(x) \geq 1 - \cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Pentru $x = y = 0 \overset{a),b)}{\Rightarrow} f(0) = 0$.

$$\text{Pentru } \; y = -x \overset{a)}{\Rightarrow} x^2 \geq f(x) + f(-x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Din a), pentru $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ avem:

$$f(x+y+z) \geq f(x) + f(y+z) + x(y+z) \geq f(x) + f(y) + f(z) + xy + xz + yz.$$

Prin inducţie matematică,

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i \cdot x_j,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \overline{1, n}$.

Atunci,

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}\right) &\geq nf\left(\frac{x}{n}\right) + C_n^2 \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} \\ &\geq n\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Trecând la limită în relaţia precedentă ($n \to \infty$), obţinem:

$$f(x) \geq \frac{x^2}{2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Atunci $f(x)+f(-x) \geq \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{2} = x^2$ şi folosind (1) găsim că $f(x)+f(-x) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Utilizând (1) şi (2) obţinem că $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, funcţie ce verifică relaţiile din ipoteză.

6. *Se consideră* $\alpha \in [1, \infty)$ *şi şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *dat de* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *şi* $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 \cdot \alpha + a_{n-1}}$, $\forall\, n \geq 1$. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *şi să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+10}}{a_n}$.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Avem că $a_2 = \sqrt{\alpha a_1^2 + a_0} = \sqrt{\alpha} \geq 1$. Prin inducţie $a_n \geq 1$, $\forall\, n \geq 1$. Cum $a_{n+1} > \sqrt{\alpha \cdot a_n^2} \Rightarrow a_{n+1} - a_n > a_n(\sqrt{\alpha} - 1) \geq 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Presupunând că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ $(L > 0)$, obţinem: $L = \sqrt{L^2 \cdot \alpha + L} \overset{L\geq 0}{\Leftrightarrow} L^2 = \alpha L^2 + L \Leftrightarrow L(\alpha L + 1 - L) = 0$, fals. Aşadar $L = +\infty$.

Cum $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\alpha + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \dfrac{1}{a_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\alpha}$, deducem că

$$\frac{a_{n+10}}{a_n} = \frac{a_{n+10}}{a_{n+9}} \cdot \frac{a_{n+9}}{a_{n+8}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\alpha}^{10} = \alpha^5.$$

7. *Fie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{p-1} x_n (2^{-x_n} + 3^{-x_n} + \cdots + p^{-x_n})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.*

(Generalizarea problemei 21056 din G. M. 3/1987)
(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Se verifică faptul că $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Din $x_n > 0$ şi $k^{-x_k} < 1$, $k = \overline{2, p}$ obţinem că $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

Prin urmare, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \geq 0$. Trecând la limită în relaţia dată, rezultă:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{p-1} l (2^{-l} + 3^{-l} + \cdots + p^{-l}) \\ &\Leftrightarrow l\Big[(1-2^{-l}) + (1-3^{-l}) + \cdots + (1-p^{-l}\Big] = 0 \Leftrightarrow l = 0. \end{aligned}$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}$. Suntem în condiţiile teoremei Stolz-Cesaro. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot g(x_n)}{x_n - g(x_n)},$$

unde $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{p-1} x (2^{-x} + 3^{-x} + \cdots + p^{-x})$.

Cum

$$g'(x) = \frac{1}{p-1}\Big[(2^{-x} + 3^{-x} + \cdots + p^{-x}) - x(2^{-x}\ln 2 + 3^{-x}\ln 3 + \cdots + p^{-x}\ln p\Big],$$

iar

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{2}{p-1}\left(-2^{-x}\ln 2 - 3^{-x}\ln 3 - \ldots - p^{-x}\ln p\right) \\ &+ \frac{1}{p-1} x \left(2^{-x}\ln^2 2 + 3^{-x}\ln^2 3 + \ldots + p^{-x}\ln^2 p\right), \end{aligned}$$

obţinem $g'(0) = 1$ şi $g''(0) = \dfrac{-2}{p-1}\ln(p!)$.
Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n g(x_n)}{x_n - g(x_n)} = \lim_{x\to 0}\frac{xg(x)}{x-g(x)} = \lim_{n\to 0}\frac{g(x)+xg'(x)}{1-g'(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2g'(x)+xg''(x)}{-g''(x)} = \frac{2g'(0)}{-g''(0)} = \frac{p-1}{\ln(p!)}.$$

În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \dfrac{p-1}{\ln(p!)}$.

Observaţie. Pentru $p = 2$, obţinem problema 21056, G. M. 3/1987, autor F. Dumitrel.

8. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 \in \mathbb{R}$, iar $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall\, n \geq 0$.*

a) Dacă există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x-y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, atunci demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

b) Dacă există $\alpha > 1$, astfel încât $|f(x) - f(y)| \geq \alpha|x-y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, iar $x_0 \in \mathbb{R}$ nu este punct fix al funcţiei f, atunci demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este divergent.

(*Florin Bojor*)

Soluţie. a) Avem că $|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \alpha|x_{n+1} - x_n|$, $\forall\, n \geq 0$ şi se demonstrează prin inducţie că $|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha^n|x_1 - x_0|$, $\forall\, n \geq 0$. Atunci, pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$, avem că

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$
$$\leq (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \cdots + \alpha^n)|x_1 - x_0| = \alpha^n\frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}|x_1 - x_0|.$$

Dar $\alpha \in (0,1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| = 0$, de unde rezultă că $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir Cauchy, deci convergent.

b) Presupunem că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, deci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Atunci ℓ este un punct fix al lui $f(f(\ell) = \ell)$. Atunci

$$|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \geq \alpha|x_n - \ell|,\ \forall\, n \geq 0.$$

Prin inducţie se demonstrează că $|x_n - \ell| \geq \alpha^n|x_0 - \ell| \neq 0$ şi, prin trecere la limită, se obţine o contradicţie.

9. *Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n}{a_n + 1}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - n)$.*

(*Florin Bojor*)

Soluţie. Cum $a_1 \in (0,1)$ şi $a_2 = \dfrac{a_1^2 + 2a_1}{1 + a_1} > 0$, prin inducţie $a_n > 0$, $\forall\, n \geq 1$. Deoarece $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n}{1 + a_n} \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci $(\exists)$ $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Presupunând că $L \in \mathbb{R}$, vom obţine $L = \dfrac{L^2 + 2L}{1 + L} \Leftrightarrow L = 0$, contradicţie ($a_n > 0$, iar şirul este strict crescător).
Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \overset{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} = 1.$$

Fie şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = a_n - n$. Cum $b_1 = a_1 - 1 < 0$ şi

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n - 1 = \frac{a_n}{1 + a_n} - 1 = \frac{-1}{1 + a_n} < 0,$$

va rezulta că există $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \in (-\infty, a_1 - 1 \cup \{-\infty\}$.

Relaţia $b_2 < 0 \Leftrightarrow a_2 - 2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1^2 + 2a_1}{1 + a_1} < 2 \Leftrightarrow a_1^2 < 2$ este adevărată căci $a_1 \in (0,1)$. Aşadar $b_2 < 0$, $b_1 < 0$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, de unde $b_n < 0$, $\forall\, n \geq 1$, adică

$$a_n < n, \quad \forall\, n \geq 1. \tag{1}$$

Deoarece $a_n = 1 + a_{n-1} - \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$, $\forall\, n \geq 2$, însumând aceste relaţii pentru $n \in \overline{2,p}$, obţinem că

$$a_p = p - 1 + a_1 - \left(\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \cdots + \frac{1}{1 + a_{p-1}}\right), \quad \forall\, p \geq 2.$$

Atunci $b_n = a_n - n = -1 + a_1 - c_n$, unde $c_n = \dfrac{1}{1 + a_1} + \dfrac{1}{1 + a_2} + \cdots + \dfrac{1}{1 + a}$, $n \geq 2$.
Folosind (1), deducem că $c_n > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \geq 2$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$, deci

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(-1 + a_1 - c_n) = -\infty.$$

10. *Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul k şi $m,n,p,q \in \mathbb{R}^*$, cu $m,n,p \neq q$. Să se arate că dacă au loc relaţiile*

$$mA^2 + nB^2 = O_k \quad \text{şi} \quad pAB + qBA = I_k,$$

atunci matricele A şi B comută.

(*Marin Bancoş*, Universitatea de Nord Baia Mare)

Soluţie. Să observăm că:

$$mA^2 + nB^2 = O_k \Leftrightarrow nB^2 = -mA^2 | : n(\neq 0) \Leftrightarrow B^2 = -\frac{m}{n} A^2.$$

Prin înmulţirea acestei relaţii la dreapta, respectiv la stânga, cu B, şi respectiv cu B^2, oţinem:

$$B^3 = -\frac{m}{n} A^2 B = -\frac{m}{n} BA^2 \overset{(-\frac{m}{n})\neq 0}{\Rightarrow} A^2B = BA^2 \tag{1}$$

$$B^4 = -\frac{m}{n} A^2 B^2 = -\frac{m}{n} B^2 A^2 \overset{(-\frac{m}{n})\neq 0}{\Rightarrow} A^2B^2 = B^2A^2. \tag{2}$$

Folosind relaţia $pAB+qBA = I_k$, prin înmulţire la stânga, respectiv la dreapta, cu A, se obţine:

$$pA^2B + qABA = A \tag{3}$$

$$pABA + qBA^2 = A. \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) obţinem:

$$A = pA^2B + qABA = pABA + qBA^2 \overset{BA^2 \overset{(1)}{=} A^2B}{\Rightarrow} (p-q)A^2B$$
$$= (p-q)ABA | : (p-q) \neq 0 \Rightarrow A^2B = ABA.$$

Ţinând cont din nou de relaţia (1), avem că:

$$ABA = A^2B = BA^2. \tag{5}$$

În aceste condiţii relaţia (3) devine:

$$pA^2B + qABA = A \overset{(5)}{\Rightarrow} pA^2B + qA^2B = A \Leftrightarrow (p+q)A^2B$$
$$= A \overset{|\cdot B(la\ dreapta)}{\Rightarrow} (p+q)A^2B^2 = AB \tag{6}$$

În mod asemănător, relaţia (4) devine:

$$pABA + qBA^2 = A \overset{(5)}{\Rightarrow} pBA^2 + qBA^2 = A \Leftrightarrow (p+q)BA^2$$
$$= A \overset{|\cdot B(la\ stânga)}{\Rightarrow} (p+q)B^2A^2 = BA. \tag{7}$$

Folosind acum relaţia (2):

$$A^2B^2 = B^2A^2 \Rightarrow (p+q)A^2B^2 = (p+q)B^2A^2 \overset{(6)+(7)}{\Rightarrow} AB = BA.$$

Aşadar matricile A şi B comută.
Cum $p+q \neq 0$ şi $pAB + qBA = I_k$, se observă aşadar că:

$$AB = BA = \frac{1}{p+q} I_k.$$

11. *Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât* $\det(X) = 1$. *Să se arate că dacă notăm $a_n = Tr(X^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci*

$$a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1}^2 = a_1^2 - 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Din relaţia lui Cayley-Hamilton, rezultă că:

$$X^2 - a_1X + I_2 = O \Leftrightarrow X^2 = a_1X - I_2 \tag{1}$$

Atunci $Tr(X^2) = Tr(a_1X) - Tr(I_2) = a_1^2 - 2$.
Din ipoteză, $\det(X^n) = 1$ şi $Tr(X^n) = a_n$, deci

$$X^{2n} - a_nX^n + I_2 = O_2. \tag{2}$$

Atunci $Tr(X^{2n}) = Tr(a_nX^n) - Tr(I_2) = a_n^2 - 2$, deci

$$a_{2n} = a_n^2 - 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Din relaţia (1) avem că $X^{n+2} = a_1X^{n+1} - X^n$, deci

$$Tr(X^{n+2}) = Tr(a_1X^{n+1} - X^n)$$

sau $a_{n+2} = a_1 \cdot a_{n+1} - a_n$.
Din relaţia (2) deducem că $X^{2n+2} - a_nX^{n+2} + X^2 = O_2$, deci

$$Tr(X^{2n+2}) = Tr(a_nX^{n+2} - X^2)$$

sau $a_{2n+2} = a_n \cdot a_{n+2} - a_2$. Din această relaţie şi din (3) găsim că:

$$a_{n+1}^2 - 2 = a_n \cdot a_{n+2} - (a_1^2 - 2) \Leftrightarrow a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1}^2 = a_1^2 - 4.$$

12. *Se consideră $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât*

$$\det(X) = -1 \quad \text{şi} \quad Tr(X + X^3 + X^5) = 0.$$

Să se arate că $X^2 = I_2$.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Notând cu α urma matricei X, avem:

$$X^2 - \alpha X - I_2 = O_2 \Leftrightarrow X^2 = \alpha X + I_2.$$

Atunci $X^3 = \alpha X^2 + X$ şi

$$\begin{aligned} X^5 &= \alpha X^4 + X^3 = \alpha(\alpha X + I_2)^2 + X^3 = \alpha^3 X^2 + 2\alpha^2 X + \alpha I_2 + X^3 \\ &= (\alpha^3 + \alpha)X^2 + (2\alpha^2 + 1)X + \alpha I_2. \end{aligned}$$

Aşadar,

$$\begin{aligned} 0 &= Tr(X + X^3 + X^5) = Tr(X) + Tr(X^3) + Tr(X^5) \\ &= \alpha + \alpha(\alpha^2 + 2) + \alpha + (\alpha^3 + \alpha)(\alpha^2 + 2) + (2\alpha^2 + 1)\alpha + 2\alpha \\ &= \alpha(2 + \alpha^2 + 2 + (\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 2) + 2\alpha^2 + 3) \\ &= \alpha\left[(\alpha^2 + 2)(\alpha^2 + 2) + 2\alpha^2 + 5\right] \\ &= \alpha\left[(\alpha^2 + 2)^2 + 2(\alpha^2 + 2) + 1\right] = \alpha(\alpha^2 + 3)^2, \end{aligned}$$

de unde $\alpha \in \{0; \pm i\sqrt{3}\}$. Cum $\alpha \in \mathbb{R}$, deducem că $\alpha = 0$, deci $X^2 = I_2$.

13. *Fie* $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *astfel încât*

$$(ABC - 2BCA + CAB)^2 = (ABC)^2 - 2(BCA)^2 + (CAB)^2.$$

Să se arate că:

a) $Tr((ABC)^n) = Tr((BCA)^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $(ABC - 2BCA + CAB)^2 = O_2$;

c) Dacă $Tr(ABC) \neq 0$, *atunci* $ABC + CAB = 2BCA$.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. a) Pentru $n = 1$, $tr(ABC) = tr(A(BC)) = tr(BC)A)$.

Pentru $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} tr((ABC)^n) &= tr(A\underbrace{(BCA)^{n-1}BC}_{M}) = tr(MA) = tr((BCA)^{n-1} \cdot BCA) \\ &= tr((BCA)^n). \end{aligned}$$

b) Fie $X \stackrel{not}{=} ABC - 2BCA + CAB$.

Relaţia Cayley-Hamilton: $X^2 - tr(X)X + det(X)I_2 = O_2$, dar

$$\begin{aligned} tr(X) &= tr(ABC) - 2tr(BCA) + tr(CAB) = 0 \Rightarrow X^2 = -\det(X)I_2 \\ &\Rightarrow tr(X^2) = -2\det(X) \qquad (1) \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} tr(X^2) &\overset{ip}{=} tr((ABC)^2 - 2(BCA)^2 + (CAB)^2) \\ &= tr((ABC)^2) - 2tr((BCA)^2) + tr((CAB)^2) = 0 \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} \det(X) = 0 \Rightarrow X^2 = O_2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} &(ABC)^2 = tr(ABC)ABC - \det(ABC)I_2 \\ &(BCA)^2 = t \cdot BCA - \det(BCA)I_2 \qquad (*) \\ &(CAB)^2 = t \cdot CAB - \det(CAB)I_2, \text{ unde } t = tr(ABC). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_2 = X^2 &\overset{(*)}{=} t\,ABC - \det(ABC)I_2 - 2t\,BCA + 2\det(ABC)I_2 \\ &+ t\,CAB - det(ABC)I_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$O_2 = t(ABC - 2BCA + CAB) = t \cdot X \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} X = O_2 \Rightarrow ABC + CAB = 2BCA.$$

14. *Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile de două ori, astfel încât să aibă loc egalitatea $f \cdot f'' = (f^2)' - (f')^2$.*

(*Cristian Heuberger*)

Soluţie. Evident, toate funcţiile constante sunt soluţii ale problemei. Vom căuta în continuare şi alte soluţii. Au loc echivalenţele:

$$f \cdot f'' = (f^2)' - (f')^2 \Leftrightarrow (f^2)' = (f')^2 + f \cdot f'' \Leftrightarrow (f^2)' = (f \cdot f')' \Leftrightarrow (f^2)' = \left(\frac{1}{2} f^2\right)''.$$

Rezultă că există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f^2(x) = \left(\frac{1}{2} f^2\right)'(x) + \beta$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Prin înmulţire cu $-2e^{-2x}$ obţinem

$$-2e^{-2x} \cdot f^2(x) + e^{-2x}(f^2)'(x) = -2\beta \cdot e^{-2x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

sau altfel $(e^{-2x} \cdot f^2(x))' = (\beta \cdot e^{-2x})'$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Rezultă că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $e^{-2x} \cdot f^2(x) = \alpha + \beta \cdot e^{-2x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Obţinem imediat $f^2(x) = \alpha \cdot e^{2x} + \beta$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Deoarece f nu este funcţie constantă, iar $f^2(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deducem imediat, prin trecere la limită către $+\infty$ şi apoi către $-\infty$, că $\alpha > 0$ şi $\beta \geq 0$. În aceste condiţii avem $\alpha \cdot e^{2x} + \beta > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ şi deci $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Funcţia f fiind continuă, rezultă $f(x) = \sqrt{\alpha \cdot e^{2x} + \beta}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, sau $f(x) = -\sqrt{\alpha \cdot e^{2x} + \beta}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

15. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ care au exact câte n elemente egale cu fiecare din numerele $1, 2, 3, \ldots, n$.*

a) Să se arate că, pentru orice $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, există $X \in \mathcal{M}$, cu rang $X = r$.

b) Pentru $n = 5$, să se determine $A, B \in \mathcal{M}$, astfel încât $A + B$ să fie ireversibilă.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. Pentru $r = \overline{1, n}$, matricea

$$X_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r-2 & r-1 & r \\ 2 & 3 & \ldots & r-1 & r & 1 \\ 3 & 4 & \ldots & r & 1 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r-1 & r & \ldots & r-4 & r-3 & r-2 \\ r & 1 & \ldots & r-3 & r-2 & r-1 \end{pmatrix}$$

este inversabilă.

Pentru $r = n$, alegem $X = X_n$.

Pentru $r = \overline{1, n-1}$, alegem $X = \begin{pmatrix} X_r & A_r \\ B_r & C_r \end{pmatrix}$, unde

$$A_r = \begin{pmatrix} r+1 & r+2 & \ldots & n \\ r+1 & r+2 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r+1 & r+2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{N}),$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r-2 & r-1 & r \\ 1 & 2 & \ldots & r-2 & r-1 & r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & \ldots & r-2 & r-1 & r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{N}),$$

$$C_r = \begin{pmatrix} r+1 & r+2 & \ldots & n \\ r+1 & r+2 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r+1 & r+2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-r, n-r}(\mathbb{N}).$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ verifică enunţul.

Clasa a XII-a

1. *Se consideră funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *care verifică proprietăţile:*
i) $f(0)=0$;
ii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
a) Să se determine $f|_{\mathbb{Q}}$, *restricţia lui* f *la mulţimea numerelor raţionale* $\mathbb{Q}$.
b) Să se descrie funcţia f.

(*Adela Baciu* (*elevă*) *şi prof. Costel Chiteş*, Bucureşti)

Soluţie. a) Se consideră grupul $(\mathbb{R},+)$ şi subgrupul propriu $(\mathbb{Q},+)$. Se aplică următorul rezultat:

Proprietate. Dacă $(G,\cdot)$ este un grup şi H este un subgrup al grupului G, iar $f:G\to G$ este o funcţie ce verifică proprietăţile:
i) $f(1)=1$; ii) $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall\, x,y\in G\backslash H$,
atunci $f\in End(G)$.

În cazul nostru, $G=\mathbb{R}$, $H=\mathbb{Q}$, deci $f\in End(\mathbb{R})$, adică f verifică ecuaţia funcţională a lui Cauchy, deci $(\exists)\, k\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)=k\cdot x$, $\forall\, x\in\mathbb{Q}$.

b) Fie $B=(e_i)_{i\in I}$ o bază Hamel a spaţiului vectorial $\mathbb{R}$ peste $\mathbb{Q}$ (vezi de exemplu, Vasile Pop, Ecuaţii funcţionale, editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2002). Atunci avem că $|I|=C$. Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, există $q_1,q_2,\ldots,q_n\in\mathbb{Q}$ şi există $e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_n}\in B$ astfel încât $x=\sum\limits_{k=1}^{n} q_k\cdot e_{i_k}$.
Cum $f\in End(\mathbb{R})$, va rezulta că $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} q_k\cdot f(e_{i_k})$.

2. *Să se calculeze următoarea limită*

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n+1}+\sqrt[n]{n+2}+\cdots+\sqrt[n]{n+n})-n\sqrt[n]{n}.$$

(*Sever Pop*)

Soluţie. Avem:

$$\begin{aligned}
L &\overset{not}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}+\sqrt[n]{n+2}+\cdots+\sqrt[n]{n+n}-n\cdot\sqrt[n]{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[n]{1+\frac{n}{n}}-n\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}-1\right).
\end{aligned}$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, rezultă că $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât din $|x|<\delta(\varepsilon)$, $x\neq 0$, să rezulte că $\left|\dfrac{e^x-1}{x}-1\right|<\varepsilon$, adică $1-\varepsilon<\dfrac{e^x-1}{x}<1+\varepsilon$.

Pentru fiecare $k\in\overline{1,n}$ avem că

$$x_k\overset{not}{=}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\le\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\le\frac{1}{n}<\delta(\varepsilon)$$

pentru orice $n>\left[\dfrac{1}{\delta(\varepsilon)}\right]+1=n(\varepsilon)$ (am folosit $\ln(1+x)\le x$, $x>0$).

Aşadar, pentru orice $k\in\overline{1,n}$ şi $\forall\,n>n(\varepsilon)$, avem:

$$1-\varepsilon<\frac{e^{x_k}-1}{x_k}<1+\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow(1-\varepsilon)\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}-1<(1+\varepsilon)\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

deci

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}-1\right)<(1+\varepsilon)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Dacă facem $n\to\infty$, se obţine:

$$(1-\varepsilon)\int_2^1\ln(1+x)dx\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}-1\right)\le(1+\varepsilon)\int_0^1\ln(1+x)dx.$$

Cum $\varepsilon>0$ a fost ales arbitrar, putem face $\varepsilon\to 0$ şi rezultă:

$$L=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1.$$

3. *Se consideră $a>0$ şi funcţia $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ de n ori derivabilă, $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$. Să se arate că, pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ are loc inegalitatea*

$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2\le\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2}\int_0^a(f^{(k)}(x))^2dx.$$

(*Gheorghe Râmbu*)

Soluţie. $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\underbrace{xf(x)\Big|_0^a}_{=0}-\int_0^a xf'(x)dx=\frac{(-1)^1}{1\,!}\int_0^a x^1f^{(1)}(x)dx.$

Prin inducţie matematică rezultă:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^a x^k(x)dx, \quad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Atunci, aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakovski, obţinem:

$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2 = \frac{1}{(k\,!)^2}\left(\int_0^a x^k f^{(k)}(x)dx\right)^2 \underset{CB}{\leq} \frac{1}{(k\,!)^2}\int_0^a x^{2k}dx\int_0^a (f^{(k)}(x))^2dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^a f(x)dx\right)^2 \leq \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k\,!)^2}\int_0^a (f^{(k)}(x))^2dx, \quad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

4. *Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$, polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ şi $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_p)$, $x_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \overline{0,p}$ o diviziune a intervalului $[0,n]$, unde $p \in \mathbb{N}^*$. Considerăm punctele $A_k(x_k, f(x_k))$, $k \in \overline{0,p}$. Dacă lungimile segmentelor $[A_kA_{k+1}]$, $k \in \overline{0,p-1}$ sunt numere raţionale, atunci calculaţi în funcţie de n suma lungimilor acestor segmente.*

(*Ludovic Longaver,* Liceul "Németh László")

Soluţie. Cum $f \in \mathbb{Z}[X]$, $x_k \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{0,p} \Rightarrow (x_{k+1} - x_k)\,|\,(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Rightarrow f(x_{k+1}) - f(x_k) = m_k(x_{k+1} - x_k)$, $m_k \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{0,p-1}$.

$$A_kA_{k+1} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

$$= \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + m_k^2(x_{k+1} - x_k)^2} = (x_{k+1} - x_k)\sqrt{1 + m_k^2}, \quad k = \overline{0,p-1}.$$

Deducem că $\sqrt{1 + m_k^2} = q_k \in \mathbb{Z} \Rightarrow q_k^2 - m_k^2 = 1 \Rightarrow m_k = 0$, $k = \overline{0,p-1}$

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_kA_{k+1} = \sum_{k=0}^{p-1}(x_{k+1} - x_k) = x_p - x_0 = n.$$

Interpretare geometrică. Segmentele $[A_kA_{k+1}]$ sunt paralele cu axa Ox şi $x_0 = 0$, $x_p = n$.

5. *Să se arate că, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $f(\operatorname{arctg} x) > x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, atunci funcţia f nu are primitive pe $\mathbb{R}$.*

(*Nicolae Muşuroia, Ion Savu*)

Soluţie. Presupunem contrariul: $(\exists)\, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivă pentru f. Atunci din ipoteză rezultă: $(F(\operatorname{arctg} x))' > \dfrac{x}{x^2+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, adică

$$\left[F(\operatorname{arctg} x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]' > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(\operatorname{arctg} x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ este strict crescătoare. Dar $g(0) = F(0)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$. Deci este contradicţie.

6. *Să se arate că, dacă funcţia* $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *verifică relaţia*

$$(f \circ f)(x) = f(x) - e^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

atunci funcţia f *nu are primitive pe* $\mathbb{R}$.

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie. Presupunem contrariul: f are primitive $\Rightarrow$ f are proprietatea lui Darboux. Cum din ipoteză rezultă că funcţia f este injectivă, deducem că f este strict monotonă.

Cazul 1. f strict descrescătoare.

În relaţia $(f \circ f)(x) + e^x = f(x)$, membrul stâng este o funcţie strict crescătoare, iar membrul drept strict descrescătoare, deci contradicţie.

Cazul 2. f strict crescătoare.

Atunci $(f\circ f\circ f)(x) = (f\circ f)(x) - e^{f(x)} = f(x) - e^x - e^{f(x)} < 0$, deoarece $y - e^y < 0$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$. Ajungem din nou la contradicţie cu faptul că funcţia f este pozitivă.

7. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n \frac{1}{(x^2-x+1)(x^n+1)}\,dx.$

(*Nicolae Muşuroia*)

Soluţie.

$$In = \int_0^{1/n} \frac{1}{(x^2-x+1)(x^n+1)}\,dx + \int_{1/n}^{n} \frac{1}{(x^2-x+1)(x^n+1)}\,dx = a_n + b_n.$$

Din teorema de medie, există $c_n \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ astfel încât

$$a_n = \int_0^{1/n} \frac{1}{(x^2-x+1)(x^n+1)}\,dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(c_n^2 - c_n + 1)(c_n^n+1)}\,,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Cu schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$, obţinem:

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{1/n}^{n} \frac{1}{(x^2-x+1)(x^n+1)}\,dx = \int_{1/n}^{n} \frac{t^n}{(t^2-t+1)(t^n+1)}\,dt \\ &= \int_{1/n}^{n} \frac{1}{(t^2-t+1)}\,dt - b_n, \end{aligned}$$

adică

$$2\,bn = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2n-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

8. *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel comutativ cu cel puţin două elemente, astfel încât pentru orice $x \in A$, x este inversabil dacă şi numai dacă $1-x$ este neinversabil. (Un astfel de inel se numeşte inel local).*

Notăm cu I mulţimea elementelor inversabile şi cu N mulţimea elementelor neinversabile ale inelului. Definim legea de compoziţie: $x * y = 1 + x + y$, $\forall\, x, y \in A$. Să se demonstreze că $(N,+)$ şi $(I,*)$ sunt grupuri izomorfe.

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. Fie $x, y \in \mathbb{N}$. Din ipoteză, există $u, v \in N$ astfel încât $1-x$ şi $1-y$ au respectiv inversul $1-u$, $1-v$.

Din $(1-x)(1-u) = (1-u)(1-x) = 1$ deducem $xu = x + u = ux$ şi $yv = y + v = vy$. Făcând calculele, obţinem

$$(x+y-1)(u-1)(1-v) = 1 - uv.$$

Cum $u-1$, $1-v$ şi $1-uv$ sunt inversabile, deducem că $1-(x+y) \in I$, deci $x + y \in N$. Deoarece $\forall\, x \in N$, avem şi $-x \in N$, rezultă că $(N,+)$ este un subgrup al grupului $(A,+)$.

Fie $x, y \in I$. Din ipoteză rezultă $1+x$, $1-y \in N$ şi deoarece $(N,+)$ este un grup, obţinem $(1+x)-(1-y) = x+y \in N$. Folosind din nou ipoteza, avem că $1+x+y \in I$. Aşadar, " $*$ " este lege de compoziţie pe I.
Se verifică uşor faptul că $(I,*)$ este un grup, iar izomorfismul căutat este funcţia $f : I \to N$, $f(x) = x + 1$.

9. *Fie $(A,+,\cdot)$ un inel comutativ, astfel încât $\forall\, x, y \in N \Rightarrow x + y \in N$, unde N reprezintă mulţimea elementelor neinversabile ale inelului. Notăm cu I mulţimea elementelor inversabile ale inelului. Pentru $y \in N$, considerăm* *funcţiile:* $f_y : A \to A$, $f_y(x) = x + y + xy$ *şi* $g_y : I \to I$, $g_y(x) = f_y(x)$. *Să se arate că funcţiile* f_y *şi* g_y *sunt bijective.*

(*Dana Heuberger*)

Soluţie. Observăm mai întâi că

$$\forall x \in I,\ \forall y \in N, \quad x + y \in I. \tag{1}$$

Într-adevăr, presupunem că $x + y \in N$. Cum $-y \in N$, din ipoteză rezultă că $x = (x + y) - y \in N$, fals.

Fie $x, z \in A$ astfel încât $f_y(x) = f_y(z)$. Obţinem $(x - z)(1 + y) = 0$ şi cum $1 + y \in I$, rezultă $x = z$, deci funcţia f_y este injectivă.

Pentru $a \in A$, căutăm $x \in A$ astfel încât $f_y(x) = a$. Obţinem $(x + 1)(y + 1) = a + 1$ şi cum $y + 1 \in I$, găsim $x = (a + 1)(y + 1)^{-1} - 1 \in A$, aşadar f_y este şi surjectivă. Să observăm acum că funcţia g_y este bine definită.

Într-adevăr, pentru orice $x \in I$, avem că $xy \in N$. Din afirmaţia (1) deducem că $x + y \in I$ şi apoi că $g_y(x) = x + y + xy \in I$.

Deoarece g_y este restricţia la mulţimea I a funcţiei f_y, ea este evident injectivă. Pentru a demonstra surjectivitatea, observăm că

$$f_y(N) \subseteq N \tag{2}$$

Într-adevăr, dacă $x, y \in N$, atunci, deoarece inelul e comutativ, rezultă că $xy \in N$. Din ipoteză deducem $x + y \in N$ şi apoi $f_y(x) = x + y + xy \in N$.

Fie $a \in I$. Deoarece f_y este surjectivă, există $x \in A$, astfel încât $f_y(x) = a$. Din afirmaţia (2) rezultă că $x \in I$, deci $g_y(x) = f_y(x) = a$, adică funcţia g_y este şi surjectivă.

10. *Să se calculeze limita şirului* $(x_n)_{n \geq 1}$, *unde*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + \sqrt[3]{k(k^2+1)(k^3+1)}}.$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Deoarece $k^6 < k(k^2 + 1)(k^3 + 1) < (k^2 + 1)^3$, avem că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2 + 1} < x_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

Cum

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

şi

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2+1} > \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+(k+1)^2} = a_n + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} - \frac{n}{n^2+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4},$$

conform teoremei cleştelui avem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{4}$.

11. *Pentru o funcţie* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *derivabilă şi cu derivata continuă, vom nota* $I_f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(x) - \cos x \cdot f(x)| dx$.

a) Să se dea un exemplu de funcţie f *nenulă pentru care* $I_f = 0$.

b) Să se arate că $I_f \geq \left|\frac{1}{e} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)\right|$.

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. a) Se verifică faptul că funcţia $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sin x}$ satisface relaţia $I_f = 0$.

b) Pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem că $\frac{1}{e} \leq e^{-\sin x} \leq 1$, deci

$$\begin{aligned} I_f &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(x) - \cos x f(x)| dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x} |f'(x) - \cos x f(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{-\sin x}(f'(x) - \cos x f(x))\right| dx \geq \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|(e^{-\sin x}(f'(x) - \cos x f(x)))\right|\right| \\ &\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-\sin x} f(x)\right)^1 dx\right| = \left|\left(e^{-\sin x} f(x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = \left|\frac{1}{e} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)\right|. \end{aligned}$$

12. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă cu proprietatea că, pentru orice numere naturale* $0 < m < n$*, prime între ele, avem* $0 \leq f\left(\frac{m}{n}\right) \leq \frac{1}{m}$.

Demonstraţi că, pentru orice $a, b \in (0,1)$*, cu* $a < b$*, există* $w \in [a,b]$ *astfel încât* $f(w) = 0$.

(*Cristinel Mortici*)

Soluţie. Fie p un număr prim. Avem:

$$0 \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}.$$

Deoarece $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}}{p} = 0$, pentru $p \to \infty$ în inegalităţile anterioare, obţinem că $0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 0$, deci $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Atunci, pentru orice $a, b \in (0,1)$, cu $a < b$, avem că $\int_a^b f(x)dx = 0$ căci $f \geq 0$. Presupunând acum că $f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, se obţine $f(x) > 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, deci $\int_a^b f(x)dx > 0$, contradicţie.

13. *Să se calculeze* $\int \frac{e^x(x-2)}{x\cdot e^x + x^3}dx,\ x > 0.$

(*Gheorghe Gherasin,* Liceul "Regele Ferdinand" Sighetu Marmaţiei)

Soluţie. Fie funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x(x-2)}{x\cdot e^x + x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3\left(\frac{e^x}{x^2}+1\right)}$.

Cum $\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$, avem că:

$$\int f(x)dx = \int \frac{\left(\frac{e^x}{x^2}\right)'}{\frac{e^x}{x^2}+1}dx = \ln\left(\frac{e^x}{x^2}+1\right) + \mathcal{C}.$$

14. *Să se arate că dacă* $a, b \in (0,\infty)\backslash\{1\}$, $a \cdot b = 1$ *şi* $c \in (0,\infty)$, *iar* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie impară, atunci*

$$\int_a^b \frac{f(\ln^{2k+1} x)}{(1+x^{2c})^{\frac{1}{c}}}dx = 0,\ \textit{unde}\ k \in \mathbb{N}.$$

(*D. M. Bătineţu-Giurgiu*)

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $\dfrac{1}{x} = t$, integrala de calculat devine

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{f\left(\ln^{2k+1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{\left(1+\frac{1}{t^{2c}}\right)^{\frac{1}{c}}} \cdot \frac{-1}{t^2}\, dt \overset{ip}{=} -\int_b^a \frac{f\left(-\ln^{2k+1} t\right)}{(1+t^{2c})^{\frac{1}{c}}}\, dt$$

$$= -\int_a^b \frac{f\left(\ln^{2k+1} t\right)}{(1+t^{2c})^{\frac{1}{c}}}\, dt = -I, \quad \text{deci } I = 0.$$

15. *Să se calculeze*

$$\int \frac{(x+\sin x \cdot \cos x)^2}{x^2-\cos^4 x}\, dx, \ \textit{unde } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right).$$

(*Gheorghe Boroica*)

Soluţie. Avem:

$$I = \int \frac{x^2+2x\sin x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x}{x^2-\cos^4 x}\, dx$$

$$= \int \left(1+\frac{2x\sin x\cos x+\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{x^2-\cos^4 x}\right) dx$$

$$= x + \int \frac{x\sin 2x+\cos^2 x}{x^2-\cos^4 x}\, dx = x + \int \frac{x\sin 2x+\cos^2 x}{\cos^4 x\left(\frac{x^2}{\cos^4 x}-1\right)}\, dx.$$

Cum $\left(\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + x\sin 2x}{\cos^4 x}$, rezultă că

$$I = x + \int \frac{\left(\frac{x}{\cos^2 x}\right)'}{\left(\frac{x}{\cos^2 x}\right)' - 1}\, dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-1}{\frac{x}{\cos^2 x}+1}\right| + \mathcal{C}$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-\cos^2 x}{x+\cos^2 x}\right) + \mathcal{C} = F(x) + \mathcal{C}.$$

Observaţie. Deşi prin calcul se impune condiţia $\cos x \neq 0$, funcţia $F(x)$ e primitivă pentru funcţia de integrat pe $\left[\dfrac{\pi}{2}, \infty\right)$.

Probleme propuse

Clasa a IX-a

1. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, care verifică ecuaţia
$$2^n + 3^n = 11n^2.$$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia
$$x^2(1 - [x]) = 1 + \{x\}.$$

Gheorghe Gherasin, Sighetu Marmaţiei

3. Notăm cu l_a, l_b, l_c lungimile bisectoarelor interioare unui triunghi ABC, notaţiile r, R, p fiind cele uzuale.

Să se arate că:
$$\frac{2rp^2}{R} \leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Ludovic Longaver

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < a^2 + c^2$, $c^2 < b^2 + a^2$.

Să se arate că sistemul
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + |xy| = a^2 \\ y^2 + z^2 + |yz| = b^2 \\ z^2 + x^2 + |zx| = c^2 \end{cases}$$
este compatibil.

Ludovic Longaver

5. Să se determine
$$\min\left\{n \in \mathbb{N} / \frac{1}{100} < \{\sqrt{n}\} < \frac{1}{10}\right\},$$
unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Dorin Mărghidanu, Corabia

6. Dacă $0 \leq a_k \leq k$, $(\forall)\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n + (1 - a_1)(2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (n - a_n) < n!$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

7. Să se demonstreze că:

$$\sum_{k=1}^{2n(n+1)} \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+1}} < n < \sum_{k=1}^{2n(n+1)} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k}}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

8. Dacă $x, y, z, t > 0$, atunci:

$$(x + y + z + t)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) \geq \left(\frac{x+y}{\sqrt{xy}} + \frac{z+t}{\sqrt{zt}}\right)^2 \geq 16.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

9. Dacă $a, b, m, n \in \mathbb{R}_+^*$, atunci:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{\sqrt{(ma+nb)(mb+na)}}{m+n} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

10. Să se arate că dacă $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi

$$x^2 + \sqrt{a^{2^n} + b^{2^n}} \cdot x + 1 \geq 0, \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R},$$

atunci $x^2 + \sqrt{a^{2^k} + b^{2^k}} \cdot x + 1 \geq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Nicolae Muşuroia

11. Se consideră triunghiul ABC, în care

$$\max\left\{\frac{IA^2}{bc}, \frac{IB^2}{ac}, \frac{IC^2}{ab}\right\} = \frac{1}{3},$$

unde I reprezintă centrul cercului înscris.

Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

Nicolae Muşuroia

12. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $a + b + c = abc$, atunci:

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq 64.$$

Nicolae Muşuroia

13. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M, Q \in (AB)$, $N, P \in (AC)$, astfel încât

$$\frac{MB}{MA} = \frac{QA}{QB} = \frac{PA}{PC} = \frac{NC}{NA} = k \in (0, 1).$$

Fie $\{T\} = MP \cap NQ$ şi G centrul de greutate al triunghiului.
$a)$ Să se demonstreze că G, T, A sunt coliniare.
$b)$ Să se demonstreze că $T \in (AG)$.
$c)$ Să se arate că

$$AT + BT + CT > \frac{k^2 - k + 1}{(1 + k)^2} \sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}\,.$$

Dana Heuberger

14. Fie $a < b < c$ cifre nenule. Demonstraţi că

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2} + \frac{5a + 2b + 5c}{8160}\,.$$

Când are loc egalitatea?

Cristinel Mortici

15. Fie m, n, p, q, r numere prime, astfel încât

$$m^4 + n^4 + p^4 + q^4 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r - 1) + 1555.$$

Demonstraţi că $m = n = p = q = r = 5$.

Cristinel Mortici

Clasa a X-a

1. Se consideră numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3, de acelaşi modul, astfel încât

$$\frac{z_2^2 + z_3^2}{z_1^2}, \frac{z_3^2 + z_1^2}{z_2^2}, \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_3^2} \in \mathbb{R}.$$

Să se demonstreze că triunghiul care are vârfurile de afixe z_1, z_2, z_3 este dreptunghic sau isoscel.

Dana Heuberger

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{N}^*$, cu $(n, k) = 1$ şi ecuaţia

$$\{a^k\}x^2 - 4\{a^n\}x + 6 = 0.$$

a) Să se arate că dacă rădăcinile ecuaţiei sunt numere întregi, atunci $a \in \mathbb{Q}$.

b) Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ există o infinitate de valori ale lui $a > 1$, astfel încât ecuaţia

$$\{a^{2n+1}\}x^2 - 4\{a^n\}x + 6 = 0$$

să aibă rădăcinile întregi.

Dana Heuberger

3. Să se determine şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale, astfel încât $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_1 \cdot a_{a_1} + a_2 \cdot a_{a_2} + \cdots + a_n \cdot a_{a_n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dana Heuberger

4. Să se arate că:

$$(\operatorname{arctg} x)^2 + \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)^2 \geq \frac{\pi^2}{8}, \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}^*.$$

D. M. Bătineţu-Giurgiu

5. Să se arate că în orice triunghi au loc inegalităţile:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{\sqrt{3}}{r} \geq \frac{9}{p},$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

Gheorghe Râmbu, matematician

6. Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Să se determine numărul perechilor (A, B) care satisfac condiţiile: $A \cup B = M$ şi $card(A \cap B) \leq 2$.

Gheorghe Boroica

7. Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Să se determine numărul de perechi (A, B) ştiind că îndeplinesc condiţiile: $A \cup B = M$ şi $card(A \cap B)$ este număr par.

Gheorghe Boroica

8. Să se rezolve ecuaţia:

$$13^{\log_3 |4x-1|} - 2 \cdot 9^{\log_{13}(32x^2-16x+9)} = 7.$$

Gheorghe Boroica

9. *a*) Exprimaţi $(C_{n+1}^k)^2 - (C_n^{k-1})^2$, în funcţie de $(C_n^k)^2$, $k \in \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se arate că:

$$1 + \frac{n+2}{n}(C_n^1) + \frac{n+3}{n-1}(C_n^2)^2 + \cdots + \frac{2n+1}{1}(C_n^n)^2 = C_{2n+2}^{n+1} - C_{2n}^n, \ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

10. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, dacă

$$\begin{cases} a \cdot b & \geq 5 \\ 2^{a^2} + 2^{b^2} & \leq 64. \end{cases}$$

Nicolae Muşuroia

11. a) Să se construiască o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că ecuaţia $f(x) = t$ are exact 2 soluţii distincte în $\mathbb{R}$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$.
b) Să se construiască o funcţie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cu proprietatea că ecuaţia $g(x) = z$ are exact 2 soluţii distincte în $\mathbb{C}$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$.

Ion Savu

12. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2^x + 3^x = 3y + 2 \\ 2^y + 3^y = 3z + 2 \\ 2^z + 3^z = 3x + 2. \end{cases}$$

Nicolae Muşuroia

13. Se consideră numerele $a, b, c \in (1, 2]$. Să se arate că:

$$\log_a(4b^2 - 5b + 2) + \log_b(4c^2 - 5c + 2) + \log_c(4a^2 - 5a + 2) \geq 9.$$

Când are loc egalitate?

Gheorghe Boroica

14. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve ecuaţia:

$$\underbrace{\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{\ldots\sqrt{3 + 2x}}}}} = \frac{x^2 - 3}{2}.$$

Florin Bojor

15. Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică simultan relaţiile:

$$x^3 f^3(x) - 3x f(x) g^2(x) = \cos x$$

$$g^3(x) - 3x^2 f^2(x) g(x) = -\sin x, \ (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} e^{x^2} & 1 \\ \ln(1 + x^2) & \cos x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Notăm $A^n(x) = \begin{pmatrix} a_n(x) & b_n(x) \\ c_n(x) & d_n(x) \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{a_n(x) - d_n(x)}{c_n(x)}.$$

Ludovic Longaver

2. *a*) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve ecuaţia: $2^{nx} + 2(n - 1) = \dfrac{2}{x}$.

b) Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \neq 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, dat de relaţia de recurenţă:

$$2^{x_1} + 2^{2x_2} + 2^{3x_3} + \cdots + 2^{nx_n} = \frac{2}{x_n}, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ludovic Longaver

3. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^k} C_n^k.$$

Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

4. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu proprietatea că $f(a) = 0$, să se demonstreze că există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$f(c) = (b - c)f'(c).$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:
a) f este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$;
b) derivata sa f' este o funcţie periodică pe $\mathbb{R}$.
Să se demonstreze că există două funcţii $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:
1) φ este funcţie periodică pe $\mathbb{R}$;
2) ψ este funcţie liniară pe $\mathbb{R}$,
astfel încât $f = \varphi + \psi$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

6. Dacă $a, b \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, să se găsească cel mai mare $\lambda \in \mathbb{R}$, pentru care

$$\sqrt[m]{a + \sqrt[n]{b}} \geq \sqrt[m+mn]{\lambda \cdot ab}\,.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

7. Se consideră $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin condiţiile:

$$x_1 = \frac{24}{5} \quad \text{şi} \quad 5x_{n+1} = 13x_n + 12\sqrt{x_n^2 + 4}\,,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se determine termenul general al şirului şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2}$.

Gheorghe Boroica

8. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ dat prin condiţiile:

$$a_0 = 2 \text{ şi } a_{n+1} = \sqrt[p]{3^p - 3 + a_n}\,,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $p \geq 3$ este un număr natural fixat.

Să se arate că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Gheorghe Boroica

9. Dacă $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ este o funcţie injectivă, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f^2(k)}{k^3}$.

Gheorghe Boroica

10. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $x_1 \in \mathbb{R}$ şi

$$x_{n+1} = \begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Discuţie după x_1.

Meda şi Florin Bojor

11. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifică relaţia $(\exists)\, a \in (0,1)$ şi $b \geq 0$ astfel încât $x_{n+1} \leq a x_n + a^n b$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

i) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

ii) Să se demonstreze că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $y_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ este convergent.

Florin Bojor

12. Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k} \ln(1 + k x_n)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.

(Generalizarea problemei C.649, G.M. 11-12/1986)

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Nicolae Muşuroia

13. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ care satisface relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = ax_n + \sqrt{bx_n^2 - 2},\ \text{unde } x_1, a, b \in \mathbb{N}^*.$$

a) Demonstraţi că dacă $a = 2$, $b = 3$ şi $x_1 = 1$, atunci $x_n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Demonstraţi că mulţimea $A = \{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / (\exists)\, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_n \notin \mathbb{N}^*$, $(\forall)\, x_1 \in \mathbb{N}^*\}$ este infinită.

Cristian Heuberger

14. Pentru permutarea $\tau \in S_n$, notăm cu k cel mai mic exponent din $\mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^k = e$ şi considerăm funcţia $f_\tau : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$,

$$f_\tau(i) = \tau(i) + \tau^2(i) + \cdots + \tau^k(i).$$

a) Să se determine $\tau \in S_3$, astfel încât funcţia f_τ este constantă.

b) Să se determine $\tau \in S_4$, astfel încât funcţia f_τ este constantă.

Dana Heuberger

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -4 & 4 & -6 \\ -9 & -13 & 11 & -8 \\ 10 & 14 & -10 & 9 \end{pmatrix}$.

Calculaţi $\log_2 S$, unde S este suma elementelor matricei A^{2011}.

Cristian Mortici

Clasa a XII-a

1. Se consideră $a \geq 0$ un număr fixat şi şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(n+k)^3}{(n+k)^4 + a}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ln 2$.

Gheorghe Boroica

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit comutativ şi funcţia injectivă $f : G \to G$, astfel încât

$$f(f(x \cdot y)y^{-1}) = x \cdot f(x \cdot y)y^3, \quad (\forall)\, x, y \in G.$$

Să se arate că $ord(G)$ este un număr de forma $4k + 1$.

Gheorghe Boroica

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Să se arate că funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} |x^i - a_i| \sin \dfrac{i}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

Gheorghe Boroica

4. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x (x-t)f(t)dt = x, \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

Nicolae Muşuroia

5. Fie $a > 0$ şi $f : [-a, a] \to \mathbb{R}_+$ o funcţie pară, iar $g : [-a, a] \to \mathbb{R}_+$ o funcţie impară. Demonstraţi că

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{f(x)}}{e^{g(x)} + 1}\, dx \leq \sqrt{ac}, \text{ unde } c = \int_0^a f(x)dx.$$

Horia Zlampareţ

6. Fie inelul $(A, +, \cdot)$ cu $0 \neq 1$ şi mulţimea $M = \{x \in A | x^2 = x + 1\}$. Dacă M are un număr impar de elemente, să se demonstreze că

$$(\forall)\, x \in M, \quad x^{10} + 1 = 0.$$

Dana Heuberger

7. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu $|A| \geq 4$ astfel încât $(\forall)\, x, y \in A \setminus \{0, 1\}$, $x \neq y$, avem $x^2 = y$ sau $y^2 = x$. Să se determine numărul elementelor inelului A.

Dana Heuberger

8. Se consideră ecuaţiile:

$$\hat{3}x^2 + \hat{5}x + \hat{9} = \hat{0},\ x \in \mathbb{Z}_{71}$$
$$\overline{4}x^2 + \overline{3}x + \overline{33} = \overline{0},\ x \in X_{59}$$

a) Fără a rezolva efectiv ecuaţiile, să se arate că una dintre ele are soluţii, iar cealaltă nu.

b) Să se rezolve ecuaţiile.

Costel Chiteş

9. a) Să se arate că există o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitivabilă şi F o primitivă a sa, aşa încât $f\left(F(x)-\frac{1}{2}x^2\right)=x^2$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie primitivabilă şi $a,b\in\mathbb{R}$. Arătaţi că nu există nici o primitivă F a lui f pentru care $f(F(x)+ax+b)=x$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

Gheorghe Boroica

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

Să se arate că dacă F este o primitivă pentru f şi $F(1)=0$, atunci

$$F(n+1)\geq n-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right),\quad (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*.$$

Gheorghe Boroica

11. Aflaţi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabilă astfel încât

$$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-\ln\sqrt{1+x^2},\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}.$$

Cristian Heuberger

12. Să se determine funcţia continuă $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ care admite primitiva $F:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)=\{F(x)\}$, $(\forall)\,x\in(-\infty,0)$.

Nicolae Muşuroia

13. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\,dx.$$

Crina Petruţiu

14. Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu n elemente. Pentru fiecare $k \in \mathbb{Z}$ definim $G_k \overset{not}{=} \{x^k \,|\, x \in G\}$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $d = (a, b)$, arătaţi că $G_a G_b = G$ dacă şi numai dacă $(d, n) = 1$, unde $G_a G_b = \{u \cdot v \,|\, u \in G_a \text{ şi } v \in G_b\}$.

Dana Heuberger

15. Se consideră grupul $(G,\cdot)$ cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Spunem că subgrupul H al lui G are proprietatea P dacă $H \neq G$ şi pentru orice $x, y \in G \backslash H$ avem $x \cdot y \in H$.

a) Să se dea un exemplu de grup G, care are trei subgrupuri distincte H, K, L cu proprietatea P, astfel încât $G = H \cup K \cup L$.

b) Dacă H, K, L sunt subgrupuri distincte, cu proprietatea P, ale lui G şi $G = H \cup K \cup L$, să se determine $|H \cup K \cup L|$.

Dana Heuberger

Erată

- La problema 9, clasa a X-a, în ipoteză, "$\triangle ABC$ nedreptunghic" devine "$\triangle ABC$ ascuţitunghic".
- La problema 1, clasa a XI-a, în enunţ, $x-1$ devine $1-x$.
- La problema 3, clasa a XII-a, în enunţ, $(2n+1)(n!)^2$ devine $(2k+1)(k!)^2$.
- La problema 12, clasa a XII-a, în ipoteză, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ devine $f:[0,1]\to[0,\infty)$.
- La problema 14, clasa a XII-a, în ipoteză, $(1+x^{2k})^{\frac{1}{c}}$ devine $(1+x^{2c})^{\frac{1}{c}}$.